

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين
الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس (O, \vec{i}, \vec{j})

$$\begin{cases} U_0 = 4 \\ U_{n+1} = \frac{2}{5}U_n + \frac{6}{5} \end{cases} \quad \text{كما يلي : } \mathbb{N}$$

1- مثل بيانيا الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (U_n) على محور الفواصل ، ما هو تخمينك ؟

2- أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل n من \mathbb{N} : $U_n > 2$ ، ثم ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n)
ب/ بين أن (U_n) متقاربة ثم أحسب نهايتها

3- (V_n) متتالية معرفة على \mathbb{N} بـ : $V_n = U_n + a$ مع a عدد حقيقي يطلب تعيينه من أجل (V_n) هندسية

4- نضع فيما يلي $a = -2$

أ/ أكتب كلا من V_n و U_n بدلالة n

ب/ أحسب بدلالة n المجموعين S_n و S'_n حيث : $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$ و $S'_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

5- نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $W_n = \ln V_n$

أ/ عين طبيعة المتتالية (W_n) أكتب بدلالة n كل من T_n و P_n حيث

$$T_n = W_0 + W_1 + W_2 + \dots + W_n \quad \text{و} \quad P_n = V_0 \times V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$$

التمرين الثاني : (04 نقاط)

يحتوي كيس على 8 كرات لا يمكن التمييز بينها باللمس و تحمل الأرقام التالية : 4,2,2,2,2,1,0,0
نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كرات من الكيس

1- نعتبر الحادثتين : A من بين الكرات المسحوبة لا توجد أية كرة تحمل الرقم 0

B جداء الأرقام التي تحملها الكرات المسحوبة يساوي 8

$$\text{بين أن } p(A) = \frac{5}{14} \quad \text{و} \quad p(B) = \frac{1}{7}$$

2- ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب جداء الأرقام التي تحملها الكرات الثلاث المسحوبة

أ/ عين قيم المتغير العشوائي X

ب/ عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X

ج/ احسب الأمل الرياضي و الإنحراف المعياري للمتغير العشوائي X

التمرين الثالث : (06 نقاط)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس مباشر (O, \vec{i}, \vec{j}) ، لتكن $A; B; C; I; H$ ثلاث نقط من

المستوي لواحقها على الترتيب : $z_A = i; z_B = -2 + i; z_C = -3; z_I = -1 - i; z_H = -3 + 4i$

1- أ/ عين نسبة و زاوية التشابه المباشر S الذي مركزه B و يحول A إلى C
ب/ عين z_G مركز ثقل المثلث ABC

2- أ/ اكتب $\frac{z_B - z_C}{z_H - z_A}$ على الشكل الجبري ، ثم استنتج المستقيم (BC) يعامد المستقيم (AH)

ب/ بين أن H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC

3- بين أن النقط $I; H; G$ في استقامة ، ثم استنتج وجود تحويل h يحول G إلى I يطلب تعيين عناصره

4- لتكن (δ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة Z حيث : $Z = z_I + \sqrt{5}e^{i\theta}$

أ/ تحقق أن النقطة A من (δ)

ب/ بين أن (δ) دائرة مركزها I يطلب تعيين نصف قطرها ، ثم احسب مساحة

ج/ تحقق أن نقطتان $B; C$ من (δ) ، ثم استنتج أن I نقطة تلاقي محاور المثلث ABC

د/ احسب مساحة (δ') صورة (δ) بالتشابه المباشر S

التمرين الرابع : (07 نقاط)

1- لتكن g دالة معرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = -(\ln x)^2 - 2\ln x + 1$

أ/ احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x); \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

ب/ ادرس تغيرات g ، ثم شكل جدول تغيراتها

ج/ تحقق أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين $\alpha; \beta$ على $]0; +\infty[$ حيث $0 < \beta < \frac{1}{e}$ و $\alpha < 2$ ثم استنتج إشارة $g(x)$

2- لتكن f دالة معرفة على بـ : $\begin{cases} f(x) = x(1 - (\ln x)^2) \\ f(0) = 0 \end{cases}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم

متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

أ/ احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ب/ بين أن f مستمرة عند الصفر

ج/ هل f قابلة للاشتقاق على يمين الصفر ، ماذا تستنتج ؟

د/ بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ لدينا : $f'(x) = g(x)$

هـ/ ادرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

3- أ/ ادرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) و المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$

ب/ انشيء (C_f) و (Δ) (نأخذ $f(\alpha) \approx 1.3; f(\beta) \approx -0.45$)

ج/ بالاعتماد على التكامل بالتجزئة أوجد الدالة الأصلية للدالة $x \rightarrow x \ln x$ و التي تنعدم عند 1

د/ احسب $A(\lambda)$ مساحة الحيز المحدد بالمنحني (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمات ذات المعادلات

$x = 1; x = \lambda$ حيث $0 < \lambda \leq 1$ ، ثم احسب $\lim_{\lambda \rightarrow 0} A(\lambda)$

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

1- لتكن $A(2; 1; 3); B(-3; -1; 7); C(3; 2; 4)$ نقط في الفضاء

أ/ بين أن النقط $A; B; C$ تشكل مستويا

ب/ بين أن الشعاع $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ناظمي للمستوي (ABC) ، ثم استنتج معادلة ديكرتية له

2- ليكن $\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -3t / t \in \mathbb{R} \\ z = 4 + t \end{cases}$ تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ)

أ/ أثبت أن (Δ) يعامد المستوي (ABC) في نقطة G يطلب تعيينها

ب/ تحقق أن G هي مرجح الجملة المتقلة $\{(A; -2); (B; -1); (C; 2)\}$

3- أ/ بين أن (S) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق : $\| -2\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC} \| = \sqrt{29}$ هي سطح

كرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها

ب/ بين أن (S') مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق : $(-2\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC}) \cdot (\vec{MC} - \vec{MB}) = 0$

هي مستوي يقبل $2x + y - z + 18 = 0$ معادلة ديكرتية له

ج/ حدد الوضع النسبي بين (S) و (S')

التمرين الثاني : (04 نقاط)

1- حل في \mathbb{C} المعادلة $z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$ ، ثم أكتب الحلين على الشكل الأسّي

2- المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس مباشر $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، لتكن $B; A; I$ ثلاث نقط من

المستوي لواحقتها على الترتيب : $z_B = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}; z_A = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}; z_I = 1$

أ/ احسب طولية z_B ، ثم اثبت أن الرباعي $AOIB$ معين، استنتج أن : $\text{Arg}(z_B) = \frac{\pi}{8} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$

ب/ استنتج قيمة مضبوطة لكل من : $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right); \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$

3- أ/ ليكن α عدد مركب حيث : $\alpha = \frac{z_B}{\sqrt{2} + \sqrt{2}}$ ، بين أن $\alpha^{2015} = \bar{\alpha}$

ب/ عين مجموعة الأعداد الطبيعية n حتى يكون : $\text{Arg}(\alpha^n) = -\frac{\pi}{8} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$

4- لتكن C نقطة من المستوي ذات اللاحقة $z_C = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{2}$

أ/ تحقق أن : $|z_C| = |z_C - z_B| = |z_C - z_A|$

ب/ استنتج انه توجد دائرة (ϕ) محيطة بالمثلث AOB ، مركزها C ونصف قطرها r يطلب تعيينه

ج/ عين مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة Z بحيث : $\text{Arg}\left(\frac{Z - z_B}{Z - z_A}\right) = \frac{\pi}{8} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$

التمرين الثالث : (05 نقاط)

- 1- دالة معرفة على $[0, +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} + 1 - x$ وليكن (C) تمثيلها في معلم متعامد متجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) .
- أ- عين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.
- ب- أثبت أن f قابلة للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$ ، وأنه من أجل كل x من $]0, +\infty[$ فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ حيث: $g(x) = -[2(x\sqrt{x} - 1) + \ln x]$.
- ج- احسب $g(1)$ ثم عين إشارة $g(x)$ على المجال $]0, +\infty[$. (ميز الحالتين $x > 1$ و $x < 1$).
- د- استنتج اتجاه تغير f على $]0, +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.
- هـ- أنشئ (C) .

- 2- نعتبر المتتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بعدها الأول $U_0 \in [1, 2]$ ، ومن أجل كل n طبيعي لدينا: $U_{n+1} = \frac{\ln U_n}{\sqrt{U_n}} + 1$.
- أ- برهن أنه من أجل كل x من $[1, 2]$ فإن: $0 \leq \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \leq 1$.
- ب- برهن بالتراجع أنه من أجل عدد طبيعي n فإن: $U_n \in [1, 2]$.
- ج- بملاحظة أن $U_{n+1} = f(U_n) + U_n$ عين اتجاه تغير المتتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- د- برهن أن $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة و عين نهايتها.

التمرين الرابع : (07 نقاط)

- 1- لتكن g دالة معرفة على \mathbb{R} كما يلي: $g(x) = -4 + (4 - 2x)e^x$.
- أ- احسب نهايات الدالة عند الأطراف المفتوحة لمجموعة تعريفها.
- ب- ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.
- ج- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين في \mathbb{R} أحدهما معدوم و الآخر نرمز له بالرمز α حيث $1.59 < \alpha < 1.6$.
- د- استنتج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} .
- 2- لتكن f الدالة المعرفة على \mathbb{R} بـ: $f(x) = \frac{2x-2}{e^x-2}$ ، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) حيث $\|\vec{i}\| = 1 \text{ cm}$.
- أ- احسب النهايات للدالة f ، فسر النتائج بيانياً.
- ب- بين أنه من أجل كل x من \mathbb{R} : $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - 2x)^2}$ ، استنتج اتجاه تغير الدالة f مشكلاً جدول تغيراتها.
- ج- أثبت أن: $f(\alpha) = \frac{2-\alpha}{\alpha-1}$ ثم عين حصراً للعدد $f(\alpha)$.
- 3- عين نقط تقاطع (C_f) مع محوري الإحداثيات.
- ب- احسب $f(-2); f(2); f(-1)$ ، ثم انشئ (C_f) .
- 4- لتكن F الدالة المعرفة على \mathbb{R} بـ: $F(x) = -x + \ln(e^x - 2x)$.
- أ- بين أن F قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ، ثم احسب دالتها المشتقة الأولى.
- ب- استنتج مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على \mathbb{R} .
- ج- احسب بالسنتيمتر مربع مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات ذات المعادلات $x = 0; x = 2; y = 0$.