

- تحقق(ي) من معالجتك لكل تمارين الموضوع قبل مغادرة قاعة الامتحان.

### Exercice n°1:(3.5pts)

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite numérique définie par :  $u_0 = \frac{9}{4}$  et  $u_{n+1} = \frac{1}{8} \left( 7u_n + \frac{1}{4} \right)$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$

- 0.5 1. Calculer  $u_1$  et  $u_2$
- 0.5 2.a. Montrer par récurrence que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  :  $u_n > \frac{1}{4}$
- 0.5 2.b. Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  :  $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{8} \left( \frac{1}{4} - u_n \right)$
- 0.25 2.c. En déduire que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite décroissante.
- 0.25 2.d. Déduire de ce qui précède que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente.
3. On pose pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  :  $v_n = u_n - \frac{1}{4}$
- 0.25 3.a. Calculer  $v_0$
- 0.5 3.b. Montrer que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique de raison  $\frac{7}{8}$
- 0.25 3.c. Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$
- 0.25 4.a. Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  :  $u_n = 2 \left( \frac{7}{8} \right)^n + \frac{1}{4}$
- 0.25 4.b. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

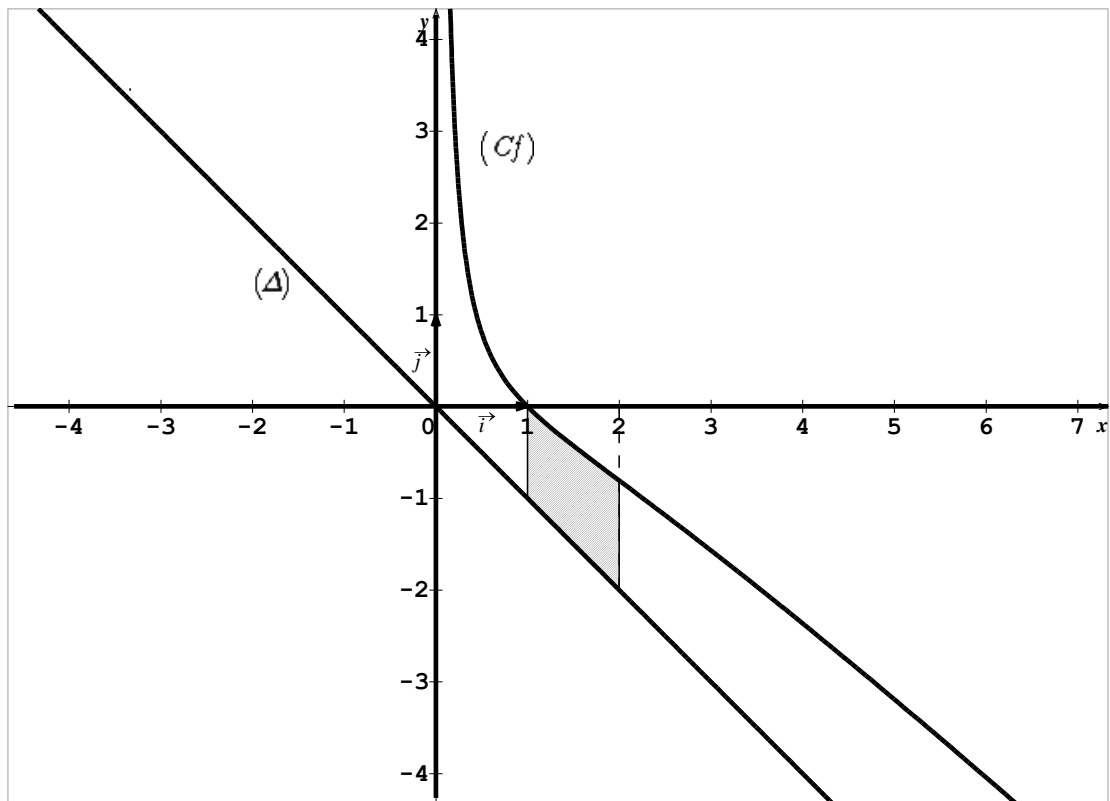
### Exercice n°2:(7.5pts)

On considère la fonction numérique  $f$  de la variable réelle  $x$  définie sur  $]0; +\infty[$

par :  $f(x) = \frac{1-x^2}{x} + \ln x$  et soit  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- 0.75 1.a. Calculer  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$  (Remarquer que  $f(x) = \frac{1-x^2+x \ln x}{x}$ ) et donner une interprétation géométrique du résultat.
- 0.5 1.b. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  (Remarquer que  $f(x) = x \left( \frac{1-x^2}{x^2} + \frac{\ln x}{x} \right)$ )
- 0.75 1.c. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x)$ , puis donner une interprétation géométrique du résultat.
- 0.75 2.a. Montrer que :  $\forall x \in ]0; +\infty[$  ;  $f'(x) = \frac{-x^2 + x - 1}{x^2}$
- 0.5 2.b. Montrer que :  $\forall x \in ]0; +\infty[$  ;  $f'(x) < 0$
- 0.5 2.c. Dresser le tableau de variations de  $f$
- 0.5 3.a. Montrer que :  $\forall x \in ]0; +\infty[$  ;  $f''(x) = \frac{2-x}{x^3}$  (Remarquer que  $f'(x) = -1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$ )

- 0.5 3.b. Etudier le signe de  $f''(x)$  et montrer que  $(C_f)$  admet un point d'inflexion d'abscisse 2
- 0.75 3.c. Montrer que l'équation de la tangente à  $(C_f)$  au point d'inflexion est :  $y = -\frac{3}{4}x + \ln 2$
4. Dans la figure ci-dessous  $(C_f)$  est la courbe représentative de  $f$  et  $(\Delta)$  la droite d'équation  $y = -x$  dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$
- 1 4.a. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que  $\int_1^2 \ln x dx = 2\ln 2 - 1$
- 1 4.b. Calculer l'aire de la partie hachurée.



### Exercice n°3:(3pts)

- 0.75 1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^2 - 6z + 13 = 0$
2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ , on considère les points  $A$  et  $B$  d'affixes respectives  $z_A = 3 + 2i$  et  $z_B = 3 - 2i$
- 0.5 2.a. Montrer que  $AB = 4$
- 0.5 2.b. Soit  $M$  un point du plan d'affixe  $x$  où  $x$  est un nombre réel différent de 3  
Montrer que le triangle  $AMB$  est isocèle en  $M$

3. Soit  $C$  le point d'affixe le nombre réel  $z_C = 3 - 2\sqrt{3}$

0.5 3.a. Montrer que  $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

0.25 3.b. Déterminer un argument du nombre complexe  $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

0.5 3.c. En déduire que le triangle  $ACB$  est équilatéral.

#### Exercice n°4:(3pts)

L'espace est rapporté à un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

On considère les points  $A(-1; 3; -1)$ ,  $B(2; 1; -2)$ ,  $C(-2; 1; 2)$  et  $F(-5; 3; 3)$

1 1.a. Montrer que  $\det(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC}) = -8$

0.25 1.b. En déduire que les points  $O$ ,  $A$ ,  $B$  et  $C$  ne sont pas coplanaires.

1 2. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan  $(ABC)$  est :  $x + y + z - 1 = 0$

0.25 3.a. Vérifier que  $F \in (ABC)$

0.5 3.b. Déterminer sans calcul l'intersection de la droite  $(OF)$  et du plan  $(ABC)$

#### Exercice n°5 :(3pts) (Tous les résultats seront donnés sous forme de fraction)

Une urne contient une boule rouge, deux boules vertes et cinq boules jaunes.

(Toutes les boules sont indiscernables au toucher).

On tire successivement et sans remise deux boules de l'urne.

On considère les événements suivants :

$A$  : « Les deux boules tirées sont vertes »

$B$  : « La première boule tirée est jaune »

$C$  : « Les deux boules tirées sont de couleurs différentes »

0.5 1. Montrer que  $p(A) = \frac{2}{56}$

0.5 2.a. Calculer  $p(B)$

0.75 2.b. Montrer que  $p(\overline{C}) = \frac{22}{56}$  et en déduire  $p(C)$  ( $\overline{C}$  est l'événement contraire de l'événement  $C$ )

3. Soit  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de boules vertes tirées.

0.75 3.a. Copier et remplir le tableau ci – contre en justifiant les réponses.

$x_i$	0	1	2
$p(X = x_i)$			

0.5 3.b. Calculer  $E(X)$  l'espérance mathématique de la variable aléatoire  $X$