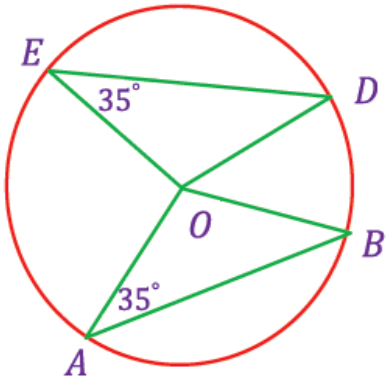


تطبيق 2 صفحة 48:

في الشكل المجاور برهن أن القوسان $\overset{\frown}{ED}$, $\overset{\frown}{AB}$ طبوقان

وان الوترين $[ED]$, $[AB]$ طبوقان

الحل :

1 – "يقاس القوس بقياس زاويته المركزية" أي: $A\hat{O}B = \overset{\frown}{AB}$ لنحسبها:

المثلث AOB متساوي الساقين (لأن $A0 = OB = R$)

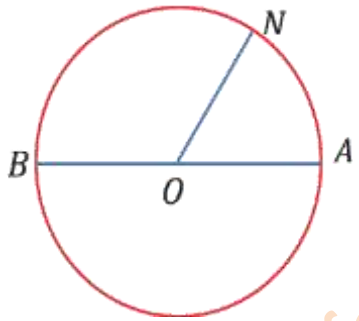
ومنه $\hat{A} = \hat{B} = 35^\circ$

ومنه $A\hat{O}B = 180 - (35^\circ + 35^\circ) = 110^\circ$ ومنه $\overset{\frown}{AB} = 110^\circ$

بنفس الطريقة في المثلث EOD نجد : $\overset{\frown}{ED} = 110^\circ$ ومنه $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{ED}$

2 – بما أن $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{ED} = 110^\circ$

"إذا تطابق قوسان تطابق وتراهما" ومنه $AB = ED$



حاول أن تحل صفحة 48 :

1) في الشكل المجاور

لدينا $B\hat{O}N = 2\ A\hat{O}N$ أوجد قياس كل من القوسين $\overset{\frown}{AN}$ ، $\overset{\frown}{BN}$

الحل :

"يقاس القوس بقياس زاويته المركزية": $B\hat{O}N = \overset{\frown}{BN}$ ، $A\hat{O}N = \overset{\frown}{AN}$

نعلم أن: $A\hat{O}N + B\hat{O}N = 180^\circ$

نعوض الفرض: $A\hat{O}N + 2\ A\hat{O}N = 180^\circ$

ومنه $3\ A\hat{O}N = 180^\circ$ ومنه $A\hat{O}N = 60^\circ$

ومنه $B\hat{O}N = 2\,(60^\circ) = 120^\circ$

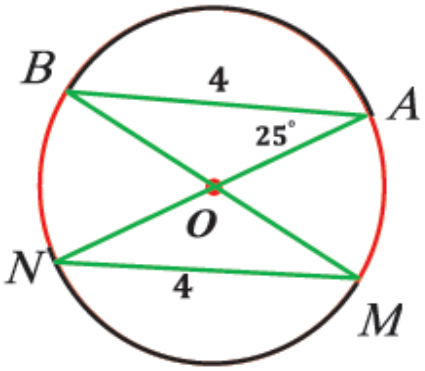
نعوض: $B\hat{O}N = \overset{\frown}{BN} = \boxed{120^\circ}$ ، $A\hat{O}N = \overset{\frown}{AN} = \boxed{60^\circ}$

www.facebook.com/groups/syria.teachers

2) في الشكل المجاور

1 – أوجد قياس الزاوية $M\hat{O}N$

2 – أوجد قياس القوس $\overset{\frown}{AM}$



الحل :

1 – من الشكل : $MN = AB = 4$

الأوتار الطبوقة تحدد أقواس طبوقة ومنه $\overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{AB}$

"يقاس القوس بقياس زاويته المركزية" ومنه $M\hat{O}N = A\hat{O}B$ ولنحسب $A\hat{O}B$:

المثلث AOB متساوي الساقين (لأن فيه: $A0 = OB = R$) ومنه $\hat{A} = \hat{B} = 25^\circ$

ومنه $A\hat{O}B = 180^\circ - (25^\circ + 25^\circ) = 130^\circ$ ومنه $M\hat{O}N = A\hat{O}B = \boxed{130^\circ}$

2 - "القوس يقاس بقياس زاويته المركزية" ومنه $\overset{\frown}{AM} = A\hat{O}M$

إن $\hat{O}M$ مكملة للزاوية $M\hat{O}N$

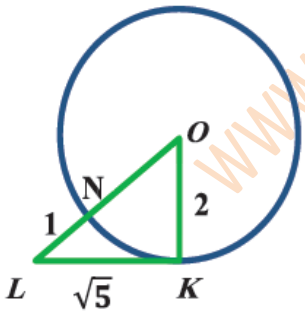
ومنه $A\hat{O}M = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$ ومنه $\overset{\frown}{AM} = A\hat{O}M = \boxed{50^\circ}$

تطبيق صفحة 50:

بين فيما إذا كان (KL) مماساً للدائرة $C(O, OK)$ في كل من الشكلين التاليين :

فكرة الحل: يكون المستقيم LK مماس للدائرة إذا كان عمودي على نصف القطر أي : $KL \overset{?}{\perp} KO$

لمعرفة ذلك نطبق مبرهنة عكس فيثاغورث

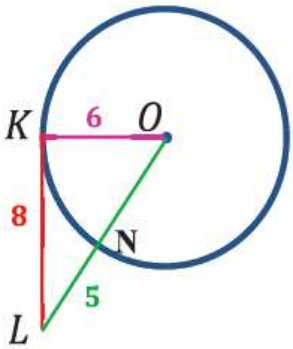


1 – $ON = R = 2$ و $OL = ON + NL = 2 + 1 = 3$

$KL^2 + OK^2 = OL^2$ نعوض: $5 + 4 = 9$ محققة

فالمثلث OKL قائم الزاوية في $\hat{K}$

ومنه $KL \perp KO$ ومنه المستقيم KL مماس للدائرة



2 – $ON = R = 6$ و $OL = ON + NL = 6 + 5 = 11$

$KL^2 + OK^2 = OL^2$ نعوض : $64 + 36 \neq 121$ غير محققة

فالمثلث OKL غير قائم الزاوية

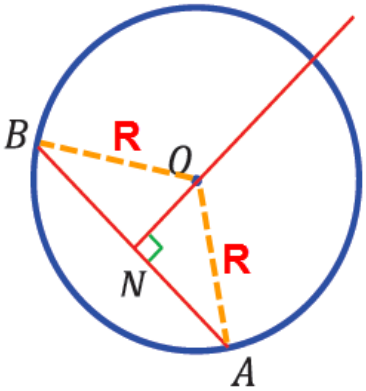
ومنه المستقيم KL ليس مماس للدائرة

www.facebook.com/groups/syria.teachers

نشاط 1 صفحة 50:

في الشكل المجاور : $C(O,R)$ دائرة ، $[AB]$ وتر فيها ، $(ON) \perp [AB]$ أرسم $[OA]$ ، $[OB]$

أجب عن الأسئلة التالية :



1 – إن $OA = OB$ علل ؟ لأن كل منهما $= R$

2 – ما نوع المثلث OAB ؟ متساوي الساقين (لأن: $OA = OB = R$)

3 – هل $[ON]$ متوسط متعلق بالقاعدة $[AB]$ ولماذا؟

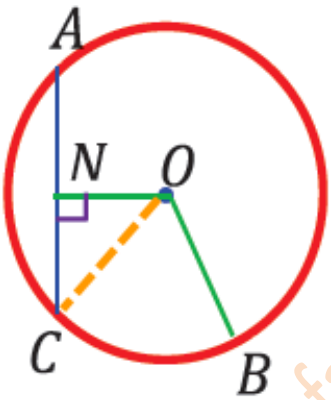
ON متوسط متعلق بالقاعدة لأن:

الارتفاع في المثلث المتساوي الساقين هو متوسط ومنصف ومحور

تطبيق صفحة 51:

في الشكل المرسوم جانباً $C(O,10)$ دائرة $AC = 12$ أحسب ON

الحل :



نصل OC ونطبق مبرهنة فيثاغورث في المثلث القائم ONC: $ON^2 + NC^2 = OC^2$

حيث: $OC = R = 10$

و" المستقيم المار بمركز دائرة عمودياً على وتر فيها ينصف ذلك الوتر"

ومنه N منتصف AC ومنه $NC = \frac{1}{2}(12) = 6$

نعوض في علاقة فيثاغورث: $ON^2 + 36 = 100$

ومنه $\boxed{ON = 8}$

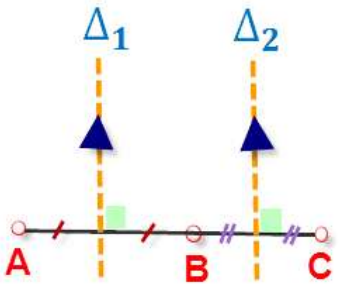
تفكير ناقد صفحة 54:

ناقش صحة العبارة الآتية مع التعليل: من ثلاث نقاط على استقامة واحدة ، يمكن أن تمر دائرة

الحل : العبارة خاطئة

التعليل: لتكن A , B , C ثلاث نقاط على استقامة واحدة ، يمر من هذه النقاط دائرة عندما يتلاقى محوري

القطعتين $[AB]$ ، $[BC]$ في نقطة واحدة هي مركز الدائرة:



نرسم محوري القطعتين المستقيمة $[AB]$ و $[BC]$ وليكونا Δ_1 ، Δ_2 على الترتيب

العمودان على مستقيم واحد متوازيان ومنه $\Delta_1 \parallel \Delta_2$ ولا يمكن أن يتقاطعان

ومنه لا يمكن أن يمر دائرة من ثلاثة نقط على استقامة واحدة

www.facebook.com/groups/syria teachers

حاول أن تحل صفحة 55:

ABC مثلث متساوي الأضلاع ، طول ضلعه 6

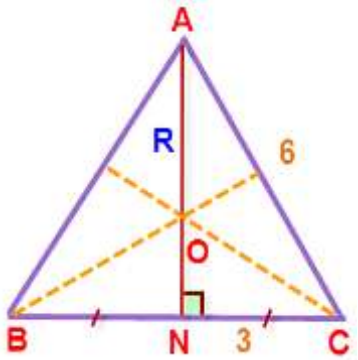
1 – أرسم هذا المثلث ، وعين مركز الدائرة المارة برؤوسه

2 – أحسب طول أحد متوسطاته واستنتج طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه

الحل :

1 - مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث المتساوي الأضلاع هي O نقطة تلاقي محاور أضلاعه وهي تنطبق على مركز ثقل المثلث.

2 - كل محور في المثلث المتساوي الأضلاع هو منصف وارتفاع ومتوسط ، ولنحسب طول المتوسط AN :



نطبق مبرهنة فيثاغورث في المثلث القائم ANC : $AN^2 + NC^2 = AC^2$

نعوض: $AN^2 + 9 = 36$ ومنه $\boxed{AN = 3\sqrt{3}}$

- بالاستفادة من خاصة مركز ثقل المثلث نجد : $R = AO = \frac{2}{3}AN = \boxed{2\sqrt{3}}$

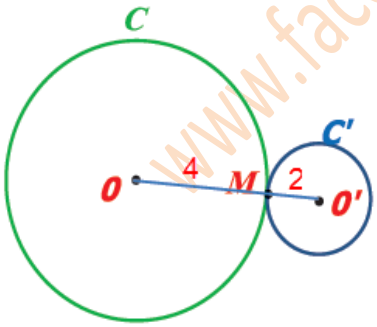
توضيح العلاقة الأخيرة:

$$\frac{ON}{AO} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{ON+AO}{AO} = \frac{1+2}{2} \Rightarrow \frac{AN}{AO} = \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{AO = \frac{3}{2}AN}$$

تطبيق صفحة 55 :

1) أرسم الدائرتين $C(O,4)$ ، $C'(O',2)$ المتماستين خارجاً في M و أحسب OO'

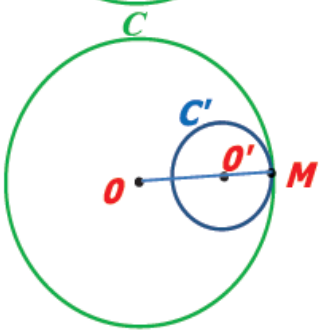
الحل :



$$OO' = R + R' = 4 + 2 = \boxed{6}$$

2) كرر الطلب السابق عندما C ، C' متماستين داخلاً

الحل :

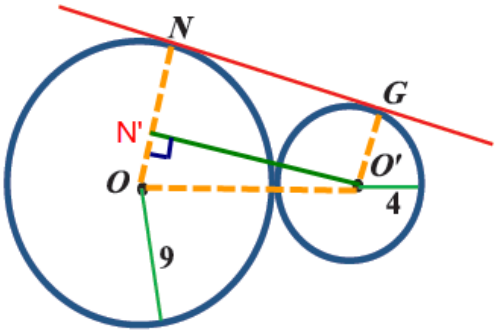


$$OO' = |R - R'| = 4 - 2 = \boxed{2}$$

www.facebook.com/groups/syriateachers

حاول أن تحل صفحة 55:

في الشكل المجاور : أوجد طول $[GN]$ (قطعة من المماس المشترك لدائرتين)



الحل :

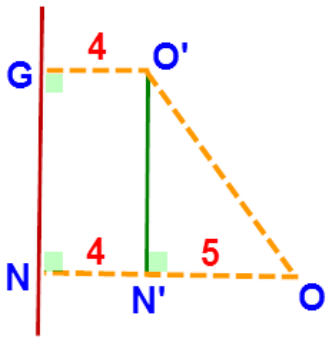
المماس يعامد نصف القطر ومنه $O'G \perp GN$ ، $ON \perp GN$

العمودان على مستقيم واحد متوازيان ومنه $O'G \parallel ON$

نرسم من O' عموداً على ON فيقطعه في N' وبالمثل : $O'N \parallel GN$

ومنه $O'N'NG$ مستطيل ومنه $O'N' = \mathrm{GN}$

نحسب $O'N'$ حسب مبرهنة فيثاغورث في المثلث القائم $O'N'O$:



حيث: $O'O = R + R' = 9 + 4 = 13$

$N'O = NO - N'N = R - R' = 9 - 4 = 5$

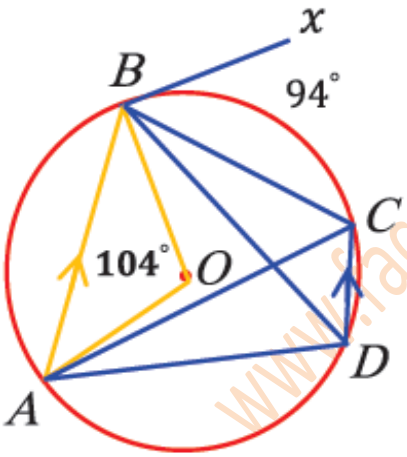
ويكون: $ON'^2 + O'N'^2 = O'O^2$

نعوض: $25 + O'N'^2 = 169$ ومنه $O'N' = 12$

ومنه $\boxed{O'N' = GN = 12}$

حاول أن تحل صفحة 60 :

1) في الشكل المجاور :



قياس القوس $\overset{\frown}{BC}$ يساوي 94° ، $B\hat{O}A = 104^\circ$

$[AB] \parallel [DC]$ ، $[Bx) \perp [OB]$

والمطلوب حساب كل من :

$B\hat{D}A$ ، $\overset{\frown}{AD}$ ، $\overset{\frown}{ADC}$ ، $D\hat{B}x$ ، $O\hat{A}C$

الحل :

حساب $B\hat{D}A$: " قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف الزاوية المركزية المشتركة معها بالقوس"

$$B\hat{D}A = \frac{1}{2}A\hat{O}B = \frac{1}{2}(104^\circ) = \boxed{52^\circ}$$

حساب $\overset{\frown}{AD}$: "الوتران المتوازيان يحصران قوسان طبوقان"

$AB \parallel DC$ ومنه $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC} = 94^\circ$

www.facebook.com/groups/syriateachers

حساب $\overset{\frown}{ADC}$: $\overset{\frown}{ADC} = \overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{DC}$ ولنحسب قياس القوس $\overset{\frown}{AD}$:

" قياس قوس الدائرة $= 360^\circ$ " ومنه $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{DC} + \overset{\frown}{DA} = 360^\circ$

"يقاس القوس بقياس زاويته المركزية" ومنه $\overset{\frown}{AB} = A\hat{O}B = 104^\circ$

نعوض : $104^\circ + 94^\circ + \overset{\frown}{DC} + 94^\circ = 360^\circ$ ومنه $\overset{\frown}{CD} = 68^\circ$

وبالتالي: $\overset{\frown}{ADC} = \overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{DC} = 94^\circ + 68^\circ = \boxed{162^\circ}$

حساب $D\hat{B}x$: $D\hat{B}x = D\hat{B}C + C\hat{B}x$ ولتحسب كل من الزاويتين $C\hat{B}x$ ، $D\hat{B}C$:

" الزوايا المحيطية المشتركة بالقوس طبوقة" ومنه $D\hat{A}C = D\hat{B}C$

"قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المقابلة" ومنه $D\hat{B}C = \frac{1}{2}\overset{\frown}{CD} = \frac{1}{2}(68^\circ) = 34^\circ$

" قياس الزاوية المماسية يساوي نصف قياس القوس المقابل لها" ومنه $C\hat{B}x = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC} = \frac{1}{2}(94^\circ) = 47^\circ$

نعوض : $D\hat{B}x = D\hat{B}C + C\hat{B}x = 34^\circ + 47^\circ = \boxed{81^\circ}$

حساب $O\hat{A}C$: $O\hat{A}C = B\hat{A}C - B\hat{A}O$ ولنحسب كل من الزاويتين : $B\hat{A}O$ ، $B\hat{A}C$:

المثلث AOB متساوي الساقين لأن: $OA = OB = R$ ومنه $\hat{A} = \hat{B}$

"مجموع قياسات زوايا المثلث 180°: $\hat{A} + \hat{B} + 104^\circ = 180^\circ$ ومنه $2\hat{A} = 76^\circ$ ومنه $\hat{A} = \hat{B} = 38^\circ$

أي : $B\hat{A}O = 38^\circ$

"قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المقابلة" ومنه:

$B\hat{A}C = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BC}) = \frac{1}{2}(94^\circ) = 47^\circ$

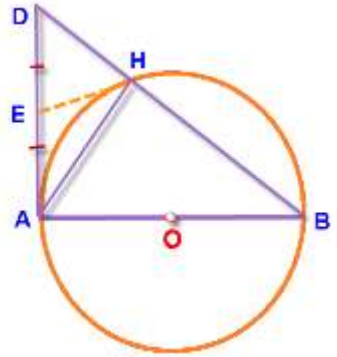
نعوض : $O\hat{A}C = B\hat{A}C - B\hat{A}O = 47^\circ - 38^\circ = \boxed{9^\circ}$

تدقيق الآنسة: أمل سلمان

موقع مناهج الرياضيات السورية
www.syCourses.com
مجموعة مدرسي الرياضيات السورية
www.facebook.com/groups/syria.teachers

www.facebook.com/groups/syria.teachers

2) $[AB]$ قطر في الدائرة $C(O,R)$ ، نرسم المماس للدائرة C في النقطة A ونعين عليه النقطة D بحيث $[BD]$ يقطع الدائرة C في النقطة H ، فإذا كانت النقطة E منتصف $[AD]$ فبرهن أن المثلث AHB قائم الزاوية، وان المثلث AEH متساوي الساقين



الحل :

" الزاوية المحيطية التي تحصر نصف الدائرة هي زاوية قائمة"

إذاً: $A\hat{H}B = 90^\circ$ ومنه المثلث AHB قائم الزاوية

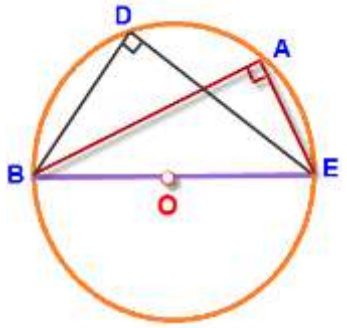
- النقطة E منتصف AD ومنه EH متوسط في المثلث القائم AHD

" طول المتوسط في مثلث قائم يساوي نصف طول الوتر" ومنه $HE = \frac{1}{2}AD$

ومنه $HE = EA$ ومنه المثلث AEH متساوي الساقين

حاول أن تحل صفحة 65 :

1) ABE ، ADE مثلثان قائمان وترهما المشترك $[BE]$



1 – إذا كانت النقطتان A , D تقعان في جهة واحدة نسبة إلى (BE)

برهن أن النقط E ، B ، D ، A تقع على دائرة واحدة، عين مركزها وأرسمها

2 – على نصف المستقيم $[ED)$ نحدد النقطة H بحيث $DH = DB$

و على نصف المستقيم $[BA)$ نحدد النقطة T بحيث $TA = AE$

برهن أن النقط H ، T ، E ، B تقع على دائرة واحدة .

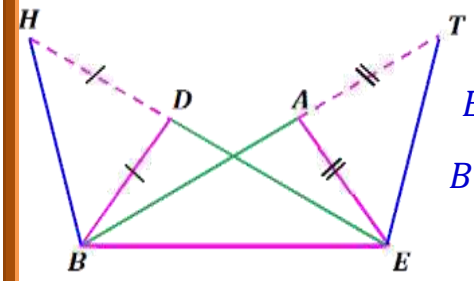
3 – أعد حل الطلب الأول إذا كانت النقطتان A , D تقعان في جهتين مختلفتين نسبة إلى(BE)

الحل :

1 - $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$ فالزاويتان $E\hat{A}B$ ، $E\hat{D}B$ متساويتين ورأساهما يقعان في جهة واحدة بالنسبة إلى BE

فحسب مبرهنة الرباعي الدائري (الحالة الثالثة) ومنه النقط E ، B ، D ، A تقع على دائرة واحدة

مركزها: O منتصف الوتر المشترك $[BE]$ للمثلثين القائمين EAB و EDB



2 – المثلث EAT قائم الزاوية ومتساوي الساقين فرضاً ومنه $E\hat{T}A = 45^\circ$

والمثلث BDH قائم الزاوية ومتساوي الساقين فرضاً ومنه $B\hat{H}E = 45^\circ$

www.facebook.com/groups/syriateachers

ومنه الزاويتان $B\hat{T}E$ ، $D\hat{H}B$ لهما ذات القياس ورأساهما يقعان في جهة واحدة بالنسبة إلى BE

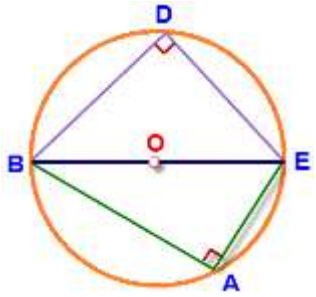
فحسب مبرهنة الرباعي الدائري(الحالة الثالثة) ومنه النقط E ، B ، D ، A تقع على دائرة واحدة

3 – $\hat{A}$, $\hat{D}$ زاويتان متقابلتان ومتكاملتان في الرباعي $AEDB$ لأن : $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$

" إذا تكاملت زاويتان متقابلتان في رباعي كان هذا الرباعي دائري "

ومنه النقط E ، B ، D ، A تقع على دائرة واحدة

مركزها: O منتصف الوتر المشترك EB للمثلثين القائمين EAB و EDB



2) في الشكل المرسوم جانباً

$C(O,6)$ دائرة (DH) و (BE) مماسان لها في النقطتين B , D على الترتيب ، $B\hat{O}D = 60^\circ$

والمطلوب :

1 – أحسب DH

2 – بين أن النقط D ، E ، B ، O تقع على دائرة واحدة عين مركزها وأرسمها

الحل :

1) $DH \perp DO$ لأن المماس يعامد نصف القطر ومنه $\hat{D} = 90^\circ$ والمثلث ODH قائم الزاوية في $\hat{D}$

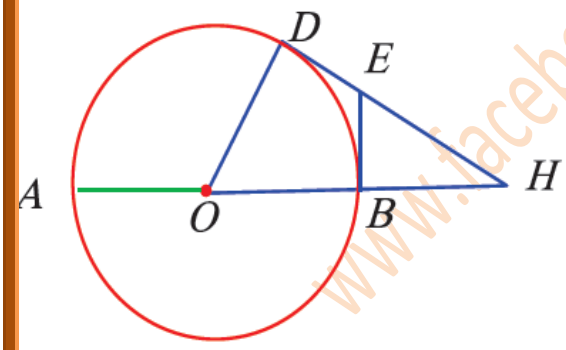
$\hat{H} = 180^\circ - (90^\circ + 60^\circ) = 30^\circ$

"الضلع المقابل للزاوية 30° في المثلث القائم تساوي نصف الوتر"

ومنه $OD = \frac{1}{2} OH$ ومنه $OH = 2\,OD = 2R = 12$

نطبق فيثاغورث في المثلث القائم ODH : $OD^2 + DH^2 = OH^2$

نعوض : $36 + DH^2 = 144$ ومنه $\boxed{DH = 6\sqrt{3}}$



2) $EB \perp BO$ لأن المماس يعامد نصف القطر ومنه $\hat{B} = 90^\circ$

أصبح لدينا $\hat{B}$, $\hat{D}$ زاويتان متقابلتان ومتكاملتان في الرباعي $OBED$ لأن : $\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$

و" إذا تكاملت زاويتان متقابلتان في رباعي كان هذا الرباعي دائري "

ومنه النقط D ، E ، B ، O تقع على دائرة واحدة

مركزها: منتصف الوتر المشترك $[OE]$ للمثلثين القائمين BEO و ODE

www.facebook.com/groups/syria.teachers

تطبيق صفحة 67:

تأمل الشكل المجاور: واحسب محيط المثلث ABC حيث : $AK = 4x - 1$ و $AN = x + 2$

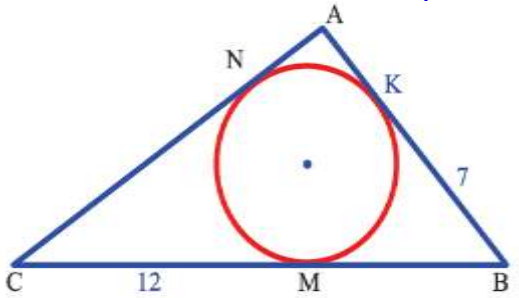
الحل :

محيط المثلث = مجموع أطوال أضلاعه = $CB + AC + AB$

ولنحسب أطوال أضلاعه:

"من نقطة خارج دائرة نرسم مماسين لهذه الدائرة ويكون جزءا المماس المحصورين بها ونقطتي التماس طبوقين"

ومنه $\{BK = BM = 7\}$ ، $\{CM = CN = 12\}$ ، $\{AN = AK\}$



ومنه $x + 2 = 4x - 1$ ومنه $x = 1$ ومنه $AK = 3$ و $= 3$

$AB = AK + KB = 3 + 7 = 10$

$AC = AN + NC = 3 + 12 = 15$

$BC = BM + MC = 7 + 12 = 19$

نعوض : محيط المثلث = $10 + 15 + 19 = \boxed{44}$

تمارين الوحدة الثالثة

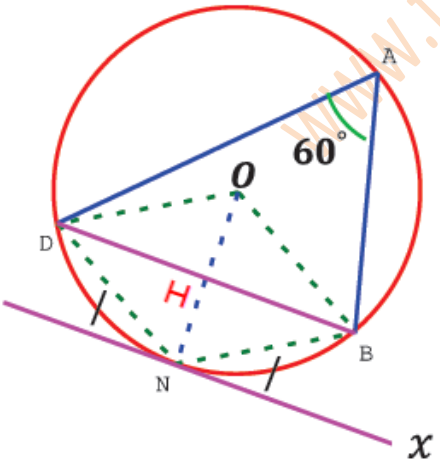
المسألة الأولى: تأمل الشكل المرسوم جانباً:

$C(O,R)$ ، $D\hat{A}B = 60^\circ$ ، النقطة N منتصف القوس $\overset{\frown}{DNB}$ ، (Nx) مماس للدائرة في N

والمطلوب :

1 – أوجد قياس الزاوية $D\hat{O}N$ واستنتج أن الرباعي $OBND$ معين

2 – استنتج أن $(Nx) \parallel (DB)$



الحل :

1– من الشكل: $ABND$ رباعي دائري فيه كل زاويتين متقابلتين متكاملتين

$D\hat{N}B = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

"قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف المركزية المشتركة معها بالقوس"

$B\hat{A}D = \frac{1}{2} B\hat{O}D$ ومنه $B\hat{O}D = 2(60^\circ) = 120^\circ$

www.facebook.com/groups/syriateachers

ولكن N منتصف القوس $\overset{\frown}{DNB}$ فالقوسان $\overset{\frown}{BN}$ و $\overset{\frown}{DN}$ طبوقان فيقابلهما زاويتان مركزيتان طبوقتان

ومنه $\boxed{D\hat{O}N = B\hat{O}N = 60^\circ}$

- لإثبات أن رباعي هو معين يكفي أن نثبت أن أضلاعه الأربعة طبوقة:

المثلث DON متساوي الأضلاع (لأنه متساوي الساقين: $OD = ON = R$ فيه زاوية الرأس $D\hat{O}N = 60^\circ$)

المثلث BON متساوي الأضلاع (لأنه متساوي الساقين: $OB = ON = R$ فيه زاوية الرأس $B\hat{O}N = 60^\circ$)

ومنه $OBND$ معين لتطابق أضلاعه الأربعة

2 - "الوتران **المتوازيان** يحصران قوسين طبوقين"

بما أن : $DN = NB$ ومنه $Nx \parallel DB$

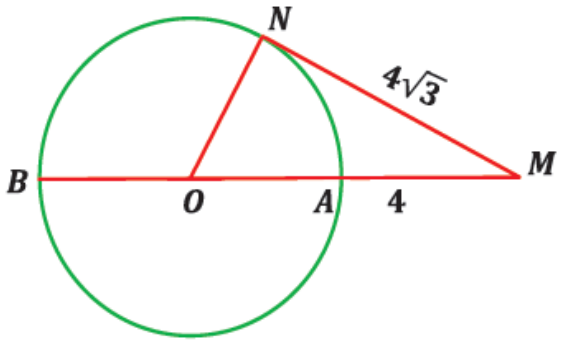
طريقة ثانية:

$ON \perp BD$ لأن قطرا المعين متعامدان

$ON \perp Nx$ لأن المماس عمودي على نصف القطر في نقطة التماس

وبما أن: العمودان على مستقيم واحد متوازيان ومنه $Nx \parallel DB$

المسألة الثانية: تأمل الشكل المرسوم جانباً



(NM) مماس للدائرة في N ، $NM = 4\sqrt{3}$ ، $AM = 4$

والمطلوب:

1 – أحسب نصف قطر الدائرة واستنتج قياس الزاوية $\hat{M}$

2 – أحسب قياس القوس $\overset{\frown}{NB}$ وقياس الزاوية المنعكسة $N\hat{O}B$

الحل :

1 - $NM \perp ND$ لأن "المماس NM يعامد نصف القطر" فالمثلث ONM قائم الزاوية في $\hat{N}$

لنفرض طول نصف القطر $= R$ ومنه $OM = R + 4$

نطبق مبرهنة فيثاغورث : $ON^2 + NM^2 = OM^2$

نعوض: $R^2 + 48 = (R + 4)^2$ ومنه $\boxed{R = 4}$

- $ON = R = 4$ ، $OM = 4 + 4 = 8$

"إذا كان طول الضلع القائمة يساوي نصف طول الوتر فإن قياس الزاوية المقابلة يساوي 30°" ومنه $\boxed{\hat{M} = 30^\circ}$

www.facebook.com/groups/syria.teachers

2 - "يقاس القوس بقياس زاويته المركزية" ومنه $\overset{\frown}{NB} = N\hat{O}B$ حيث: $N\hat{O}B = 180^\circ - N\hat{O}A$

"مجموع زوايا المثلث ONM تساوي 180°" ومنه: $N\hat{O}A = 180^\circ - (90^\circ + 30^\circ) = 60^\circ$

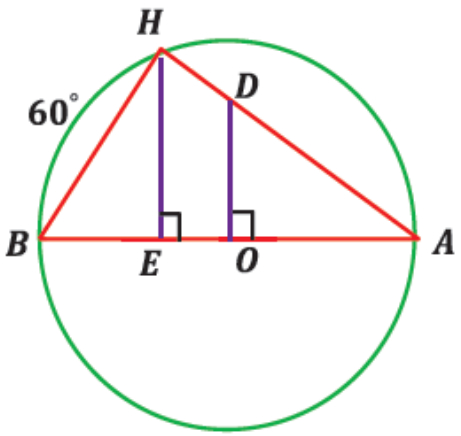
إذاً: $N\hat{O}B = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

ومنه $\boxed{\overset{\frown}{NB} = N\hat{O}B = 120^\circ}$

- حساب الزاوية المنعكسة $N\hat{O}B$:

$N\hat{O}B = B\hat{O}A + A\hat{O}N = 180^\circ + 60^\circ = 240^\circ$

أو: $N\hat{O}B = 360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$



المسألة الثالثة:

تأمل الشكل المرسوم جانباً

$C(O,6)$ دائرة ، $[HE] \perp [AB]$ ، $[DO] \perp [AB]$

وقياس القوس $\overset{\frown}{HB} = 60^\circ$ والمطلوب :

1 – أحسب قياسات زوايا المثلث (HAB) وأطوال أضلاعه

2 – أحسب HE ثم AE

3 – برهن أن المثلثين DOA ، HEA متشابهان ، ثم أحسب OD

4 – برهن أن الرباعي $ODHB$ دائري ، ثم عين مركز الدائرة المارة برؤوسه وأحسب نصف قطرها

الحل :

1 – "الزاوية المحيطية التي تحصر نصف الدائرة هي زاوية قائمة "

ومنه $\boxed{\hat{H} = 90^\circ}$ والمثلث BHA قائم الزاوية في $\hat{H}$

"قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس الذي يحصره" ومنه $\hat{A} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{HB}) = \boxed{30^\circ}$

"مجموع زوايا المثلث تساوي 180°" ومنه: $\hat{B} = 180^\circ - (90^\circ + 30^\circ) = \boxed{60^\circ}$

- $AB = 2R = 2(6) = \boxed{12}$

"الضلع المقابل للزاوية 30° في المثلث القائم تساوي نصف طول الوتر" ومنه $HB = \frac{1}{2}(BA) = \boxed{6}$

نطبق مبرهنة فيثاغورث في المثلث BHA : $BH^2 + HA^2 = AB^2$

نعوض : $36 + HA^2 = 144$ ومنه $\boxed{HA = 6\sqrt{3}}$

www.facebook.com/groups/syriateachers

2 - " الضلع المقابل للزاوية 30° في المثلث القائم AEH تساوي نصف الوتر" ومنه

$HE = \frac{1}{2}(AH) = \boxed{3\sqrt{3}}$ (أو نحسب الضلع حسب النسب المثلثية للزاوية 30°)

نطبق مبرهنة فيثاغورث في المثلث AEH : $HE^2 + EA^2 = AH^2$

نعوض : $27 + EA^2 = 108$ ومنه $\boxed{EA = 9}$

3 – "العمودان على مستقيم واحد متوازيان" ومنه $HE \parallel DO$

فحسب المبرهنة الأساسية في التشابه يكون المثلثين : DOA ، HEA متشابهين

نكتب نسب التشابه: $\begin{pmatrix} DOA \\ HEA \end{pmatrix}$ ومنه $\frac{DO}{HE} = \frac{OA}{EA} = \frac{DA}{HA}$ نعوض: $\frac{OD}{3\sqrt{3}} = \frac{6}{9}$

باستخدام الضرب التقاطعي نجد : $\boxed{OD = 2\sqrt{3}}$

4 - لدينا $\hat{O}$, $\hat{H}$ زاويتان متقابلتان ومتكاملتان في الرباعي $ODHB$ (لأن : $\hat{O} + \hat{H} = 180^\circ$)

" إذا تكاملت زاويتان متقابلتان في رباعي كان هذا الرباعي دائري"

ومنه النقط B ، H ، D ، O تقع على دائرة واحدة

مركزها: O' منتصف الوتر المشترك $[BD]$ للمثلثين القائمين DOA و HEA

نصف القطر: يساوي نصف طول الوتر المشترك $[BD]$: $R = \frac{1}{2}BD$

نحسب BD حسب فيثاغورث في المثلث القائم BOD: $BO^2 + OD^2 = BD^2$

نعوض: $36 + 12 = BD^2$ ومنه $BD = 4\sqrt{3}$ ومنه $\boxed{R = 2\sqrt{3}}$

المسألة الرابعة: **في الشكل المجاور**

(DH) ، (AB) مماسان للدائرة $C(O,R)$ في B , D على الترتيب

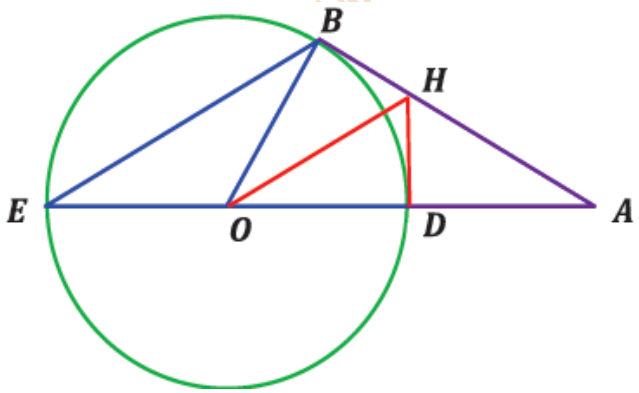
$D\hat{O}B = 60^\circ$ والمطلوب :

1 – أوجد قياس الزاوية $\hat{A}$

2 – برهن أن D منتصف $[OA]$ وأن : $HB = \frac{1}{2}HA$

3 – برهن أن الرباعي $OBHD$ دائري

4 – أحسب قياس الزاوية $B\hat{E}D$



الحل :

www.facebook.com/groups/syria.teachers

1 - $BH \perp BO$ لأن المماس BH يعامد نصف القطر ومنه المثلث OBA قائم الزاوية في $\hat{B}$

"مجموع زوايا المثلث تساوي 180°" ومنه: $\hat{A} = 180^\circ - (90^\circ + 60^\circ) = \boxed{30^\circ}$

2 – "الضلع المقابلة للزاوية 30° في المثلث القائم تساوي نصف الوتر" ومنه $OB = \frac{1}{2}OA$

ولكن: $OB = OD = R$ ومنه $OD = \frac{1}{2}OA$ ومنه D منتصف OA

- $HD \perp DO$ لأن المماس DH يعامد نصف القطر في نقطة التماس ومنه المثلث HDA قائم الزاوية في $\hat{D}$

"الضلع المقابلة للزاوية 30° في المثلث القائم تساوي نصف الوتر" ومنه $HD = \frac{1}{2}HA$

ولكن: $HB = HD$ لأنه:

"من نقطة خارج دائرة نرسم مماسين لهذه الدائرة ويكون جزءا المماس المحصورين بها ونقطتي التماس طبوقين"

نعوض في العلاقة السابقة: $HB = \frac{1}{2}HA$

3 - لدينا $\hat{B}$, $\hat{D}$ زاويتان متقابلتان ومتكاملتان في الرباعي $OBHD$ لأن : $\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$

" إذا تكاملت زاويتان متقابلتان في رباعي كان هذا الرباعي دائري "

ومنه النقط D ، H ، B ، O تقع على دائرة واحدة ومنه $OBHD$ رباعي دائري

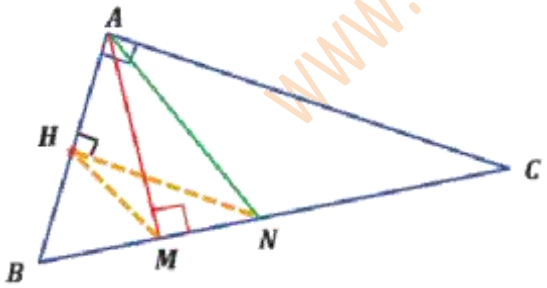
4 – "الزاوية المحيطية تساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها بالقوس"

ومنه $B\hat{E}D = \frac{1}{2}B\hat{O}D = \frac{1}{2}(60^\circ) = \boxed{30^\circ}$

المسألة الخامسة:

ABC مثلث قائم الزاوية في وفيه : $BC = 4$ ، $AB = 2$ ، $[AM] \perp [BC]$

N منتصف $[BC]$ ، H منتصف AB والمطلوب :



1 – أحسب AC ثم AN

2 – أحسب AM ثم MN

3 – أحسب $t(A\hat{N}M)$ ثم استنتج قياسها

4 – برهن تشابه المثلثين NHB ، ABC ثم أحسب مساحة المثلث NHB

5 - برهن أن النقط N ، M ، H ، A تقع على دائرة واحدة

ثم عين مركزها وأحسب طول نصف قطرها ، وبرهن أن هذه الدائرة تمر بمنتصف $[AC]$

الحل :

www.facebook.com/groups/syriateachers

1) نطبق مبرهنة فيثاغورث في المثلث القائم BAC: $AB^2 + AC^2 = BC^2$

نعوض: $4 + AC^2 = 16$ ومنه $\boxed{AC = 2\sqrt{3}}$

" طول المتوسط في المثلث القائم يساوي نصف طول الوتر" ومنه $AN = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}(4) = \boxed{2}$

2) في المثلث القائم AMC : الضلع المقابلة للزاوية 30° في المثلث القائم تساوي نصف الوتر

ومنه $AM = \frac{1}{2}AC = \boxed{\sqrt{3}}$

نطبق مبرهنة فيثاغورث في المثلث القائم AMN: $AM^2 + MN^2 = AN^2$

نعوض: $3 + MN^2 = 4$ ومنه $\boxed{MN = 1}$

3) في المثلث القائم AMN: $tan(A\hat{N}M) = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{AM}{MN} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \boxed{\sqrt{3}}$

بالاعتماد على جدول النسب المثلثية للزوايا الشهيرة نجد: $\boxed{A\hat{N}M = 60^\circ}$

4) " القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين توازي الضلع الثالثة وتساوي نصف طولها"

ومنه $NH \parallel AC$ و $NH = \frac{1}{2}AC = \sqrt{3}$

فحسب المبرهنة الأساسية في التشابه نستنتج أن المثلثين ABC ، NHB متشابهين

- "نسبة مساحتي مثلثين متشابهين تساوي مربع نسبة التشابه": $\frac{\text{مساحة } NHB}{\text{مساحة } ABC} = k^2 = \left(\frac{NH}{AC}\right)^2$

حيث: $S_{ABC} = \frac{1}{2}(AB)(AC) = \frac{1}{2}(2)(2\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$

نعوض: $\frac{\text{مساحة } NHB}{2\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ ومنه مساحة المثلث $NHB = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

5) $A\hat{M}N = A\hat{H}N = 90^\circ$ زاويتان لهما ذات القياس ورأساهما يقعان في جهة واحدة بالنسبة إلى AN

فالنقاط N ، M ، H ، A تقع على دائرة واحدة

مركزها: O منتصف الوتر المشترك AN للمثلثين القائمين AMN ، AHN

نصف قطرها = نصف طول الوتر المشترك $[AN]$

ومنه $R = AO = \frac{1}{2}AN = \boxed{1}$

www.facebook.com/groups/syriateachers

- لتكن النقطة K نقطة تقاطع الدارة مع الضلع AC

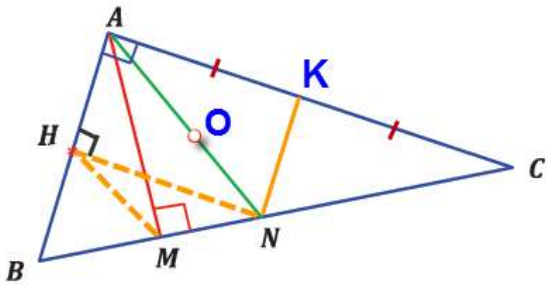
ومنه المثلث AKN قائم الزاوية في K (لأن $\widehat{K}$ محيطية تقابل قوس نصف الدائرة) أي: $NK \perp AC$

المثلث ANC متساوي الساقين (لأن $AN = NC = 2$) فيه NK ارتفاع

"الارتفاع في المثلث المتساوي الساقين هو متوسط"

ومنه NK متوسط للضلع AC

ومنه الدائرة تمر بمنتصف $[AC]$



أرجو عند نقل الموضوع ذكر المصدر وصاحب العمل وعدم التحوير فيه واستغلاله تجارياً

والشكر الجزيل للآنسة أمل سلمان على التدقيق

موقع مناهج الرياضيات السورية
www.syCourses.com

www.facebook.com/groups/syria.teachers