

Basic of Mathematics

이홍섭 선생님의 수학 기본서

개념원리[®]

..... 정답 및 풀이 미적분과 통계 기본

SINCE 1991

 **개념원리** 수학연구소

확인체크

I. 함수의 극한과 연속

1

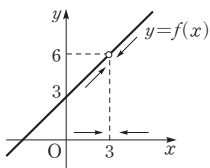
(1) $x \neq 3$ 일 때,

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = x + 3$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3} \text{의 그래프}$$

는 오른쪽 그림과 같이 x 의 값이 3에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 는 6에 수렴하므로

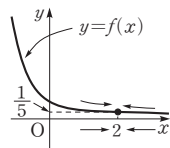
$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 3) = 6$$



(2) $f(x) = \frac{1}{x + 3}$ 의 그래프

에서 x 의 값이 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 는 $\frac{1}{5}$ 에 수렴하므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x + 3} = \frac{1}{5}$$



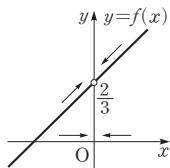
(3) $x \neq 0$ 일 때,

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{3x} = \frac{x + 2}{3}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{3x} \text{의 그래프}$$

프에서 x 의 값이 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 는 $\frac{2}{3}$ 에 수렴하므로

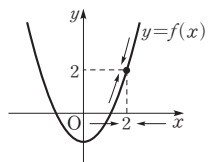
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x}{3x} = \frac{2}{3}$$



(4) $f(x) = x^2 - 2$ 의 그래프

에서 x 의 값이 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 는 2에 수렴하므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 2) = 2$$



(5) $x \neq 1$ 일 때,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^3 - 1}{x - 1} \\ &= \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} \\ &= x^2 + x + 1 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 3$$

답 (1) 6 (2) $\frac{1}{5}$ (3) $\frac{2}{3}$ (4) 2 (5) 3

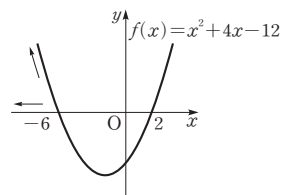
2

(1) 오른쪽 그림처럼

x 의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$ 의 값은

양수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

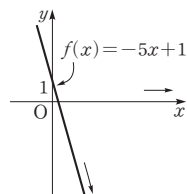
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 4x - 12) = \infty$$



(2) 오른쪽 그림처럼 x 의 값이

양수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$ 의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

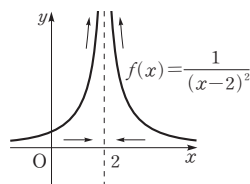
$$\lim_{x \rightarrow \infty} (-5x + 1) = -\infty$$



(3) $x \rightarrow 2$ 일 때, $f(x)$ 의

값이 양수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

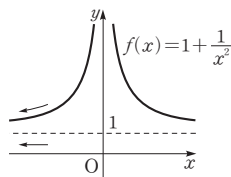
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x - 2)^2} = \infty$$



(4) $x \rightarrow -\infty$ 일 때,

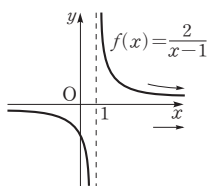
$f(x)$ 의 값은 1에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1$$



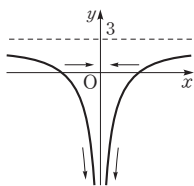
- (5) $x \rightarrow \infty$ 일 때, $f(x)$ 의 값은 0에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x-1} = 0$$



- (6) $x \rightarrow 0$ 일 때, $f(x)$ 의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(3 - \frac{1}{x^2}\right) = -\infty$$



- 답 (1) ∞ (2) $-\infty$ (3) ∞
(4) 1 (5) 0 (6) $-\infty$

3

- (1) $x \rightarrow 4+0$ 일 때, $x > 4$ 이므로 $[x] = 4$

$$\lim_{x \rightarrow 4+0} ([x] - 4) = 0, \lim_{x \rightarrow 4+0} (x - 4) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 4+0} \frac{[x] - 4}{x - 4} = 0$$

- (2) $x \rightarrow 4-0$ 일 때, $x < 4$ 이므로 $[x] = 3$

$$\lim_{x \rightarrow 4-0} ([x] - 4) = -1, \lim_{x \rightarrow 4-0} (x - 4) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 4-0} \frac{[x] - 4}{x - 4} = -\infty$$

($\because x \rightarrow 4-0$ 일 때 $x - 4 < 0$)

- (3) $x \rightarrow -2+0$ 일 때, $x > -2$ 이므로 $x + 2 > 0$

$$\text{또, } \lim_{x \rightarrow -2+0} (x - 2) = -4$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{x - 2}{x + 2} = -\infty$$

- (4) $x \rightarrow 3-0$ 일 때, $x < 3$ 이므로

$$|x - 3| = -(x - 3)$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{x(x-3)}{-(x-3)} \\ = \lim_{x \rightarrow 3-0} (-x) = -3 \end{aligned}$$

- (5) $0 \leq x < 1$ 일 때, $[x] = 0$, $[x - 1] = -1$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow +0} \frac{[x - 1]}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-1}{x - 1} = 1$$

- (6) $-1 \leq x < 0$ 일 때, $[x] = -1$, $[x + 1] = 0$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -0} \frac{[x + 1]}{x + 1} = 0$$

4

- 답 (1) 0 (2) ∞ (3) $-\infty$
(4) -3 (5) 1 (6) 0

$$(1) \text{ (주어진 식)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(6+5x)}{x(2-3x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6+5x}{2-3x} = 3$$

$$(2) \text{ (주어진 식)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(2x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

- (3) (주어진 식)

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x+1}+1)$$

$$= \sqrt{0+1}+1=2$$

- (4) (주어진 식)

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x-1)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-x+1}{(x-1)^2} = \frac{3}{4}$$

- (5) (주어진 식)

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x+1})}{(\sqrt[3]{x+1})(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x+1})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x+1})}{x+1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} (\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x+1}) = 3$$

- (6) (주어진 식)

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)(x+\sqrt{3x-2})}{(x-\sqrt{3x-2})(\sqrt{x+2}+2)(x+\sqrt{3x-2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2-4)(x+\sqrt{3x-2})}{(x^2-3x+2)(\sqrt{x+2}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+\sqrt{3x-2})}{(x-2)(x-1)(\sqrt{x+2}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+\sqrt{3x-2}}{(x-1)(\sqrt{x+2}+2)} = 1$$

- 답 (1) 3 (2) $\frac{1}{2}$ (3) 2

- (4) $\frac{3}{4}$ (5) 3 (6) 1

5

$$(1) \text{ (주어진 식)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{3 + \frac{2}{x^2}} = \frac{1}{3}$$

$$(2) \text{ (주어진 식)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{x} - \frac{7}{x^2}}{4 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} = 0$$

$$(3) \text{ (주어진 식)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\frac{2}{x} - 1} = \frac{\infty}{0 - 1} = -\infty$$

$$(4) \text{ (주어진 식)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}} + 1} = \frac{1}{2}$$

(5) $x = -t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned} \text{(주어진 식)} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 + 2t}{\sqrt{4t^2 + 1} + \sqrt{t^2 - 1}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{t} + 2}{\sqrt{4 + \frac{1}{t^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{t^2}}} \\ &= \frac{2}{2 + 1} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

답 (1) $\frac{1}{3}$ (2) 0 (3) $-\infty$ (4) $\frac{1}{2}$ (5) $\frac{2}{3}$

6

(1) (주어진 식)

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} x^4 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^4} \right) = \infty$$

(2) (주어진 식)

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{4x^2 + 3x - 1} - 2x)(\sqrt{4x^2 + 3x - 1} + 2x)}{\sqrt{4x^2 + 3x - 1} + 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 1}{\sqrt{4x^2 + 3x - 1} + 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{1}{x}}{\sqrt{4 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}} + 2} \\ &= \frac{3 - 0}{\sqrt{4 + 0 - 0} + 2} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

(3) (주어진 식)

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{(x+1)^2 - 1}{(x+1)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{(x+1)^2} \\ &= \frac{0+2}{(0+1)^2} = 2 \end{aligned}$$

(4) (주어진 식)

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{\sqrt{3} - (\sqrt{3} - x)}{\sqrt{3}(\sqrt{3} - x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\sqrt{3}(\sqrt{3} - x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3 - \sqrt{3}x} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

답 (1) ∞ (2) $\frac{3}{4}$ (3) 2 (4) $\frac{1}{3}$

7

$$\begin{aligned} (1) \text{ (주어진 식)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x^2 + ax + a^2)}{(x-a)(x+a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 + ax + a^2}{x+a} = \frac{3a^2}{2a} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{3a^2}{2a} = 3 \quad \therefore a = 2$$

(2) $x \rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + ax + b) = 0 \text{이므로}$$

$$1 - a + b = 0 \quad \therefore b = a - 1$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{(주어진 식)} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x+a-1)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} (x+a-1) \\ &= a - 2 = 2 \end{aligned}$$

$$\therefore a = 4, b = 3$$

(3) $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2} (a\sqrt{x-1} + b) = 0 \text{이므로}$$

$$a + b = 0 \quad \therefore b = -a$$

$$\begin{aligned}\therefore (\text{주어진 식}) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a\sqrt{x-1}-a}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a(\sqrt{x-1}-1)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a}{\sqrt{x-1}+1} \\ &= \frac{a}{2} = 1\end{aligned}$$

$$\therefore a=2, b=-2$$

$$\text{답 (1) } a=2 \quad (2) \ a=4, b=3$$

$$(3) \ a=2, b=-2$$

8

$f(x)=ax^2+bx+c$ 라고 하면

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2+1} = 2 \text{에서 } a=2$$

$$\text{또, } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2+bx+c}{x^2-1} = -1 \text{에서 } x \rightarrow 1 \text{일 때}$$

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} (2x^2+bx+c) = 0$$

$$2+b+c=0 \quad \therefore c=-b-2$$

$$\begin{aligned}\therefore f(x) &= 2x^2+bx-b-2 \\ &= (x-1)(2x+b+2)\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(2x+b+2)}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+b+2}{x+1}$$

$$= \frac{2+b+2}{2} = -1$$

$$\therefore b=-6, c=4$$

따라서 $f(x)=2x^2-6x+4$ 이므로

$$f(2)=8-12+4=0$$

답 0

9

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)-2x^3}{x^2} = 2 \text{에서} \quad \leftarrow \frac{\infty}{\infty} \text{ 꼴}$$

$$f(x)-2x^3=2x^2+ax+b$$

$$\therefore f(x)=2x^3+2x^2+ax+b$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3+2x^2+ax+b}{x} = -3$$

그런데 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2x^3+2x^2+ax+b) = 0$$

$$\therefore b=0$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3+2x^2+ax}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} (2x^2+2x+a) \\ &= -3\end{aligned}$$

$$\therefore a=-3$$

$$\therefore f(x)=2x^3+2x^2-3x$$

$$\text{답 } f(x)=2x^3+2x^2-3x$$

10

(1) $0 \leq |\cos x| \leq 1$ 이므로

$$0 \leq \frac{|\cos x|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|}$$

$$\text{즉, } 0 \leq \left| \frac{\cos x}{x} \right| \leq \left| \frac{1}{x} \right|$$

그런데 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{x} \right| = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{\cos x}{x} \right| = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{x} = 0$$

(2) $0 \leq \left| \cos \frac{1}{x} \right| \leq 1$ 이므로

$$0 \leq |x| \left| \cos \frac{1}{x} \right| \leq |x|$$

$$\text{즉, } 0 \leq \left| x \cos \frac{1}{x} \right| \leq |x|$$

그런데 $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| x \cos \frac{1}{x} \right| = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} = 0$$

(3) $0 \leq \left| \cos \frac{1}{x} \right| \leq 1$ 이므로

$$0 \leq |\sin x| \left| \cos \frac{1}{x} \right| \leq |\sin x|$$

$$\text{즉, } 0 \leq \left| \sin x \cos \frac{1}{x} \right| \leq |\sin x|$$

그런데 $\lim_{x \rightarrow 0} |\sin x| = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \sin x \cos \frac{1}{x} \right| = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cos \frac{1}{x} = 0$$

(4) $0 \leq \left| \sin \frac{1}{x^2} \right| \leq 1$ 이므로

$$0 \leq |x|^2 \left| \sin \frac{1}{x^2} \right| \leq |x|^2$$

$$\text{즉, } 0 \leq \left| x^2 \sin \frac{1}{x^2} \right| \leq |x|^2$$

그런데 $\lim_{x \rightarrow 0} |x|^2 = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| x^2 \sin \frac{1}{x^2} \right| = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x^2} = 0$$

답 (1) 0 (2) 0 (3) 0 (4) 0

다른풀이

(1) $x \rightarrow \infty$ 이므로 $x > 0$ 이고

$-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

그런데 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{x} = 0$$

11

(1) 분수함수는 분모가 0인 점, 즉 $x = \pm 3$ 에서 불연속이다.

따라서 연속인 구간은

$$(-\infty, -3), (-3, 3), (3, \infty)$$

(2) $4 - x^2 < 0$ 일 때 주어진 함수는 정의되지 않으므로 $x < -2$, $x > 2$ 에서 불연속이고 $-2 \leq x \leq 2$ 에서 연속이다.

따라서 연속인 구간은 $[-2, 2]$ 이다.

(3) 모든 실수에서 연속이므로 연속인 구간은

$$(-\infty, \infty)$$

답 (1) $(-\infty, -3), (-3, 3), (3, \infty)$

(2) $[-2, 2]$ (3) $(-\infty, \infty)$

12

(i) $x=2$ 에서 함숫값 $f(2)=2$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$$

$$\therefore f(2) \neq \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 불연속이다.

답 $x=2$ 에서 불연속

13

$x \neq -1, 2$ 일 때,

$$f(x) = \frac{x^4 + ax + b}{x^2 - x - 2} = \frac{x^4 + ax + b}{(x+1)(x-2)}$$

$f(x)$ 는 $x = -1, x = 2$ 에서 연속이므로

$x = -1, x = 2$ 일 때 극한값이 존재해야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x^4 + ax + b) = 0$$

$$\therefore 1 - a + b = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^4 + ax + b) = 0$$

$$\therefore 16 + 2a + b = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에서 $a = -5, b = -6$

$$\therefore f(x) = \frac{x^4 - 5x - 6}{(x+1)(x-2)}$$

$$= \frac{(x+1)(x-2)(x^2 + x + 3)}{(x+1)(x-2)}$$

$$= x^2 + x + 3$$

$$\therefore f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x + 3) = 9$$

답 9

14

함수 $f(x)$ 가 $x = -1$ 에서 연속하려면

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) \text{ 이어야 하므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2ax + b}{x + 1} = 2$$

$x \rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 2ax + b) = 1 - 2a + b = 0$$

$$\therefore b = 2a - 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2ax + b}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2ax + 2a - 1}{x + 1}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-1+2a)}{x+1} \\
 &= -2+2a \\
 \therefore -2+2a &= 2 \quad \therefore a=2, b=3 \\
 \therefore a-b &= 2-3 = -1 \quad \text{답 } -1
 \end{aligned}$$

15

- (i) $|x| > 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = \infty$ 이므로 분모, 분자를 각각 x^{2n} 으로 나누면

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x+1+\frac{1}{x^{2n}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}} \\
 &= \frac{x+1+0}{1+0} = x+1
 \end{aligned}$$

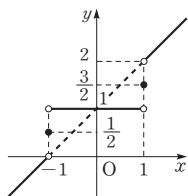
- (ii) $|x| < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = 0$ 이므로 $f(x) = 1$

- (iii) $x = 1$ 일 때, $f(x) = \frac{1+1+1}{1+1} = \frac{3}{2}$

- (iv) $x = -1$ 일 때,

$$f(x) = \frac{-1+1+1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

따라서 $y=f(x)$ 의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같고 $x = \pm 1$ 에서 불연속이다.



답 풀이 참조

16

- (i) $|x| < 1$ 일 때, $f(x) = 2x+a$

- (ii) $|x| > 1$ 일 때,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + \frac{2}{x^{n-2}} + \frac{a}{x^{n-1}}}{1 + \frac{1}{x^{n-1}}} = x$$

- (iii) $x = 1$ 일 때, $f(1) = \frac{3+a}{2}$

$x = 1$ 에서 연속이 되려면

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} (2x+a) = \lim_{x \rightarrow 1+0} x = f(1)$$

$$2+a = 1 = \frac{3+a}{2}$$

$$\therefore a = -1$$

답 -1

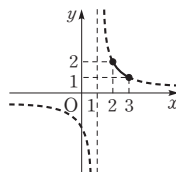
17

- (1) $f(x) = \frac{2}{x-1}$ 의 그래프는

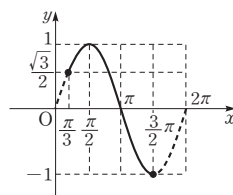
오른쪽 그림과 같고, 닫힌 구간 $[2, 3]$ 에서 연속이다.

또, $f(2) = 2, f(3) = 1$ 이므로

$x = 2$ 일 때 최댓값 2, $x = 3$ 일 때 최솟값 1을 갖는다.



- (2) $f(x) = \sin x$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 닫힌 구간 $[\frac{\pi}{3}, \frac{3}{2}\pi]$ 에서 연속이다.



따라서 $x = \frac{\pi}{2}$ 일 때 최댓값 1, $x = \frac{3}{2}\pi$ 일 때 최솟값 -1을 갖는다.

답 (1) 최댓값 : 2, 최솟값 : 1

(2) 최댓값 : 1, 최솟값 : -1

18

- (1) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 1$ 로 놓으면 $f(x)$ 는 다항함수 이므로 구간 $[2, 3]$ 에서 연속이고

$$f(2) = -1 < 0, f(3) = 8 > 0$$

따라서 $f(2)f(3) < 0$ 이므로 중간값의 정리에 의하여 $f(x) = 0$ 은 구간 $(2, 3)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

- (2) $f(x) = \sin x - x \cos x$ 로 놓으면 $\sin x, x, \cos x$ 는 모두 연속함수이므로 $f(x)$ 는 구간 $[\pi, \frac{3}{2}\pi]$ 에서 연속이고

$$f(\pi) = \sin \pi - \pi \cos \pi = \pi > 0,$$

$$f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \sin \frac{3}{2}\pi - \frac{3}{2}\pi \cos \frac{3}{2}\pi = -1 < 0$$

따라서 $f(\pi)f\left(\frac{3}{2}\pi\right) < 0$ 이므로 중간값의 정리에 의하여 $f(x) = 0$ 은 구간 $(\pi, \frac{3}{2}\pi)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

답 풀이 참조

II. 다항함수의 미분법

19

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{(a+\Delta x)^2 + (a+\Delta x) + 1\} - (a^2 + a + 1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2 + 2a\Delta x + \Delta x}{\Delta x} = 2a + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} \\ &= \frac{(9 + 3 + 1) - (1 + 1 + 1)}{2} \\ &= \frac{10}{2} = 5 \end{aligned}$$

$$\therefore 2a + 1 = 5 \quad \therefore a = 2$$

답 2

20

$f(x) = -x^2 + x$ 위의 점 $(-2, -6)$ 에서의 접선의 기울기는 $x = -2$ 에서의 미분계수와 같으므로

$$\begin{aligned} f'(-2) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-2+\Delta x) - f(-2)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-(-2+\Delta x)^2 + (-2+\Delta x) - (-4-2)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4\Delta x - (\Delta x)^2 + \Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (5 - \Delta x) = 5 \end{aligned}$$

따라서 접선의 기울기는 5이다.

답 5

21

$$\begin{aligned} (1) \text{ (주어진 식)} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h^2) - f(a)}{h^2} \cdot h \\ &= f'(a) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} h = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \text{ (주어진 식)} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-3h) - f(a)}{-3h} \cdot (-3) \\ &= -3f'(a) \\ &= -3 \times 2 = -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \text{ (주어진 식)} &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - f(a-h) + f(a)}{h} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \frac{f(a-h) - f(a)}{-h} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \{ f'(a) + f'(a) \} \\ &= \frac{4}{2} = 2 \end{aligned}$$

답 (1) 0 (2) -6 (3) 2

22

$$\begin{aligned} \text{(주어진 식)} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{f(x) - f(2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\frac{f(x) - f(2)}{x-2}} \cdot (x^2+2x+4) \\ &= \frac{1}{f'(2)} \lim_{x \rightarrow 2} (x^2+2x+4) \\ &= \frac{1}{3} (4+4+4) \\ &= \frac{12}{3} = 4 \end{aligned}$$

답 4

23

공식을 이용하면

$$2f'(2) - f(2) = 2 \times 1 - 3 = -1 \quad \text{답 } -1$$

24

$$\begin{aligned} \text{(주어진 식)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 f(1) - f(1) - f(x^2) + f(1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2-1)f(1)}{x-1} \\ &\quad - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2) - f(1)}{x^2-1} \cdot (x+1) \\ &= 2f(1) - 2f'(1) \\ &= 2 \times 2 - 2 \times 4 \\ &= -4 \end{aligned}$$

답 -4

25

$$(1) f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h}$$

여기서

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{h}{h} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow -0} \frac{-h}{h} = -1$$

이므로 $f'(1)$ 의 값이 존재하지 않는다.

따라서 $x=1$ 에서 미분가능하지 않다.

$$(2) f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|(1+h)^2 - 1|}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h^2 + 2h|}{h}$$

여기서

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{h(h+2)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} (h+2) = 2$$

$$\lim_{h \rightarrow -0} \frac{-h(h+2)}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} -(h+2) = -2$$

이므로 $f'(1)$ 의 값이 존재하지 않는다.

따라서 $x=1$ 에서 미분가능하지 않다.

$$(3) f(x) = x^2 \text{에서}$$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{(1+h)^2 - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow +0} (h+2) = 2$$

$f(x) = 2x - 1$ 에서

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow -0} \frac{2(1+h) - 1 - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow -0} 2 = 2$$

이므로 $f'(1)$ 의 값이 존재한다.

따라서 $x=1$ 에서 미분가능하다.

답 (1) $x=1$ 에서 미분가능하지 않다.

(2) $x=1$ 에서 미분가능하지 않다.

(3) $x=1$ 에서 미분가능하다.

26

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} x|x| \\ &= 0 \\ &= f(0) \end{aligned}$$

따라서 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

또한,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h|h|}{h} \text{에서}$$

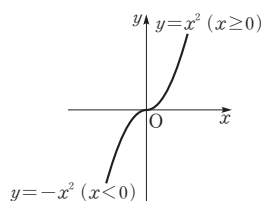
$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{h|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} h = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow -0} \frac{h|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{-h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} (-h) = 0$$

이므로 $f'(0)$ 의 값이 존재한다.

따라서 $x=0$ 에서 미분가능하다.

답 $x=0$ 에서 연속이고 미분가능하다.



27

$$\begin{aligned} (1) y' &= (x+1)'(2x+3)(3x-1) \\ &\quad + (x+1)(2x+3)'(3x-1) \\ &\quad + (x+1)(2x+3)(3x-1)' \\ &= 1 \cdot (2x+3)(3x-1) + (x+1) \cdot 2 \cdot (3x-1) \\ &\quad + (x+1)(2x+3) \cdot 3 \\ &= (6x^2 + 7x - 3) + (6x^2 + 4x - 2) \\ &\quad + (6x^2 + 15x + 9) \\ &= 18x^2 + 26x + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) y' &= 5(2x^3 + x^2 - 2)^4(2x^3 + x^2 - 2)' \\ &= 5(2x^3 + x^2 - 2)^4(6x^2 + 2x) \\ &= 10(3x^2 + x)(2x^3 + x^2 - 2)^4 \\ &= 10x(3x+1)(2x^3 + x^2 - 2)^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) y' &= (x^3 + 2x)'(5 - 2x) + (x^3 + 2x)(5 - 2x)' \\ &= (3x^2 + 2)(5 - 2x) + (x^3 + 2x) \cdot (-2) \\ &= -8x^3 + 15x^2 - 8x + 10 \end{aligned}$$

답 (1) $18x^2 + 26x + 4$

(2) $10x(3x+1)(2x^3 + x^2 - 2)^4$

(3) $-8x^3 + 15x^2 - 8x + 10$

참고 (1), (3)에서 식을 전개한 다음 도함수를 구할 수도 있다.

28

$$f(x) = (x+2)(x^2-3x+4) \text{에서}$$

$$f'(x) = x^2-3x+4 + (x+2)(2x-3)$$

$$\therefore f'(1) = 1-3+4 + (1+2)(2-3)$$

$$= -1 \quad \text{답 } -1$$

29

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{에서}$$

$$f'(x) = 2ax + b$$

$$f'(1) = 2a + b = -4 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$f'(-1) = -2a + b = 8 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } a = -3, b = 2$$

$$f(0) = c = 5$$

$$\therefore a = -3, b = 2, c = 5$$

$$\text{답 } a = -3, b = 2, c = 5$$

30

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{로 놓으면}$$

$$f'(x) = 2ax + b$$

이것을 주어진 식에 대입하여 정리하면

$$2(a-b)x + b - 4c + 3 = 0$$

이 등식은 임의의 x 에 대하여 성립하므로

$$a - b = 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$b - 4c + 3 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$f(-1) = 1 \text{에서 } a - b + c = 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}, \textcircled{㉢} \text{에서 } a = 1, b = 1, c = 1$$

$$\therefore f(x) = x^2 + x + 1$$

$$\text{답 } f(x) = x^2 + x + 1$$

31

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2) = 5 \text{에서}$$

$$f'(2) = 12 + 4a + b = 5$$

$$\therefore 4a + b = -7 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\text{또, } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{f(x) - f(1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{f(x) - f(1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}}$$

$$= \frac{3}{f'(1)} = -\frac{3}{2}$$

$$\therefore f'(1) = -2$$

$$f'(1) = 3 + 2a + b = -2$$

$$\therefore 2a + b = -5 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } a = -1, b = -3$$

$$\therefore a + b = -4 \quad \text{답 } -4$$

32

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 1 \text{에서 } f'(1) = -1$$

$$\therefore (\text{주어진 식}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$+ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{-h}$$

$$= f'(1) + f'(1)$$

$$= 2f'(1)$$

$$= 2 \cdot (-1) = -2 \quad \text{답 } -2$$

33

$$f(x) = x^n + 2x \text{로 놓으면 } f(1) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n + 2x - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$= f'(1) = 12$$

$$f'(x) = nx^{n-1} + 2 \text{이므로 } f'(1) = n + 2$$

$$\text{즉, } n + 2 = 12 \quad \therefore n = 10 \quad \text{답 } 10$$

34

(i) $x=1$ 에서 연속이므로

$$a = (1-2)^2 + b$$

$$\therefore a = 1 + b$$

(ii) $f(x) = ax^2$ 에서 $f'(x) = 2ax$, $f'(1) = 2a$

$$f(x) = (x-2)^2 + b \text{에서 } f'(x) = 2(x-2)$$

$$f'(1) = -2$$

$$\therefore 2a = -2$$

$$\therefore a = -1, b = -2$$

$$\text{답 } a = -1, b = -2$$

35

$f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 미분가능하려면 $x=1$ 에서 미분가능해야 한다.

$g(x)=x^3+ax^2+bx$, $h(x)=2x^2+1$ 로 놓으면 $x=1$ 에서 연속이므로 $g(1)=h(1)$

$$1+a+b=3 \quad \therefore a+b=2 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

또, $x=1$ 에서 미분계수가 존재해야 하므로

$$g'(1)=h'(1)$$

$$g'(x)=3x^2+2ax+b, \quad h'(x)=4x \text{에서}$$

$$3+2a+b=4 \quad \therefore 2a+b=1 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에서 $a=-1, b=3$

$$\therefore ab=-3 \quad \text{답 } -3$$

36

몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ 라고 하면

$$x^{100}-2x^3+4=(x-1)^2Q(x)+ax+b \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$1-2+4=a+b \quad \therefore a+b=3$$

$\textcircled{㉠}$ 의 양변을 x 에 관하여 미분하면

$$100x^{99}-6x^2=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+a$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$100-6=a \quad \therefore a=94, b=-91$$

따라서 구하는 나머지는 $94x-91$

$$\text{답 } 94x-91$$

다른풀이 $x^{100}-2x^3+4$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나눌 때 나머지는 $f'(1)(x-1)+f(1)$

$$f'(x)=100x^{99}-6x^2 \text{에서}$$

$$f'(1)=100-6=94, \quad f(1)=1-2+4=3$$

따라서 구하는 나머지는 $94(x-1)+3=94x-91$

37

몫을 $Q(x)$ 라고 하면

$$x^{20}-ax+b=(x-1)^2Q(x) \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$1-a+b=0 \quad \therefore a-b=1$$

$\textcircled{㉠}$ 의 양변을 x 에 관하여 미분하면

$$20x^{19}-a=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$20-a=0 \quad \therefore a=20, b=19$$

$$\therefore a+b=39$$

답 39

다른풀이 $f(x)=x^{20}-ax+b$ 가 $(x-1)^2$ 으로 나누어 떨어지므로

$$f'(1)=0, f(1)=0$$

$$f'(x)=20x^{19}-a \text{에서 } f'(1)=20-a=0$$

$$\therefore a=20$$

$$f(1)=1-a+b=0 \text{에서 } b=19$$

$$\therefore a+b=20+19=39$$

38

$f(x)$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ 로 놓으면

$$f(x)=(x-1)^2Q(x)+ax+b$$

$$\therefore f(x)-ax-b=(x-1)^2Q(x)$$

좌변을 $g(x)=f(x)-ax-b$ 라고 하면 $g(x)$ 는 $(x-1)^2$ 으로 나누어 떨어지므로

$$g(1)=f(1)-a-b=0$$

$$f(1)=2 \text{이므로 } a+b=2 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$g'(x)=f'(x)-a \text{에서 } g'(1)=f'(1)-a=0$$

$$f'(1)=3 \text{이므로 } a=3 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에서 $a=3, b=-1$

따라서 구하는 나머지는 $3x-1$ 이다.

$$\text{답 } 3x-1$$

다른풀이 $f(x)$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지는

$$f'(1)(x-1)+f(1)=3(x-1)+2$$

$$=3x-1$$

39

$f(x)=x^3+ax^2+bx$ 로 놓으면

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

$y=f(x)$ 는 점 $(1, 5)$ 를 지나므로

$$1+a+b=5 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$x=-1$ 인 점에서의 접선의 기울기가 1이므로

$$f'(-1)=3-2a+b=1 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에서 $a=2, b=2$

$$\text{답 } a=2, b=2$$

40

$f(x)=x^3$ 으로 놓으면 $f'(x)=3x^2$

$x=-1, y=-1$ 을 곡선 $y=x^3$ 에 대입하면 만족시키므로 점 $(-1, -1)$ 은 곡선 위의 점이다.

$x=-1$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=3$

따라서 기울기가 3이고, 점 $(-1, -1)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y+1=3(x+1)$$

$$\therefore y=3x+2$$

$$\text{답 } y=3x+2$$

41

$f(x)=(x-1)(x^2+2)$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2+2+(x-1) \cdot 2x \\ &= 3x^2-2x+2 \end{aligned}$$

$(x-1)(x^2+2)=0$ 에서 $x=1$

따라서 x 축과의 교점의 좌표는 $(1, 0)$ 이다.

$x=1$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=3$

따라서 접선의 방정식은 $y=3(x-1)$

$$\therefore y=3x-3$$

$$\text{답 } y=3x-3$$

42

$f(x)=x^3-x+1$ 로 놓으면 $f'(x)=3x^2-1$

$x=1$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=2$

수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$ 이므로 구하는 직선의

방정식은

$$y-1=-\frac{1}{2}(x-1)$$

$$\therefore y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$$

$$\text{답 } y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$$

43

$f(x)=x^3+ax^2+(2a+1)x+a+5$ 로 놓으면

$$f'(x)=3x^2+2ax+2a+1$$

a 의 값에 관계없이 한 정점을 지나므로 a 에 관하여 정리하면

$$a(x+1)^2+x^3+x+5-y=0$$

$$\therefore (x+1)^2=0, x^3+x+5-y=0$$

$$\therefore x=-1, y=3$$

따라서 정점의 좌표는 $(-1, 3)$ 이다.

$x=-1$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=4$

따라서 접선의 방정식은 $y=4(x+1)+3$

$$\therefore y=4x+7$$

$$\text{답 } y=4x+7$$

44

기울기는 $\tan 45^\circ=1$ 이므로

$$y'=2x=1 \quad \therefore x=\frac{1}{2}$$

$$x=\frac{1}{2} \text{ 일 때, } y=\frac{1}{4}$$

따라서 점점의 좌표는 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y-\frac{1}{4}=x-\frac{1}{2}$$

$$\therefore y=x-\frac{1}{4}$$

$$\text{답 } y=x-\frac{1}{4}$$

45

직선 $y=x+4$ 에 평행하므로 기울기는 1이다.

$$y'=-2x=1 \quad \therefore x=-\frac{1}{2}$$

$$x=-\frac{1}{2} \text{ 일 때, } y=\frac{3}{4} \text{ 이므로 점 } (-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \text{ 을 지나고}$$

기울기가 1인 직선의 방정식은

$$y-\frac{3}{4}=x+\frac{1}{2}$$

$$\therefore y=x+\frac{5}{4}$$

$$\text{답 } y=x+\frac{5}{4}$$

46

$f(x)=x^3-11x+2$ 로 놓으면 $f'(x)=3x^2-11$

한편, 직선 $x-8y+3=0$ 에 수직인 직선의 기울기는 -8 이므로

$$3x^2-11=-8 \text{ 에서 } x^2=1 \quad \therefore x=\pm 1$$

$$x=1 \text{ 일 때, } y=-8, \quad x=-1 \text{ 일 때, } y=12$$

따라서 점점의 좌표는 $(1, -8), (-1, 12)$ 이므로

구하는 직선의 방정식은

$$y+8=-8(x-1) \text{ 또는 } y-12=-8(x+1)$$

$$\therefore y=-8x \text{ 또는 } y=-8x+4$$

$$\text{답 } y=-8x \text{ 또는 } y=-8x+4$$

47

$f(x)=x^3-2x$ 로 놓으면 $f'(x)=3x^2-2$

접점의 x 좌표를 t 라고 하면 접점의 좌표는 (t, t^3-2t)

이때 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-2$

따라서 접선의 방정식은

$$y-(t^3-2t)=(3t^2-2)(x-t) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점 $(0, 2)$ 를 지나므로

$$2-(t^3-2t)=(3t^2-2)(0-t)$$

$$t^3+1=0 \quad \therefore t=-1$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$y=x+2 \quad \text{답 } y=x+2$$

48

$f(x)=x^3$ 으로 놓으면 $f'(x)=3x^2$

접점을 (t, t^3) 으로 놓으면 접선의 기울기는

$$f'(t)=3t^2$$

따라서 접선의 방정식은 $y-t^3=3t^2(x-t) \quad \dots\dots \textcircled{1}$

점 $(1, 0)$ 을 지나므로 $0-t^3=3t^2(1-t)$

$$2t^3-3t^2=0, t^2(2t-3)=0$$

$$\therefore t=0 \text{ 또는 } t=\frac{3}{2}$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$y=0 \text{ 또는 } y=\frac{27}{4}(x-1)$$

따라서 나머지 접선의 방정식은

$$y=\frac{27}{4}(x-1) \quad \text{답 } y=\frac{27}{4}(x-1)$$

49

$f(x)=\frac{1}{4}x^4+3$ 으로 놓으면 $f'(x)=x^3$

접점 P를 $P(t, \frac{1}{4}t^4+3)$ 으로 놓으면 접선의 기울기는

$$f'(t)=t^3$$

따라서 접선의 방정식은 $y-(\frac{1}{4}t^4+3)=t^3(x-t)$

이 직선이 원점을 지나므로

$$0-(\frac{1}{4}t^4+3)=t^3(0-t)$$

$$\frac{3}{4}t^4=3, t^4=4 \quad \therefore t=\pm\sqrt{2}$$

따라서 접점의 좌표는 $P(\sqrt{2}, 4), P(-\sqrt{2}, 4)$ 이다.

그러므로 \overline{OP} 의 길이는

$$\sqrt{(\sqrt{2})^2+4^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2} \quad \text{답 } 3\sqrt{2}$$

50

$f(x)=x^3$ 으로 놓으면 $f'(x)=3x^2$

접점을 (t, t^3) 으로 놓으면 접선의 기울기는

$$f'(t)=3t^2$$

따라서 접선의 방정식은 $y-t^3=3t^2(x-t)$

$$\therefore y=3t^2x-2t^3$$

이 식은 주어진 식 $y=ax+2$ 와 일치하므로

$$-2t^3=2 \quad \therefore t=-1$$

$$3t^2=a \quad \therefore a=3 \quad \text{답 } 3$$

51

$f(x)=x^3+ax$ 로 놓으면 $f'(x)=3x^2+a$

(i) $x=1$ 에서의 y 의 값이 서로 같으므로

$$1+a=6+b$$

$$\therefore a-b=5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) $x=1$ 에서의 기울기가 서로 같으므로

$$f'(1)=3+a=6 \quad \therefore a=3$$

$\textcircled{1}$ 에 $a=3$ 을 대입하면 $b=-2$

$$\therefore a+b=3+(-2)=1 \quad \text{답 } 1$$

52

$f(x)=x^3+ax+3, g(x)=x^2+2$ 로 놓고 점 (p, q)

가 두 곡선의 접점이라고 할 때,

$$f(p)=g(p), f'(p)=g'(p)$$

$$\therefore p^3+ap+3=p^2+2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$3p^2+a=2p \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 p 에 관하여 정리하면

$$2p^3-p^2-1=0 \quad \therefore p=1$$

$\textcircled{2}$ 에 $p=1$ 을 대입하면 $a=-1$ 답 -1

53

$f'(x)=3x^2+a, g'(x)=2bx$

문제의 조건에서 $f(-1)=g(-1)=0$

$$-1-a=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$b+c=0$ ㉔
 또, $f'(-1)=g'(-1)$ 에서
 $3+a=-2b$ ㉕
 ㉑, ㉔, ㉕에서 $a=-1, b=-1, c=1$
 $\therefore a+b+c=-1$
 또, $f'(x)=3x^2-1$ 에서
 $f'(-1)=3-1=2$
 따라서 기울기는 2, 접점이 $(-1, 0)$ 이므로 공통접
 선은
 $y=2(x+1)=2x+2$
 답 $a+b+c=-1, y=2x+2$

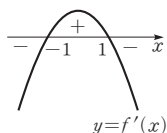
54

(1) $f'(x)=-3x^2+3=-3(x-1)(x+1)$
 $f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=1$
 이때 함수 $f(x)$ 의 증가·감소를 조사하면 다음
 과 같다.

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	\searrow	-6	\nearrow	-2	\searrow

따라서 함수 $f(x)$ 는 $-1 < x < 1$ 에서
 $f'(x) > 0$
 이므로 증가하고, $x < -1$ 또는 $x > 1$ 에서
 $f'(x) < 0$ 이므로 감소한다.

참고 $y=f'(x)$ 의 그래프
 를 그리면 오른쪽 그림과
 같다.

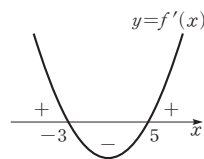


(2) $f'(x)=3x^2-6x-45=3(x-5)(x+3)$
 $f'(x)=0$ 에서 $x=-3$ 또는 $x=5$
 이때 함수 $f(x)$ 의 증가·감소를 조사하면 다음
 과 같다.

x	...	-3	...	5	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	\nearrow	75	\searrow	-181	\nearrow

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x < -3$ 또는 $x > 5$ 에서
 증가하고, $-3 < x < 5$ 에서 감소한다.

참고 $y=f'(x)$ 의 그래
 프를 그리면 오른쪽 그
 림과 같다.



답 (1) $-1 < x < 1$ 에서 증가
 $x < -1$ 또는 $x > 1$ 에서 감소
 (2) $x < -3$ 또는 $x > 5$ 에서 증가
 $-3 < x < 5$ 에서 감소

55

$f'(x)=3 \cdot 3(2x^2-4x+5)+3(3x-1)(4x-4)$
 $\therefore f'(1)=27 > 0$
 따라서 $x=1$ 에서 증가상태에 있다.

답 증가상태

56

$f'(x)=6x^2-6ax+6a-6$
 $=6(x-1)(x+1-a)$

에서 $f(x)$ 가 감소할 때는

$$6(x-1)(x+1-a) < 0 \quad \dots\dots ㉑$$

㉑의 해가 $1 < x < 5$ 이므로

$$(x-1)(x-5) < 0 \quad \dots\dots ㉒$$

㉑, ㉒이 일치하여야 하므로

$$x+1-a=x-5 \quad \therefore a=6 \quad \text{답 } 6$$

57

(1) 함수 $f(x)$ 가 증가함수이므로

$$f'(x)=x^2+2ax+(5a-4) \geq 0$$

$$\therefore \frac{D}{4}=a^2-(5a-4) \leq 0, a^2-5a+4 \leq 0$$

$$\therefore 1 \leq a \leq 4$$

(2) 함수 $f(x)$ 가 감소함수이므로

$$f'(x)=-3x^2+2ax-12 \leq 0$$

$$3x^2-2ax+12 \geq 0$$

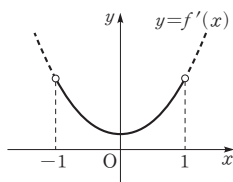
$$\therefore \frac{D}{4}=a^2-36 \leq 0$$

$$\therefore -6 \leq a \leq 6$$

답 (1) $1 \leq a \leq 4$ (2) $-6 \leq a \leq 6$

58

$f(x) = x^3 + kx + 1$ 에서 $f'(x) = 3x^2 + k$



함수 $f(x)$ 가 $-1 < x < 1$ 에서 증가하려면 $-1 < x < 1$ 에서 $f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로 위의 그림에서

$f'(0) = k \geq 0$

따라서 실수 k 의 최솟값은 0이다.

답 0

59

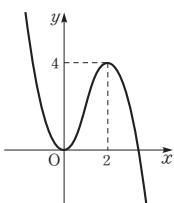
(1) $f(x) = x^2(3-x)$ 로 놓으면

$f'(x) = 6x - 3x^2$

$= 3x(2-x)$

$f'(x) = 0$ 에서

$x = 0$ 또는 $x = 2$



x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	\searrow	0	\nearrow	4	\searrow

\therefore 극솟값 : $f(0) = 0$

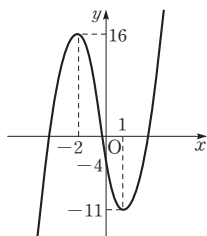
극댓값 : $f(2) = 4$

(2) $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$

$= 6(x+2)(x-1)$

$f'(x) = 0$ 에서

$x = -2$ 또는 $x = 1$



x	...	-2	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	\nearrow	16	\searrow	-11	\nearrow

\therefore 극솟값 : $f(1) = -11$

극댓값 : $f(-2) = 16$

답 풀이 참조

60

(1) $f'(x)$

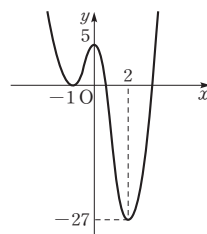
$= 12x^3 - 12x^2 - 24x$

$= 12x(x-2)(x+1)$

$f'(x) = 0$ 에서

$x = -1$ 또는 $x = 0$

또는 $x = 2$



x	...	-1	...	0	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	\searrow	0	\nearrow	5	\searrow	-27	\nearrow

\therefore 극솟값 : $f(-1) = 0, f(2) = -27$

극댓값 : $f(0) = 5$

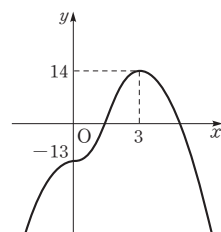
(2) $f'(x) = -4x^3 + 12x^2$

$= -4x^2(x-3)$

$f'(x) = 0$ 에서

$x = 0$ (중근)

또는 $x = 3$



x	...	0	...	3	...
$f'(x)$	+	0	+	0	-
$f(x)$	\nearrow	-13	\nearrow	14	\searrow

\therefore 극솟값 : 없다.

극댓값 : $f(3) = 14$

답 풀이 참조

61

$f(x) = x^3 - 3x + 1$ 로 놓으면

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$= 3(x-1)(x+1)$

$f'(x) = 0$ 에서

$x = -1$ 또는 $x = 1$

극댓값 : $f(-1) = 3$

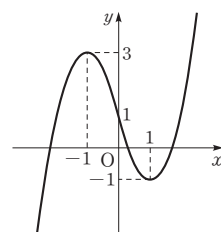
\therefore 극대점 : $(-1, 3)$

극솟값 : $f(1) = -1 \quad \therefore$ 극소점 : $(1, -1)$

따라서 두 점 사이의 거리는

$\sqrt{(1+1)^2 + (-1-3)^2} = 2\sqrt{5}$

답 $2\sqrt{5}$



62

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$x = -1, 3$ 에서 극값을 가지므로

$$f'(-1) = 3a - 2b + c = 0 \quad \cdots \text{㉠}$$

$$f'(3) = 27a + 6b + c = 0 \quad \cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서 $b = -3a, c = -9a$

$f(-1) - f(3) = 32$ 이므로

$$(-a + b - c + d) - (27a + 9b + 3c + d) = 32$$

$$32a = 32$$

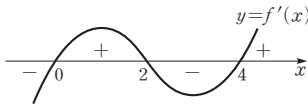
$$\therefore a = 1, b = -3, c = -9$$

$$\therefore a + b + c = -11 \quad \text{답 } -11$$

63

$f(x)$ 가 극대가 되는 x 의 값은 $f'(x) = 0$ 이 되는 x 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 +에서 -로 변하는 곳이다.

따라서 $x = 2$ 에서 극댓값을 갖는다.



답 2

64

$$f'(x) = 3x^2 + 2kx + 3 \text{에서}$$

$$\frac{D}{4} = k^2 - 9 > 0$$

$$\therefore k < -3 \text{ 또는 } k > 3 \quad \text{답 } k < -3 \text{ 또는 } k > 3$$

65

$$f'(x) = 3x^2 - 3(a-1)x - 3a$$

극값을 갖지 않으므로

$$D = 9(a-1)^2 + 36a \leq 0, 9(a+1)^2 \leq 0$$

$$\therefore a = -1 \quad \text{답 } -1$$

66

$$f'(x) = 3x^2 + 6kx - (3k+1)$$

$f(x)$ 가 $-1 < x < 1$ 에서 극댓값, 극솟값을 모두 가지므로

$$\frac{D}{4} = (3k)^2 + 3(3k+1) > 0$$

$$\therefore 3k^2 + 3k + 1 > 0$$

따라서 항상 성립한다. $\cdots \text{㉠}$

$$\text{대칭축은 } -\frac{6k}{6} = -k \text{이므로}$$

$$-1 < -k < 1 \text{에서 } -1 < k < 1 \quad \cdots \text{㉡}$$

$$f'(-1) = 3 - 6k - 3k - 1 > 0$$

$$\therefore k < \frac{2}{9} \quad \cdots \text{㉢}$$

$$f'(1) = 3 + 6k - 3k - 1 > 0$$

$$\therefore k > -\frac{2}{3} \quad \cdots \text{㉣}$$

$$\text{㉠, ㉡, ㉢, ㉣의 공통 범위는 } -\frac{2}{3} < k < \frac{2}{9}$$

$$\text{답 } -\frac{2}{3} < k < \frac{2}{9}$$

67

$$f'(x) = 3x^2 + 4ax - 4a^2$$

$f'(x) = 0$ 의 서로 다른 두 실근을 α, β ($\alpha < \beta$)라 하고 $-1 < \alpha < 1, \beta > 1$ 이 성립하도록 하는 a 의 값의 범위를 정하면

$$f'(-1) = 3 - 4a - 4a^2 > 0 \text{에서}$$

$$4a^2 + 4a - 3 < 0, (2a+3)(2a-1) < 0$$

$$\therefore -\frac{3}{2} < a < \frac{1}{2} \quad \cdots \text{㉠}$$

$$f'(1) = 3 + 4a - 4a^2 < 0 \text{에서}$$

$$4a^2 - 4a - 3 > 0, (2a+1)(2a-3) > 0$$

$$\therefore a < -\frac{1}{2} \text{ 또는 } a > \frac{3}{2} \quad \cdots \text{㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡의 공통 범위는 } -\frac{3}{2} < a < -\frac{1}{2}$$

$$\text{답 } -\frac{3}{2} < a < -\frac{1}{2}$$

68

$$f'(x) = 4x^3 + 4(a-1)x + 4a$$

$$= 4(x+1)(x^2 - x + a)$$

$f(x)$ 가 극댓값을 갖기 위해서는 $f'(x) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다. 그런데 $f'(x) = 0$ 의 한 근이 $x = -1$ 이므로 $x^2 - x + a = 0$ 이 -1 이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$a = -2$ 이면 $x^2 - x + a = 0$ 의 한 근이 -1 이므로
 $a \neq -2$

$$D = 1 - 4a > 0 \quad \therefore a < \frac{1}{4}$$

따라서 극댓값을 갖지 않을 a 의 값의 범위는

$$a \geq \frac{1}{4} \text{ 또는 } a = -2 \quad \text{답 } a \geq \frac{1}{4} \text{ 또는 } a = -2$$

다른풀이 $f'(x) = 4x^3 + 4(a-1)x + 4a$
 $= 4(x+1)(x^2 - x + a)$

사차함수 $f(x)$ 가 극댓값을 갖지 않으려면 방정식
 $f'(x) = 0$ 이 한 실근과 두 허근 또는 한 실근과 중근
(또는 삼중근)을 가져야 한다.

(i) $f'(x) = 4(x+1)(x^2 - x + a) = 0$ 이 한 실근과
두 허근을 갖는 경우는 $x^2 - x + a = 0$ 이 허근을
가져야 한다. 즉,

$$D = 1 - 4a < 0 \quad \therefore a > \frac{1}{4}$$

(ii) $f'(x) = 4(x+1)(x^2 - x + a) = 0$ 이 한 실근과
중근을 갖는 경우는 $x^2 - x + a = 0$ 이 $x = -1$ 을
근으로 가지면

$$1 + 1 + a = 0 \quad \therefore a = -2$$

$x^2 - x + a = 0$ 이 $x \neq -1$ 인 실수를 중근으로 가
지면

$$D = 1 - 4a = 0 \quad \therefore a = \frac{1}{4}$$

(i), (ii)에서 실수 a 의 값의 범위는

$$a \geq \frac{1}{4} \text{ 또는 } a = -2$$

69

$$f'(x) = 3x(4x^2 + ax + 4)$$

$f(x)$ 가 극댓값을 갖기 위해서는 $f'(x) = 0$ 이 서로
다른 세 실근을 가져야 하므로 $4x^2 + ax + 4 = 0$ 이 서
로 다른 두 실근을 가지면 된다. 즉,

$$a^2 - 64 > 0 \quad \therefore a < -8 \text{ 또는 } a > 8$$

따라서 극댓값을 갖지 않을 경우, 즉 극값을 하나만
가지는 경우는

$$-8 \leq a \leq 8$$

$$\therefore \text{최댓값 : 8, 최솟값 : -8}$$

$$\text{답 최댓값 : 8, 최솟값 : -8}$$

다른풀이 $f'(x) = 3x(4x^2 + ax + 4)$ 에서 $f(x)$ 가 극
값을 하나만 가지려면 $4x^2 + ax + 4 = 0$ 이 허근 또는
중근을 가지면 되므로

$$D = a^2 - 64 \leq 0, (a+8)(a-8) \leq 0$$

$$\therefore -8 \leq a \leq 8$$

70

(1) $f'(x) = -3x^2 + 6x + 9 = -3(x+1)(x-3)$
 $f'(x) = 0$ 에서 $x = -1$ 또는 $x = 3$ (부적당)

x	-2	...	-1	...	2
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	1	\searrow	-6	\nearrow	21

$$\therefore \text{최댓값 : } f(2) = 21$$

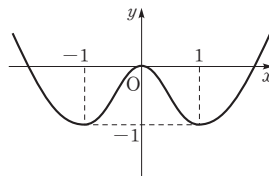
$$\text{최솟값 : } f(-1) = -6$$

(2) $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x+1)(x-1)$
 $f'(x) = 0$ 에서 $x = -1$ 또는 $x = 0$ 또는 $x = 1$

x	...	-1	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	\searrow	-1	\nearrow	0	\searrow	-1	\nearrow

$$\therefore \text{최댓값 : 없다.}$$

$$\text{최솟값 : } -1(x = \pm 1 \text{ 일 때})$$



$$\text{답 (1) 최댓값 : 21, 최솟값 : -6}$$

$$(2) \text{최댓값 : 없다., 최솟값 : -1}$$

71

$$f(x) = \sin x(1 - \sin^2 x) = -\sin^3 x + \sin x$$

여기서 $\sin x = t$ 라고 하면 $-1 \leq t \leq 1$

$$g(t) = -t^3 + t, \quad g'(t) = -3t^2 + 1$$

$$g'(t) = 0 \text{에서 } t = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9}, \quad g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

t	-1	...	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$...	$\frac{1}{\sqrt{3}}$...	1
$g'(t)$		-	0	+	0	-	
$g(t)$	0	\searrow	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	\nearrow	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	\searrow	0

$$\therefore \text{최댓값} : g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

$$\text{최솟값} : g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

$$\text{답 최댓값} : \frac{2\sqrt{3}}{9}, \text{최솟값} : -\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

72

$$2\log_2 x + \log_2 y = \log_2 x^2 y$$

$$x+2y=6 \text{에서 } y=3-\frac{1}{2}x$$

$$\log_2 x^2 y = \log_2 x^2 \left(3-\frac{1}{2}x\right) = \log_2 \left(3x^2 - \frac{1}{2}x^3\right)$$

$$\text{그런데 진수 조건에서 } x>0, 3-\frac{1}{2}x>0$$

$$\therefore 0<x<6$$

$$f(x) = 3x^2 - \frac{1}{2}x^3 \text{으로 놓으면}$$

$$f'(x) = 6x - \frac{3}{2}x^2 = 6x\left(1 - \frac{1}{4}x\right)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=4$$

증감표를 조사하면 $x=4$ 일 때, 극대이며 최대이다.

$$\text{최댓값은 } f(4) = 3 \times 4^2 - \frac{1}{2} \times 4^3 = 16$$

따라서 구하는 최댓값은

$$\log_2 16 = 4\log_2 2 = 4$$

답 4

73

$$f'(x) = 3ax^2 - 12ax = 3ax(x-4)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=4 \text{ (부적당)}$$

$a>0$ 이므로

x	-1	...	0	...	2
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-7a+b$	\nearrow	b	\searrow	$-16a+b$

$$\therefore \text{최댓값} : f(0) = b = 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\text{최솟값} : f(2) = -16a + b = -29 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } a=2, b=3$$

$$\therefore a+b=5$$

답 5

74

오른쪽 그림에서 D의 좌표를 (x, y) 라고 하면

$$\overline{AB} = 2-2x$$

따라서 직사각형의 넓이를 S 라고 하면

$$S = (2-2x) \cdot y$$

한편, $y=2x-x^2$ 이므로

$$S = (2-2x)(2x-x^2)$$

$$= 2x^3 - 6x^2 + 4x$$

$$S' = 6x^2 - 12x + 4 = 0 \text{에서}$$

$$x = \frac{3-\sqrt{3}}{3} \quad (\because 0 < x < 1)$$

증감표를 조사하면 S 는 $x = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$ 일 때, 극대이며

최대이다.

$$\therefore (\text{최대 넓이})$$

$$= 2\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)^3 - 6\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 4 \cdot \frac{3-\sqrt{3}}{3}$$

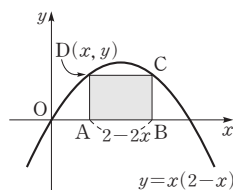
$$= \frac{4\sqrt{3}}{9}$$

$$\therefore (\text{가로의 길이}) = 2-2x$$

$$= 2-2 \times \frac{3-\sqrt{3}}{3}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{답 최대 넓이} : \frac{4\sqrt{3}}{9}, \text{가로의 길이} : \frac{2\sqrt{3}}{3}$$



75

$$(1) f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 5 \text{로 놓으면}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=1 \text{ 또는 } x=3$$

x	...	1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	\nearrow	-1	\searrow	-5	\nearrow

이 표를 이용하여 함수

$y=f(x)$ 의 그래프를 그리

면 오른쪽 그림과 같고

함수 $y=f(x)$ 의 그래프

가 x 축과 한 점에서 만나

므로 구하는 실근의 개수는 1개이다.

- (2) $f(x)=x^4+4x^3+5$ 로 놓으면

$$f'(x)=4x^3+12x^2=4x^2(x+3)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-3 \text{ 또는 } x=0$$

x	...	-3	...	0	...
$f'(x)$	-	0	+	0	+
$f(x)$	\searrow	-22	\nearrow	5	\nearrow

이 표를 이용하여 함수

$y=f(x)$ 의 그래프를 그리

면 오른쪽 그림과 같고 함

수 $y=f(x)$ 의 그래프가

x 축과 서로 다른 두 점에

서 만나므로 구하는 실근

의 개수는 2개이다.

참고 $f'(x)=0$ 이 중근을 갖는 x 의 값에서는 극값을 갖지 않으며 그 점에서 x 축에 평행한 접선을 가짐을 알 수 있다.

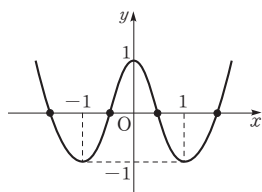
- (3) $f(x)=2x^4-4x^2+1$ 로 놓으면

$$f'(x)=8x^3-8x$$

$$=8x(x+1)(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=1$$

x	...	-1	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	\searrow	-1	\nearrow	1	\searrow	-1	\nearrow



함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 네 점에서 만나므로 구하는 실근의 개수는 4개이다.

답 (1) 1 (2) 2 (3) 4

76

$$x^3-3x-k=0 \text{에서}$$

$$x^3-3x=k \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

방정식 $\textcircled{7}$ 의 실근의 개수는 함수 $y=x^3-3x$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 의 교점의 개수와 같다.

$$f(x)=x^3-3x \text{로 놓으면}$$

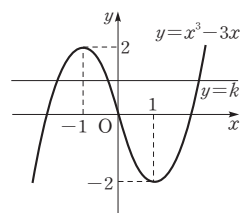
$$f'(x)=3x^2-3$$

$$=3(x+1)(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{에서}$$

$$x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	\nearrow	2	\searrow	-2	\nearrow



$\therefore k < -2$ 또는 $k > 2$ 이면 근이 1개

$-2 < k < 2$ 이면 근이 3개

$k = -2$ 또는 $k = 2$ 이면 근이 2개

답 $k < -2$ 또는 $k > 2$ 이면 근이 1개

$-2 < k < 2$ 이면 근이 3개

$k = -2$ 또는 $k = 2$ 이면 근이 2개

77

$$3x^4-4x^3-12x^2+15-k=0 \text{에서}$$

$$3x^4-4x^3-12x^2+15=k$$

주어진 방정식의 실근의 개수는 함수

$y=3x^4-4x^3-12x^2+15$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 의 교점의 개수와 같다.

$$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+15 \text{로 놓으면}$$

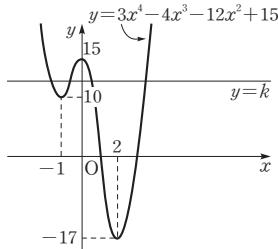
$$f'(x)=12x^3-12x^2-24x$$

$$=12x(x+1)(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{에서}$$

$$x=-1 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

x	...	-1	...	0	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	\searrow	10	\nearrow	15	\searrow	-17	\nearrow



따라서 서로 다른 4 개의 실근을 가지려면

$$10 < k < 15$$

$$\text{답 } 10 < k < 15$$

78

$$x^3 - x = 2x + a, \quad x^3 - 3x = a$$

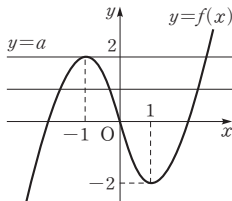
$$f(x) = x^3 - 3x \text{로 놓으면}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

$$f(-1) = 2, \quad f(1) = -2$$

따라서 $y = x^3 - 3x$ 의 그래프는 다음과 같다.



(1) 서로 다른 세 점에서 만나기 위해서는

$$-2 < a < 2$$

(2) 접하기 위해서는

$$a = -2 \text{ 또는 } a = 2$$

$$\text{답 (1) } -2 < a < 2 \quad (2) \quad a = -2 \text{ 또는 } a = 2$$

79

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + a \text{로 놓으면}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

$$\text{극댓값 : } f(0) = a, \quad \text{극솟값 : } f(1) = a - 1$$

(1) 서로 다른 세 실근을 가지려면

$$(\text{극댓값}) \times (\text{극솟값}) < 0$$

$$a(a-1) < 0$$

$$\therefore 0 < a < 1$$

(2) 오직 하나의 실근을 가지려면

$$(\text{극댓값}) \times (\text{극솟값}) > 0$$

$$a(a-1) > 0$$

$$\therefore a < 0 \text{ 또는 } a > 1$$

$$\text{답 (1) } 0 < a < 1 \quad (2) \quad a < 0 \text{ 또는 } a > 1$$

80

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - k \text{로 놓으면}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

방정식이 중근과 한 실근을 가지므로

$$f(-1) \cdot f(3) = 0$$

$$(5-k)(-27-k) = 0$$

$$\therefore k = -27 \text{ 또는 } k = 5$$

따라서 모든 k 의 값의 합은 -22 이다. 답 -22

81

$$-x^3 + 3x^2 + 9x = p \text{에서}$$

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x, \quad y = p \text{로 놓으면}$$

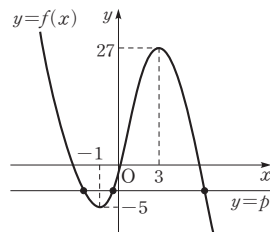
$$f'(x) = -3x^2 + 6x + 9 = -3(x+1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

$$\therefore \text{극댓값 : } f(3) = 27$$

$$\text{극솟값 : } f(-1) = -5$$

$y = f(x)$ 와 $y = p$ 의 그래프가 y 축의 오른쪽에서 한 점, y 축의 왼쪽에서 두 점과 만나도록 하는 p 의 값의 범위는



$$-5 < p < 0$$

$$\text{답 } -5 < p < 0$$

82

$f(x) = x^4 - 2x^2 + a$ 로 놓으면

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x-1)(x+1)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = -1$ 또는 $x = 0$ 또는 $x = 1$

$x = -1$, 1일 때, 극소이며 최소이므로

$$\text{최솟값} : f(-1) = f(1) = -1 + a$$

$$-1 + a \geq 0 \quad \therefore a \geq 1 \quad \text{답 } a \geq 1$$

83

$f(x) = x^3 + 9x + a - 6x^2 - 6$ 으로 놓으면

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = 1$ 또는 $x = 3$

$x > 1$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 $x = 3$ 에서 극소이면서 최소이고 최솟값은 $a - 6$ 이므로 $x > 1$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) > 0$ 이려면

$$f(3) = a - 6 > 0 \quad \therefore a > 6 \quad \text{답 } a > 6$$

84

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + a$ 로 놓으면

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = 1$ 또는 $x = 3$

$x \geq 3$ 에서 $x = 3$ 일 때,

극소이며 최소이다.

그런데 $x > 3$ 일 때,

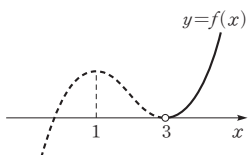
$$f'(x) > 0$$

이므로 함수 $f(x)$ 는 $x > 3$ 에서 증가한다.

따라서 위의 그림의 $x > 3$ 에서 $f(x) > 0$ 이 성립하려면 ($f(x)$ 의 최솟값) ≥ 0

즉, $f(3) = a \geq 0$ 이므로 실수 a 의 최솟값은 0이다.

답 0



85

$h(x) = f(x) - g(x)$ 로 놓으면

$$h(x) = 5x^3 - 15x^2 + k - 2$$

$$h'(x) = 15x^2 - 30x = 15x(x-2)$$

$h'(x) = 0$ 에서 $x = 0$ 또는 $x = 2$

$0 < x < 3$ 에서 함수 $h(x)$ 의 증감을 조사하면 다음과 같다.

x	0	...	2	...	3
$h'(x)$	0	-	0	+	
$h(x)$			$k-22$		

$0 < x < 3$ 에서 함수 $h(x)$ 는 $x = 2$ 일 때, 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$$h(2) = k - 22 \geq 0 \quad \therefore k \geq 22$$

따라서 구하는 실수 k 의 최솟값은 22이다. 답 22

86

$f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x + k$ 로 놓으면

$$f'(x) = 12x^2 - 6x - 6 = 6(2x+1)(x-1)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = -\frac{1}{2}$ 또는 $x = 1$

$-1 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증감을 조사하면 다음과 같다.

x	-1	...	$-\frac{1}{2}$...	1	...	2
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$k-1$		$k+\frac{7}{4}$		$k-5$		$k+8$

함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 일 때, 극소이면서 최소이므로

$$f(1) = k - 5 \geq 0 \quad \therefore k \geq 5 \quad \text{답 } k \geq 5$$

87

t 초 후의 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라고 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 6t^2 - 18t + 12, \quad a = \frac{dv}{dt} = 12t - 18$$

이므로 $6t^2 - 18t + 12 = 72, \quad t^2 - 3t - 10 = 0$

$t > 0$ 이므로 $t = 5$

따라서 $t = 5$ 일 때, 가속도는

$$a = 12 \times 5 - 18 = 42 \quad \text{답 42}$$

88

t 초 후의 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라고 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = t^2 - 7t + 10$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 2t - 7$$

점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 $v = 0$ 이므로

$$t^2 - 7t + 10 = 0, (t-2)(t-5) = 0$$

$$\therefore t=2 \text{ 또는 } t=5$$

처음으로 운동 방향을 바꿀 때, $t=2$ 이므로 $t=2$ 일 때의 가속도는

$$a = 2 \cdot 2 - 7 = -3 \quad \text{답 } -3$$

89

열차가 제동을 건 후 t 초 후의 속도 v 는

$$v = \frac{dx}{dt} = 18 - 6t$$

열차가 정지할 때의 속도는 $v=0$ 이므로

$$18 - 6t = 0 \quad \therefore t = 3$$

따라서 제동을 건 후 3초 동안 열차가 움직인 거리는

$$18 \cdot 3 - 3 \cdot 3^2 = 27(\text{m}) \quad \text{답 } 27 \text{ m}$$

90

물체가 지면에 떨어질 때 $h=0$ 이므로

$$20t - 5t^2 = 0, t^2 - 4t = 0, t(t-4) = 0$$

$$\therefore t=0 \text{ 또는 } t=4$$

따라서 땅에 떨어지는 것은 $t=4$ 이고

$$v = \frac{dh}{dt} = 20 - 10t \text{이므로 } t=4 \text{일 때의 속도는}$$

$$v = 20 - 10 \cdot 4 = -20(\text{m/초}) \quad \text{답 } -20 \text{ m/초}$$

91

물체의 t 초 후의 속도를 v 라고 하면

$$v = \frac{dh}{dt} = 50 - 2at$$

최고 높이에 도달했을 때는 $v=0$ 이고 걸린 시간이 5초이므로

$$50 - 2 \cdot a \cdot 5 = 0 \quad \therefore a = 5$$

따라서 이 물체가 도달하는 최고 높이는

$$50 \cdot 5 - 5 \cdot 5^2 = 125(\text{m}) \quad \text{답 } 125 \text{ m}$$

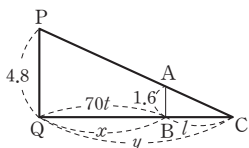
92

(i) $\overline{QC} = y$ 라고 하면

t 분 후의 사람의 위치는 $70t$ 이고,

$\triangle ABC \sim \triangle PQC$ 이

므로



$$4.8 : 1.6 = y : (y - 70t)$$

$$\therefore y = 105t$$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = 105(\text{m/분})$$

(ii) t 분 후의 그림자의 길이 $\overline{BC} = l$ 이라고 하면

$$l = y - 70t = 105t - 70t = 35t$$

$$\therefore \frac{dl}{dt} = 35(\text{m/분})$$

답 105 m/분, 35 m/분

93

물을 넣기 시작해서 t 분 후의 물의 깊이를 y cm, 수면의 반지름의 길이를 r cm, 부피를 V cm^3 라고 하면

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 y \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$10 : r = 20 : y$$

$$\therefore r = \frac{1}{2}y \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{1}{2}y\right)^2 y = \frac{\pi}{12}y^3$$

$$\text{양변을 } t \text{에 관하여 미분하면 } \frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4}y^2 \cdot \frac{dy}{dt}$$

한편, 조건에서 매분 15 cm^3 의 물을 넣게 되므로

$$\frac{dV}{dt} = 15, y = 8$$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = \frac{4}{\pi \cdot 8^2} \cdot 15 = \frac{15}{16\pi} (\text{cm/분})$$

답 $\frac{15}{16\pi} \text{ cm/분}$

94

반지름의 길이가 r 일 때, 원의 넓이 $S = \pi r^2$

한편, 반지름의 길이가 10 cm에서 매초 1 cm의 비율로 증가하므로 $r = 10 + t$

$$\therefore S = \pi(10+t)^2$$

양변을 t 에 관하여 미분하면

$$\frac{dS}{dt} = \pi \cdot 2(10+t)$$

따라서 $t=2$ 일 때의 넓이의 변화율은

$$\pi \cdot 2(10+2) = 24\pi (\text{cm}^2/\text{초})$$

답 $24\pi \text{ cm}^2/\text{초}$

III. 다항함수의 적분법

95

(1) $(8x)' = 8$ 이므로 $\int 8 dx = 8x + C$

(2) $(x^6)' = 6x^5$ 이므로 $\int 6x^5 dx = x^6 + C$

(3) $(x^2)' = 2x$ 이므로 $\int 2x dx = x^2 + C$

답 (1) $8x + C$ (2) $x^6 + C$ (3) $x^2 + C$

96

(1) $f(x) = \left(\frac{8}{3}x^3 + C\right)'$ 이므로 $f(x) = 8x^2$

(2) $f(x) = (2x^3 - x^2 + C)'$ 이므로 $f(x) = 6x^2 - 2x$
 답 (1) $8x^2$ (2) $6x^2 - 2x$

97

$2x^3 - 54x + 3$ 을 미분하면 $(x-3)f(x)$ 이므로

$$\begin{aligned}(x-3)f(x) &= (2x^3 - 54x + 3)' \\ &= 6x^2 - 54 = 6(x^2 - 9) \\ &= 6(x+3)(x-3)\end{aligned}$$

따라서 $f(x) = 6(x+3)$ 이므로

$f(1) = 6 \cdot 4 = 24$ 답 24

98

(1) (주어진 식) $= \frac{1}{6}x^6 + C$

(2) (주어진 식) $= x + C$

(3) (주어진 식) $= -x^4 + C$

(4) (주어진 식) $= \int (3y^2 - 6y) dy$
 $= y^3 - 3y^2 + C$

(5) (주어진 식) $= \int (4t^2 + 12t + 9) dt$
 $= \frac{4}{3}t^3 + 6t^2 + 9t + C$

(6) (주어진 식) $= \int (x^3 + 5x^2 + 3x - 9) dx$
 $= \frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 9x + C$

답 풀이 참조

99

(1) (주어진 식) $= \int (x^2 - 2xt + t^2) dt$
 $= x^2 \int dt - 2x \int t dt + \int t^2 dt$
 $= x^2 t - xt^2 + \frac{1}{3}t^3 + C$

(2) (주어진 식)
 $= \int \{(\sin \theta + \cos \theta)^2 + (\sin \theta - \cos \theta)^2\} d\theta$
 $= \int 2 d\theta = 2\theta + C$

(3) (주어진 식) $= \int \frac{(x+3)(x+2)}{x+3} dx$
 $= \int (x+2) dx$
 $= \frac{1}{2}x^2 + 2x + C$

(4) (주어진 식) $= \int \left\{ \left(\frac{x}{2} + 2\right)^2 - \left(\frac{x}{2} - 2\right)^2 \right\} dx$
 $= \int 4x dx$
 $= 2x^2 + C$

답 (1) $x^2 t - xt^2 + \frac{1}{3}t^3 + C$ (2) $2\theta + C$

(3) $\frac{1}{2}x^2 + 2x + C$ (4) $2x^2 + C$

100

$\frac{d}{dx} \int x^2 dx = x^2$ 이므로 주어진 식은

$\log_x x^2 = x^2 - 2x - 1$
 $\therefore 2 = x^2 - 2x - 1, x^2 - 2x - 3 = 0$

로그의 밑, 진수의 조건 ($x > 0, x \neq 1$)에 유의하면

$x = 3$ 답 3

101

$f(x) = \int \left\{ \frac{d}{dx} (x^2 + 2x) \right\} dx$
 $= x^2 + 2x + C$

$f(1) = 1$ 이므로 $1 + 2 + C = 1 \therefore C = -2$

$\therefore f(x) = x^2 + 2x - 2$

답 $f(x) = x^2 + 2x - 2$

102

점 (x, y) 에서의 접선의 기울기가 $3x^2 - 10x + 2$ 이므로

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 2$$

$$f(x) = \int f'(x) dx$$

$$= \int (3x^2 - 10x + 2) dx$$

$$= x^3 - 5x^2 + 2x + C$$

$y = f(x)$ 가 점 $(0, 2)$ 를 지나므로 $C = 2$

$$\therefore f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 2$$

$$\text{답 } y = x^3 - 5x^2 + 2x + 2$$

103

$f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$ 이므로

$$f(x) = \int f'(x) dx = x^3 - x^2 + x + C$$

$f(1) = 1 - 1 + 1 + C = 3$ 이므로 $C = 2$

$$\therefore \int f(x) dx = \int (x^3 - x^2 + x + 2) dx$$

$$= \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x + C$$

$$\text{답 } \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x + C$$

104

$$F(x) = xf(x) - 6x^3(x-1)$$

에서 양변을 x 에 관하여 미분하면

$$F'(x) = 1 \cdot f(x) + xf'(x) - 24x^3 + 18x^2$$

조건으로부터 $F'(x) = f(x)$ 이므로

$$xf'(x) = 24x^3 - 18x^2$$

$$\therefore f'(x) = 24x^2 - 18x$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx$$

$$= \int (24x^2 - 18x) dx$$

$$= 8x^3 - 9x^2 + C$$

$f(1) = 0$ 이므로

$$8 - 9 + C = 0 \quad \therefore C = 1$$

$$\therefore f(x) = 8x^3 - 9x^2 + 1$$

$$\text{답 } f(x) = 8x^3 - 9x^2 + 1$$

105

$f'(x) = k(x+2)(x-2) = 0$ 에서 $x = \pm 2$

$k > 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x = -2$ 에서 극대, $x = 2$ 에서 극소이다.

$$\therefore f(x) = \int k(x^2 - 4) dx$$

$$= k\left(\frac{1}{3}x^3 - 4x\right) + C$$

$f(-2) = 20$ 에서

$$\frac{16}{3}k + C = 20 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$f(2) = -12$ 에서

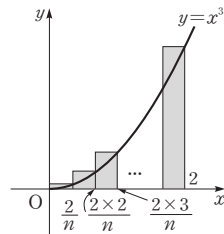
$$-\frac{16}{3}k + C = -12 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면 $C = 4, k = 3$

$$\therefore f(x) = x^3 - 12x + 4$$

$$\text{답 } f(x) = x^3 - 12x + 4$$

106



각 분점 사이의 거리는 $\frac{2}{n}$, 각 직사각형의 높이는

$$\left(\frac{2}{n}\right)^3, \left(\frac{2 \times 2}{n}\right)^3, \left(\frac{2 \times 3}{n}\right)^3, \dots$$

이므로 각 직사각형의 넓이의 합 S_n 은

$$S_n = \frac{2}{n} \cdot \left(\frac{2 \times 1}{n}\right)^3 + \frac{2}{n} \cdot \left(\frac{2 \times 2}{n}\right)^3 + \dots + \frac{2}{n} \cdot \left(\frac{2 \times n}{n}\right)^3$$

$$= \frac{16}{n^4} (1^3 + 2^3 + \dots + n^3)$$

$$= \frac{16}{n^4} \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

따라서 구하는 넓이 S 는

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16n^2(n+1)^2}{4n^4} = 4 \quad \text{답 } 4$$

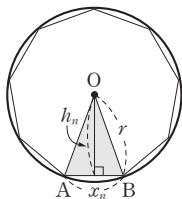
107

$$S_n = n \cdot \triangle OAB$$

$$= n \cdot \frac{1}{2} x_n \cdot h_n$$

$$= \frac{1}{2} h_n (n \cdot x_n)$$

$$= \frac{1}{2} h_n \cdot l_n$$



그런데 $n \rightarrow \infty$ 일 때, $h_n \rightarrow r$, $l_n \rightarrow 2\pi r$ 이므로 구하는 원의 넓이 S 는

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} h_n \cdot l_n = \frac{1}{2} r \cdot 2\pi r = \pi r^2$$

답 πr^2

108

(1) $a=0$, $b=1$ 이고

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}$$

$$x_k = 0 + k\Delta x = \frac{k}{n}$$

$f(x) = 2x$ 라고 하면

$$f(x_k) = 2x_k = 2 \cdot \frac{k}{n}$$

$$\therefore \int_0^1 2x \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \cdot \Delta x$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2k}{n} \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^n k$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$$

(2) $a=-1$, $b=0$ 이고

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{0 - (-1)}{n} = \frac{1}{n}$$

$$x_k = a + k\Delta x = -1 + \frac{k}{n}$$

$f(x) = -x^2$ 이라고 하면

$$f(x_k) = -x_k^2 = -\left(-1 + \frac{k}{n}\right)^2$$

$$\therefore \int_{-1}^0 (-x^2) \, dx$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ -\left(-1 + \frac{k}{n}\right)^2 \right\} \cdot \frac{1}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n} \right) \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{2k}{n} + \frac{k^2}{n^2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n} \right) \left\{ n - \frac{2}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n} \right) \left\{ -1 + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right\} \\ &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

(3) $a=1$, $b=2$ 이고

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{n} = \frac{1}{n}$$

$$x_k = a + k\Delta x = 1 + k \cdot \frac{1}{n} = 1 + \frac{k}{n}$$

$f(x) = 2x - 1$ 이라고 하면

$$f(x_k) = 2 \cdot x_k - 1$$

$$= 2\left(1 + \frac{k}{n}\right) - 1 = 1 + \frac{2k}{n}$$

$$\therefore \int_1^2 (2x-1) \, dx$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{2k}{n} \right) \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ n + \frac{2}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \right\} \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n+1}{n} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n} \right)$$

$$= 2$$

(4) $a=1$, $b=2$ 이고

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{n} = \frac{1}{n}$$

$$x_k = a + k\Delta x = 1 + k \cdot \frac{1}{n} = 1 + \frac{k}{n}$$

$f(x) = x^2 + 2x - 3$ 이라고 하면

$$\begin{aligned}
f(x_k) &= x_k^2 + 2x_k - 3 \\
&= \left(1 + \frac{k}{n}\right)^2 + 2\left(1 + \frac{k}{n}\right) - 3 \\
\therefore \int_1^2 (x^2 + 2x - 3) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ \left(1 + \frac{k}{n}\right)^2 + 2\left(1 + \frac{k}{n}\right) - 3 \right\} \cdot \frac{1}{n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{4k}{n} + \frac{k^2}{n^2} \right) \frac{1}{n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{4}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right\} \frac{1}{n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{2(n+1)}{n} + \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \right\} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 2\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)}{6} \right\} \\
&= 2 + \frac{2}{6} = \frac{7}{3} \\
&\quad \text{답 (1) } 1 \quad (2) -\frac{1}{3} \quad (3) 2 \quad (4) \frac{7}{3}
\end{aligned}$$

109

(1) (주어진 식)

$$\begin{aligned}
&= \left[x^4 - x^3 + x^2 \right]_{-1}^1 \\
&= (1 - 1 + 1) - \{(-1)^4 - (-1)^3 + (-1)^2\} \\
&= 1 - (1 + 1 + 1) \\
&= -2
\end{aligned}$$

(2) (주어진 식) $= \left[\frac{1}{2}x^2 - x^3 \right]_1^0$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{2} \cdot 0^2 - 0^3 \right) - \left(\frac{1}{2} \cdot 1^2 - 1^3 \right) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(3) (주어진 식)

$$\begin{aligned}
&= \int_{-1}^{-3} (2y^2 - 3y - 2) dy \\
&= \left[\frac{2}{3}y^3 - \frac{3}{2}y^2 - 2y \right]_{-1}^{-3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \frac{2}{3}(-3)^3 - \frac{3}{2}(-3)^2 - 2 \cdot (-3) \right\} \\
&\quad - \left\{ \frac{2}{3}(-1)^3 - \frac{3}{2}(-1)^2 - 2 \cdot (-1) \right\} \\
&= \left(-18 - \frac{27}{2} + 6 \right) + \frac{1}{6} = -\frac{76}{3}
\end{aligned}$$

(4) (주어진 식)

$$\begin{aligned}
&= \int_{-1}^1 \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1} dx \\
&= \int_{-1}^1 (x^2 - x + 1) dx \\
&= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x \right]_{-1}^1 \\
&= \left(\frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 + 1 \right) \\
&\quad - \left\{ \frac{1}{3}(-1)^3 - \frac{1}{2}(-1)^2 + (-1) \right\} \\
&= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 \right) - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 1 \right) = \frac{8}{3} \\
&\quad \text{답 (1) } -2 \quad (2) \frac{1}{2} \quad (3) -\frac{76}{3} \quad (4) \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

다른풀이 $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$ 의 성질을 이용하여 풀 수 있다.

(2) (주어진 식) $= -\int_0^1 (x - 3x^2) dx$

$$= \left[x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

(3) (주어진 식) $= \int_{-1}^{-3} (2y^2 - 3y - 2) dy$

$$\begin{aligned}
&= -\int_{-3}^{-1} (2y^2 - 3y - 2) dy \\
&= \int_{-3}^{-1} (-2y^2 + 3y + 2) dy \\
&= \left[-\frac{2}{3}y^3 + \frac{3}{2}y^2 + 2y \right]_{-3}^{-1} \\
&= \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{2} - 2 \right) - \left(18 + \frac{27}{2} - 6 \right) \\
&= -\frac{76}{3}
\end{aligned}$$

110

$$\int_k^0 (2x+1) dx = \left[x^2 + x \right]_k^0 = -(k^2 + k) = -\frac{1}{4}$$

$$k^2 + k + \frac{1}{4} = 0, \quad 4k^2 + 4k + 1 = 0$$

$$(2k+1)^2 = 0 \quad \therefore k = -\frac{1}{2} \quad \text{답 } -\frac{1}{2}$$

111

(1) (주어진 식)

$$\begin{aligned} &= \int_{-2}^1 \{(2x^2+3x-1) - (2x^2-x+3)\} dx \\ &= \int_{-2}^1 (4x-4) dx = \left[2x^2-4x \right]_{-2}^1 \\ &= (2-4) - (8+8) = -18 \end{aligned}$$

(2) (주어진 식) $= \int_0^2 (3x^2+1) dx = \left[x^3+x \right]_0^2 = 10$

$$\begin{aligned} (3) \text{ (주어진 식)} &= \int_0^1 \frac{1}{t-1} dt - \int_0^1 \frac{y^3}{y-1} dy \\ &= \int_0^1 \frac{1}{t-1} dt - \int_0^1 \frac{t^3}{t-1} dt \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{t-1} - \frac{t^3}{t-1} \right) dt \\ &= - \int_0^1 \frac{t^3-1}{t-1} dt \\ &= - \int_0^1 (t^2+t+1) dt \\ &= - \left[\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + t \right]_0^1 = -\frac{11}{6} \end{aligned}$$

(4) (주어진 식) $= \int_1^2 (x-1)(x-2) dx$
 $(x-1)(x-2)=0$ 에서 두 근이 1, 2이므로 공식에 의해

$$(\text{주어진 식}) = -\frac{1}{6}(2-1)^3 = -\frac{1}{6}$$

답 (1) -18 (2) 10 (3) $-\frac{11}{6}$ (4) $-\frac{1}{6}$

112

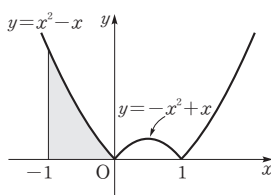
(1) $|x-x^2| = |x(x-1)|$

(i) $x(x-1) \geq 0$, 즉 $x \leq 0$ 또는 $x \geq 1$ 일 때

$$y = x^2 - x$$

(ii) $x(x-1) < 0$, 즉 $0 < x < 1$ 일 때

$$y = -x^2 + x$$

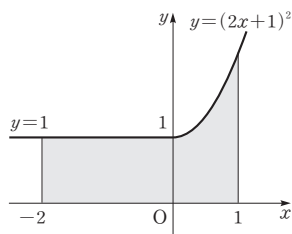


$$(\text{주어진 식}) = \int_{-1}^0 (x^2-x) dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^0 = \frac{5}{6}$$

(2) $x \geq 0$ 일 때, $(|x|+x+1)^2 = (2x+1)^2$

$x < 0$ 일 때, $(|x|+x+1)^2 = (-x+x+1)^2 = 1$



$$(\text{주어진 식}) = \int_{-2}^0 dx + \int_0^1 (2x+1)^2 dx$$

$$\begin{aligned} &= \left[x \right]_{-2}^0 + \left[\frac{(2x+1)^3}{6} \right]_0^1 \\ &= \frac{19}{3} \end{aligned}$$

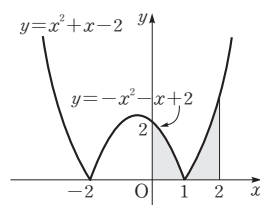
(3) $|x^2+x-2| = |(x+2)(x-1)|$

(i) $(x+2)(x-1) \geq 0$ 일 때, 즉

$x \leq -2$ 또는 $x \geq 1$ 일 때, $y = (x+2)(x-1)$

(ii) $(x+2)(x-1) < 0$ 일 때, 즉

$-2 < x < 1$ 일 때, $y = -(x+2)(x-1)$

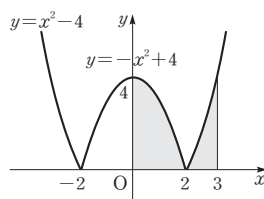


(주어진 식)

$$= \int_0^1 (-x^2-x+2) dx + \int_1^2 (x^2+x-2) dx$$

$$\begin{aligned} &= \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x \right]_1^2 \\ &= 3 \end{aligned}$$

(4)

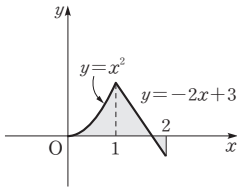


(주어진 식)

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^2 (-x^2 + 4) dx + \int_2^3 (x^2 - 4) dx \\
 &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 4x \right]_0^2 + \left[\frac{1}{3}x^3 - 4x \right]_2^3 \\
 &= \frac{23}{3}
 \end{aligned}$$

답 (1) $\frac{5}{6}$ (2) $\frac{19}{3}$ (3) 3 (4) $\frac{23}{3}$

113



$$\begin{aligned}
 &\int_0^2 x f(x) dx \\
 &= \int_0^1 x \cdot x^2 dx + \int_1^2 x(-2x+3) dx \\
 &= \int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 (-2x^2+3x) dx \\
 &= \left[\frac{1}{4}x^4 \right]_0^1 + \left[-\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_1^2 \\
 &= \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}
 \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{12}$

114

홀수차항 : $x^5, -2x^3, -3x$
 짝수차항 : $3x^2, 1$

(주어진 식)

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-2}^2 (x^5 - 2x^3 - 3x) dx + \int_{-2}^2 (3x^2 + 1) dx \\
 &= 2 \int_0^2 (3x^2 + 1) dx \\
 &= 2 \left[x^3 + x \right]_0^2 = 20
 \end{aligned}$$

답 20

115

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 (a^3 + 4x - 9ax^2) dx &= \left[a^3x + 2x^2 - 3ax^3 \right]_0^1 \\
 &= a^3 - 3a + 2
 \end{aligned}$$

$f(a) = a^3 - 3a + 2$ 로 놓으면

$$f'(a) = 3a^2 - 3 = 3(a+1)(a-1)$$

$f'(a) = 0$ 에서 $a = -1$ 또는 $a = 1$

$0 \leq a \leq 2$ 에서 $y = f(a)$ 의 그래

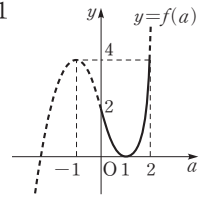
프를 그리면 오른쪽과 같고

$a = 1$ 일 때, 최솟값 0

$a = 2$ 일 때, 최댓값 4

따라서 최댓값과 최솟값의 차는 4이다.

답 4



KEY point

다항함수의 최대·최소 문제는

이차식 \Rightarrow 완전제곱꼴로 변형

삼차식 이상 \Rightarrow 미분 이용

116

$f(x) = |x+2| + |x| + |x-2|$ 에서

(i) $x \geq 2$ 일 때,

$$f(x) = 3x$$

(ii) $0 \leq x < 2$ 일 때,

$$f(x) = x + 4$$

(iii) $-2 \leq x < 0$ 일 때,

$$f(x) = -x + 4$$

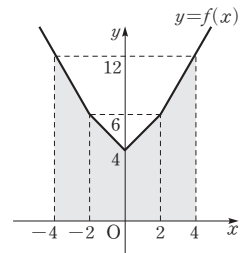
(iv) $x < -2$ 일 때,

$$f(x) = -3x$$

위의 그래프와 같이 $f(x)$ 는 $x=0$ 일 때, 최솟값 4를 가지므로 $a=4$ 이고 $f(x)$ 는 우함수이므로

$$\begin{aligned}
 \int_{-4}^a f(x) dx &= \int_{-4}^4 f(x) dx = 2 \int_0^4 f(x) dx \\
 &= 2 \left\{ \int_0^2 (x+4) dx + \int_2^4 3x dx \right\} \\
 &= 2 \left\{ \left[\frac{1}{2}x^2 + 4x \right]_0^2 + \left[\frac{3}{2}x^2 \right]_2^4 \right\} \\
 &= 2 \cdot 28 = 56
 \end{aligned}$$

답 56



117

$$(1) \int_1^x f(t) dt = x^4 + x^3 - 2ax \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

양변을 x 에 관하여 미분하면

$$f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 2a$$

$x=1$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$0 = 1 + 1 - 2a \quad \therefore a = 1$$

$$\therefore f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 2$$

$$\therefore f(1) = 5$$

(2) 주어진 식의 양변을 x 에 관하여 미분하면

$$f'(x) + (x+2)f'(x) = 6x^2 + 16x - 6$$

$$(x+3)f'(x) = 2(x+3)(3x-1)$$

$$\therefore f'(x) = 2(3x-1)$$

$$f(x) = \int 2(3x-1)dx$$

$$= 3x^2 - 2x + C \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

주어진 식의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$f(0)=1 \text{이므로 } \textcircled{1} \text{에서 } C=1$$

$$\therefore f(x) = 3x^2 - 2x + 1$$

$$\therefore f(1) = 3 - 2 + 1 = 2$$

답 (1) 5 (2) 2

118

$$(1) \int_0^2 f(x)dx = a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

으로 놓으면

$$f(x) = 2x + a \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$a = \int_0^2 (2x+a)dx = \left[x^2 + ax \right]_0^2$$

$$= 4 + 2a$$

$$\therefore a = -4$$

$$\therefore f(x) = 2x - 4$$

$$(2) \int_0^1 f(x)dx = a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

으로 놓으면 $f'(x) = 2x + 3a$

$$\therefore f(x) = \int f'(x)dx = \int (2x + 3a)dx$$

$$= x^2 + 3ax + C$$

또, $f(0)=1$ 이므로 $C=1$

$$\therefore f(x) = x^2 + 3ax + 1$$

$\textcircled{1}$ 에서

$$a = \int_0^1 (x^2 + 3ax + 1)dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}ax^2 + x \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{3}{2}a + 1 = \frac{3}{2}a + \frac{4}{3}$$

$$\therefore a = -\frac{8}{3}$$

$$\therefore f(x) = x^2 - 8x + 1$$

$$(3) f(x) = 3x^2 + 2x \int_0^1 f(t)dt - \int_0^1 tf(t)dt \text{에서}$$

적분변수가 t 이므로 x 는 상수로 생각한다.

$$\int_0^1 f(t)dt = a, \int_0^1 tf(t)dt = b \text{라고 하면}$$

$$f(x) = 3x^2 + 2ax - b$$

$$\therefore a = \int_0^1 f(t)dt$$

$$= \int_0^1 (3t^2 + 2at - b)dt$$

$$= \left[t^3 + at^2 - bt \right]_0^1$$

$$= 1 + a - b$$

$$\therefore a = 1 + a - b \quad \therefore b = 1$$

$$b = \int_0^1 tf(t)dt$$

$$= \int_0^1 t(3t^2 + 2at - 1)dt$$

$$= \int_0^1 (3t^3 + 2at^2 - t)dt$$

$$= \left[\frac{3}{4}t^4 + \frac{2}{3}at^3 - \frac{1}{2}t^2 \right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3}a + \frac{1}{4}$$

$$\therefore b = \frac{2}{3}a + \frac{1}{4} = 1 \quad \therefore a = \frac{9}{8}$$

$$\therefore f(x) = 3x^2 + \frac{9}{4}x - 1$$

$$\text{답 (1) } f(x) = 2x - 4$$

$$(2) f(x) = x^2 - 8x + 1$$

$$(3) f(x) = 3x^2 + \frac{9}{4}x - 1$$

119

$$f(x) = \int_{-3}^x (3t^2 - 6t - 9)dt \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

$$= 3(x-3)(x+1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

$x = -1$ 일 때, $f(x)$ 는 극대이며 극댓값은

$$f(-1) = \int_{-3}^{-1} (3t^2 - 6t - 9) dt$$

$$= \left[t^3 - 3t^2 - 9t \right]_{-3}^{-1} = 32$$

$x=3$ 일 때, $f(x)$ 는 극소이며 극솟값은

$$f(3) = \int_{-3}^3 (3t^2 - 6t - 9) dt$$

$$= \left[t^3 - 3t^2 - 9t \right]_{-3}^3 = 0$$

답 극댓값 : 32, 극솟값 : 0

120

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{2h} \times 2 = 2f'(1)$$

또, 주어진 등식의 양변을 x 에 관하여 미분하면

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \int_1^x (2t+3)(t^2+1) dt$$

$$= (2x+3)(x^2+1)$$

$$\therefore 2f'(1) = 2(2+3)(1+1) = 20 \quad \text{답 } 20$$

121

$f(x) = \int_0^x (t-1)(t-5) dt$ 의 양변을 x 에 관하여 미분하면

$$f'(x) = (x-1)(x-5)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=1$ ($\because 0 \leq x \leq 3$)

x	0	...	1	...	3
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	극대	↘	

위의 표에 의하여 $0 \leq x \leq 3$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극대이면서 최대이므로 최댓값은

$$f(1) = \int_0^1 (t-1)(t-5) dt$$

$$= \int_0^1 (t^2 - 6t + 5) dt$$

$$= \left[\frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 5t \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3} - 3 + 5 = \frac{7}{3}$$

따라서 구하는 최댓값은 $\frac{7}{3}$ 이다.

답 $\frac{7}{3}$

122

$\int |t-a| dt = F(t)$ 라고 하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x |t-a| dt = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x |t-a| dt}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[F(t)]_0^x}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0}$$

$$= F'(0)$$

$F'(t) = |t-a|$ 에서

$$F'(0) = |0-a| = |a| \quad \text{답 } |a|$$

다른풀이 공식에 이용하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x |t-a| dt = |0-a| = |a|$$

123

$$\int (t-2)^3 dt = F(t) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

으로 놓으면

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x (t-2)^3 dt = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^x (t-2)^3 dt}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{[F(t)]_1^x}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x) - F(1)}{x-1}$$

$$= F'(1)$$

$\textcircled{1}$ 에서 $F'(t) = (t-2)^3$ 이므로

$$F'(1) = -1 \quad \text{답 } -1$$

다른풀이 공식에 이용하면

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x (t-2)^3 dt = (1-2)^3 = -1$$

124

$$(\text{주어진 식}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ \left(\frac{1}{n} \right)^3 + \left(\frac{2}{n} \right)^3 + \dots + \left(\frac{n}{n} \right)^3 \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} \right)^3$$

$$= \int_0^1 x^3 dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

125

$$\begin{aligned} \text{(주어진 식)} &= \int_1^{1+1} f(x)dx = \int_1^2 x^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_1^2 = \frac{1}{3}(2^3 - 1) \\ &= \frac{7}{3} \end{aligned}$$

답 $\frac{7}{3}$

$$\begin{aligned} \text{다른풀이 (주어진 식)} &= \int_0^1 f(1+x)dx \\ &= \int_0^1 (1+x)^2 dx \\ &= \int_0^1 (x^2 + 2x + 1)dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} + 1 + 1 = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

126

$$\begin{aligned} \text{(주어진 식)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ \frac{(n+1)^2}{n^2} + \frac{(n+2)^2}{n^2} + \dots + \frac{(n+n)^2}{n^2} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2 + \dots + \left(1 + \frac{n}{n}\right)^2 \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} \\ &= \int_1^{1+1} x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_1^2 = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

답 $\frac{7}{3}$

127

$$\begin{aligned} \text{(주어진 식)} &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(2 + \frac{3k}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(2 + \frac{3k}{n}\right)^2 \cdot \frac{3}{n} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{3} \int_2^{2+3} x^2 dx = \frac{2}{3} \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_2^5 \\ &= \frac{2}{9}(5^3 - 2^3) = 26 \end{aligned}$$

답 26

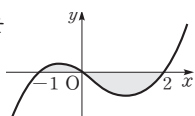
128

곡선과 x 축과의 교점의 x 좌표는

$$x^3 - x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2)(x+1) = 0$$

$\therefore x = -1$ 또는 $x = 0$ 또는 $x = 2$



$$\begin{aligned} \therefore S &= \int_{-1}^0 (x^3 - x^2 - 2x) dx - \int_0^2 (x^3 - x^2 - 2x) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_{-1}^0 - \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_0^2 \\ &= \frac{37}{12} \end{aligned}$$

답 $\frac{37}{12}$

129

$y^2 = 4x$ 에서

$$x = \frac{1}{4}y^2$$

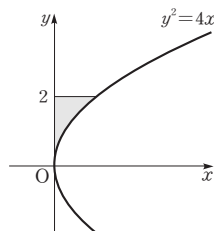
오른쪽 그래프에서

$$S = \int_0^2 x dy$$

$$= \int_0^2 \frac{1}{4}y^2 dy$$

$$= \left[\frac{1}{12}y^3 \right]_0^2 = \frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$



130

(1) 두 곡선의 교점의 x 좌표는 $x^3 = 3x^2 - 4$ 에서

$$x^3 - 3x^2 + 4 = 0, (x+1)(x-2)^2 = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

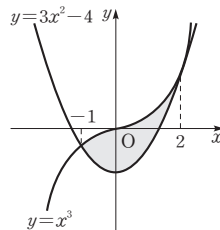
$-1 \leq x \leq 2$ 에서

$$x^3 \geq 3x^2 - 4$$

$$S = \int_{-1}^2 \{x^3 - (3x^2 - 4)\} dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + 4x \right]_{-1}^2$$

$$= \frac{27}{4}$$



(2) 곡선과 직선의 교점의

x 좌표는

$$x^3 - 6x^2 + 9x = x \text{ 에서}$$

$$x^3 - 6x^2 + 8x = 0$$

$$x(x-2)(x-4) = 0$$

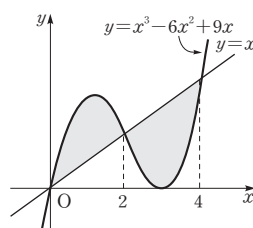
$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

$$\text{또는 } x = 4$$

$0 \leq x \leq 2$ 에서

$$x^3 - 6x^2 + 9x \geq x$$

$$2 \leq x \leq 4 \text{ 에서 } x^3 - 6x^2 + 9x \leq x$$



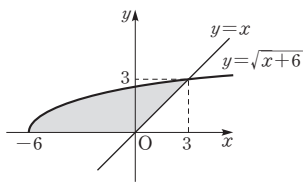
$$\begin{aligned}
\therefore S &= \int_0^2 \{(x^3 - 6x^2 + 9x) - x\} dx \\
&\quad + \int_2^4 \{x - (x^3 - 6x^2 + 9x)\} dx \\
&= \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx - \int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx \\
&= \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2 \right]_0^2 - \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2 \right]_2^4 \\
&= 8
\end{aligned}$$

(3) $y = \sqrt{x+6}$ 에서 $x = y^2 - 6$ ($y \geq 0$)

곡선 $y = \sqrt{x+6}$ 과 직선 $y = x$ 의 교점의 y 좌표는

$$y = y^2 - 6 \text{에서 } y^2 - y - 6 = 0$$

$$(y+2)(y-3) = 0 \quad \therefore y = 3 \quad (\because y \geq 0)$$



$0 \leq y \leq 3$ 에서 $y \geq y^2 - 6$

$$\begin{aligned}
\therefore S &= \int_0^3 \{y - (y^2 - 6)\} dy \\
&= \int_0^3 (-y^2 + y + 6) dy \\
&= \left[-\frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2 + 6y \right]_0^3 \\
&= -9 + \frac{9}{2} + 18 = \frac{27}{2}
\end{aligned}$$

참고 구하는 넓이 S는

$$S = \int_{-6}^0 \sqrt{x+6} dx + \int_0^3 (\sqrt{x+6} - x) dx$$

로 나타낼 수 있으나 피적분함수 $\sqrt{x+6}$, $\sqrt{x+6} - x$ 는 무리함수이므로 교과 과정에 벗어난 것이므로 위와 같은 방법을 이용하여 넓이를 구한다.

(4) 두 곡선의 교점의 x

좌표는

$$x^3 + 2x^2 - 2 = -x^2 + 2$$

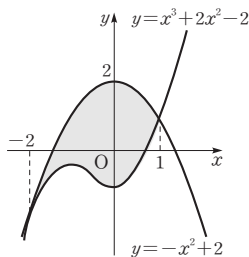
에서

$$(x+2)^2(x-1) = 0$$

따라서 $x = -2$ 에서

접하고 $x = 1$ 에서 만

난다.



$$\begin{aligned}
\therefore S &= \int_{-2}^1 \{(-x^2 + 2) - (x^3 + 2x^2 - 2)\} dx \\
&= \int_{-2}^1 (-x^3 - 3x^2 + 4) dx \\
&= \left[-\frac{x^4}{4} - x^3 + 4x \right]_{-2}^1 \\
&= -\frac{1}{4} - 1 + 4 - (-4 + 8 - 8) = \frac{27}{4} \\
\text{답 (1) } \frac{27}{4} \quad (2) 8 \quad (3) \frac{27}{2} \quad (4) \frac{27}{4}
\end{aligned}$$

131

두 곡선의 교점의 x 좌표는

$$x(x-1)(x-2) = x(x-1)$$

에서

$$x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

$$\text{또는 } x = 3$$

$0 \leq x \leq 1$ 에서

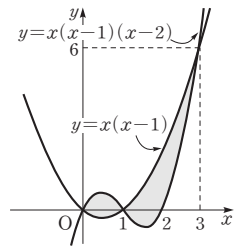
$$x(x-1)(x-2) \geq x(x-1)$$

$1 \leq x \leq 3$ 에서

$$x(x-1)(x-2) \leq x(x-1)$$

따라서 구하는 넓이 S는

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^1 \{x(x-1)(x-2) - x(x-1)\} dx \\
&\quad - \int_1^3 \{x(x-1)(x-2) - x(x-1)\} dx \\
&= \int_0^1 (x^3 - 4x^2 + 3x) dx \\
&\quad - \int_1^3 (x^3 - 4x^2 + 3x) dx \\
&= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^1 \\
&\quad - \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_1^3 \\
&= \frac{37}{12} \quad \text{답 } \frac{37}{12}
\end{aligned}$$



132

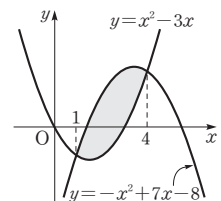
두 곡선의 교점의 x 좌표는

$$x^2 - 3x = -x^2 + 7x - 8 \text{에서}$$

$$x = 1 \text{ 또는 } x = 4$$

공식을 이용하면

$$|a - a'| = 2$$



$$\alpha=1, \beta=4$$

$$\therefore S = \frac{2(4-1)^3}{6} = 9$$

답 9

$$\begin{aligned} \text{다른풀이 } S &= \int_1^4 \{(-x^2+7x-8)-(x^2-3x)\}dx \\ &= -2 \int_1^4 (x^2-5x+4)dx \\ &= -2 \left[\frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 4x \right]_1^4 \\ &= 9 \end{aligned}$$

133

곡선과 직선의 교점의 x 좌표는 $x^2=x$ 에서

$$x=0 \text{ 또는 } x=1$$

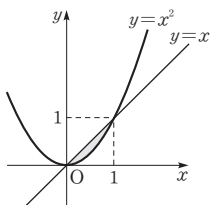
공식을 이용하면 $a=1, \alpha=0, \beta=1$

$$\therefore S = \frac{1 \cdot (1-0)^3}{6} = \frac{1}{6}$$

답 $\frac{1}{6}$

다른풀이

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 (x-x^2)dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$



134

$y=x^2-3x$ 와 $y=-x+k$

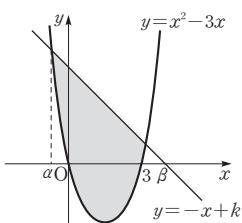
의 교점의 x 좌표를

$\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 라고 하면 오

른쪽 그림에서 곡선과 직

선으로 둘러싸인 도형의

넓이가 36이므로



$$\int_{\alpha}^{\beta} \{(-x+k)-(x^2-3x)\}dx = 36$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} (-x^2+2x+k)dx$$

$$= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 = 36$$

$$(\beta-\alpha)^3 = 6^3 \quad \therefore \beta-\alpha=6 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또, α, β 는 $x^2-2x-k=0$ 의 두 근이므로

$$\alpha+\beta=2, \alpha\beta=-k \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $\alpha=-2, \beta=4$ 이므로

$$\alpha\beta=-k=-8 \quad \therefore k=8$$

답 8

135

그래프를 그리면 오른쪽
그림과 같고, 교점의 x 좌
표는

$$x(x-1)=x+3 \text{에서}$$

$$x=-1 \text{ 또는 } x=3$$

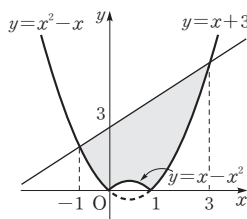
$$\therefore S = \int_{-1}^3 \{x+3$$

$$-(x^2-x)\}dx - 2 \int_0^1 (-x^2+x)dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x \right]_{-1}^3 - 2 \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1$$

$$= \frac{31}{3}$$

답 $\frac{31}{3}$



136

두 곡선의 교점의 x 좌표는

$$x(k-x)=x^2(k-x) \text{에서}$$

$$x=0 \text{ 또는 } x=1 \text{ 또는 } x=k$$

$$\therefore \int_0^k \{x(k-x)-x^2(k-x)\}dx$$

$$= \int_0^k \{x^3-(k+1)x^2+kx\}dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{k+1}{3}x^3 + \frac{k}{2}x^2 \right]_0^k$$

$$= -\frac{1}{12}k^4 + \frac{1}{6}k^3 = 0$$

$$k^3(k-2)=0$$

$$\therefore k=2 (\because k>1)$$

답 2

137

$$f(x)=x^3-3x^2+x+4$$

라고 하면

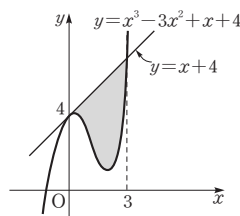
$$f'(x)=3x^2-6x+1$$

$$\therefore f'(0)=1$$

따라서 점 $(0, 4)$ 에서의

접선의 방정식은

$$y=x+4$$



곡선과 접선의 교점의 x 좌표는

$$x^3 - 3x^2 + x + 4 = x + 4$$

$$x^2(x-3)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=3$$

$$\begin{aligned} \therefore S &= \int_0^3 \{(x+4) - (x^3 - 3x^2 + x + 4)\} dx \\ &= \int_0^3 (-x^3 + 3x^2) dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4 + x^3 \right]_0^3 \\ &= \frac{27}{4} \end{aligned}$$

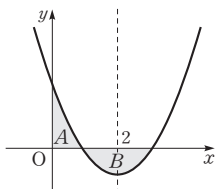
답 $\frac{27}{4}$

다른풀이 $a=1, \beta=3, \alpha=0$ 이므로

$$S = \frac{|a|}{12} (\beta - \alpha)^4 = \frac{1}{12} \cdot 81 = \frac{27}{4}$$

138

$y = x^2 - 4x + a$ 의 그래프의 대칭축은 $x=2$ 이므로 영역 B 는 $x=2$ 에 의하여 이등분된다.



$$\begin{aligned} \therefore \int_0^2 (x^2 - 4x + a) dx &= \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + ax \right]_0^2 \\ &= \frac{8}{3} - 8 + 2a = 0 \\ \therefore a &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

답 $\frac{8}{3}$

139

직선 $y=ax$ 와 포물선 $y=x^2-3x$ 의 교점의 x 좌표는 $ax=x^2-3x$ 에서

$$x^2 - (a+3)x = 0$$

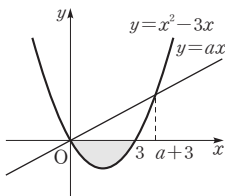
$$x(x-a-3)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=a+3$$

포물선 $y=x^2-3x$ 와 x 축과의 교점의 x 좌표는 $x^2-3x=0$ 에서 $x(x-3)=0$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=3$$

따라서 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이는 어



두운 부분의 넓이의 2배이므로

$$\begin{aligned} \int_0^{a+3} \{ax - (x^2 - 3x)\} dx &= -2 \int_0^3 (x^2 - 3x) dx \\ \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}(a+3)x^2 \right]_0^{a+3} &= -2 \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right]_0^3 \\ \frac{1}{6}(a+3)^3 &= 9 \\ \therefore a &= 3(\sqrt[3]{2}-1) \end{aligned}$$

답 $3(\sqrt[3]{2}-1)$

140

기울기가 m 이고 점 $(1, 2)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y-2=m(x-1) \quad \therefore y=m(x-1)+2$$

포물선과 직선의 교점의 x 좌표를 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 라고 하면 α, β 는 방정식

$$x^2 = m(x-1)+2, \quad x^2 - mx + m - 2 = 0$$

의 두 근이다.

$$\therefore \alpha + \beta = m, \quad \alpha\beta = m-2$$

$$(\beta - \alpha)^2 = (\beta + \alpha)^2 - 4\alpha\beta = m^2 - 4m + 8 \text{에서}$$

$$\beta - \alpha = \sqrt{m^2 - 4m + 8} = \sqrt{(m-2)^2 + 4}$$

$$\begin{aligned} \therefore S &= \int_{\alpha}^{\beta} (mx + 2 - m - x^2) dx \\ &= \frac{(\beta - \alpha)^3}{6} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{6} \{ \sqrt{(m-2)^2 + 4} \}^3$$

$$= \frac{1}{6} \{ (m-2)^2 + 4 \}^{\frac{3}{2}}$$

따라서 도형의 넓이는 기울기가 2일 때, 최소가 된다.

답 2

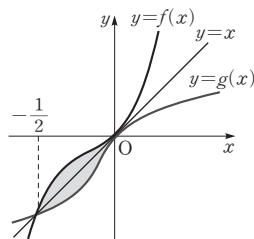
141

$y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 는 서로 역함수의 관계이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표는

$$2x^3 + x^2 + x = x \text{에서 } x^2(2x+1)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=-\frac{1}{2}$$



두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는 $-\frac{1}{2} \leq x \leq 0$ 에서 직선 $y=x$ 와 곡선 $y=f(x)$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

따라서 구하는 넓이 S 는

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_{-\frac{1}{2}}^0 \{(2x^3 + x^2 + x) - x\} dx \\ &= 2 \int_{-\frac{1}{2}}^0 (2x^3 + x^2) dx \\ &= 2 \left[\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 \right]_{-\frac{1}{2}}^0 = \frac{1}{48} \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{48}$

142

$f(x) = x^3 + 3$ 에서

$f'(x) = 3x^2 \geq 0$,

$f(0) = 3, f(2) = 11$

이므로 $y=f(x)$ 의 그래프

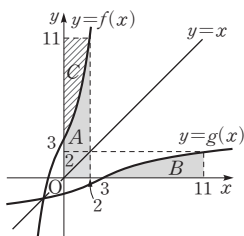
프는 두 점 $(0, 3)$,

$(2, 11)$ 을 지나는 증가하는 곡선이다.

오른쪽 그림에서 $B=C$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x) dx + \int_{f(0)}^{f(2)} g(x) dx \\ = A + B = A + C = 2 \times 11 = 22 \end{aligned}$$

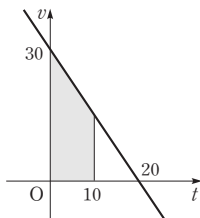
답 22



143

$$\begin{aligned} \int_0^{10} \left| 30 - \frac{3}{2}t \right| dt \\ = \left[30t - \frac{3}{4}t^2 \right]_0^{10} \\ = 225(\text{m}) \end{aligned}$$

답 225 m



144

(i) 4초 후의 점 P의 위치는

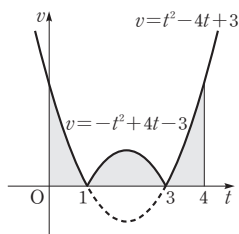
$$\begin{aligned} \int_0^4 v dt &= \int_0^4 (t^2 - 4t + 3) dt \\ &= \left[\frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t \right]_0^4 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

(ii) $t=0$ 에서 $t=4$ 까지의

경과 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^4 |v| dt &= \int_0^4 |t^2 - 4t + 3| dt \\ &= \int_0^1 (t^2 - 4t + 3) dt \\ &\quad + \int_1^3 (-t^2 + 4t - 3) dt + \int_3^4 (t^2 - 4t + 3) dt \\ &= \left[\frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t \right]_0^1 + \left[-\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 - 3t \right]_1^3 \\ &\quad + \left[\frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t \right]_3^4 \\ &= \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 4 \end{aligned}$$

답 점 P의 위치 : $\frac{4}{3}$, 경과 거리 : 4



145

정지할 때의 속도는 $v(t) = 0$ 이므로

$$v(t) = 24 - 2t = 0 \quad \therefore t = 12(\text{초})$$

따라서 열차는 제동을 건 뒤 12초 후에 정지한다.

그러므로 열차가 정지할 때까지 달린 거리 s 는

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{12} |24 - 2t| dt \\ &= \int_0^{12} (24 - 2t) dt \\ &= \left[24t - t^2 \right]_0^{12} \\ &= 144(\text{m}) \end{aligned}$$

답 144 m

146

(1) 최고점에 도달했을 때는 $v=0$ 이므로

$$-10t + 60 = 0 \quad \therefore t = 6(\text{초})$$

$$\begin{aligned} \therefore s &= \int_0^6 (-10t + 60) dt \\ &= \left[-5t^2 + 60t \right]_0^6 = 180(\text{m}) \end{aligned}$$

$$(2) s = \int_0^8 |-10t + 60| dt$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^6 (-10t + 60) dt + \int_6^8 (10t - 60) dt \\ &= \left[-5t^2 + 60t \right]_0^6 + \left[5t^2 - 60t \right]_6^8 = 200(\text{m}) \end{aligned}$$

(3) t 초 후의 높이를 $x(t)$ 라고 하면

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t (-10t + 60) dt \\ &= \left[-5t^2 + 60t \right]_0^t \\ &= -5t^2 + 60t \end{aligned}$$

땅에 떨어질 때의 높이는 0 이므로

$$-5t^2 + 60t = 0$$

$$\therefore t = 12(\text{초})$$

따라서 $t = 12$ 일 때 $v = -10t + 60$ 으로부터

$$v = -60(\text{m/초})$$

답 (1) 180 m (2) 200 m (3) -60 m/초

147

먼저 그래프를 보고 속도 v 와 시각 t 사이의 관계식을 세운다.

$$0 \leq t \leq 1 \text{ 일 때, } v = 2t$$

$$1 \leq t \leq 2 \text{ 일 때, } v = 2$$

$$2 \leq t \leq 5 \text{ 일 때, } v = -t + 4$$

(1) $t = 4$ 일 때 운동 방향이 바뀌므로 경과 거리 s 는

$$\begin{aligned} s &= \int_0^4 |v| dt \\ &= \int_0^1 2t dt + \int_1^2 2 dt + \int_2^4 (-t + 4) dt \\ &= \left[t^2 \right]_0^1 + \left[2t \right]_1^2 + \left[-\frac{1}{2}t^2 + 4t \right]_2^4 \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$(2) \int_0^5 |v| dt = \int_0^4 |v| dt - \int_4^5 (-t + 4) dt$$

$$= 5 + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{11}{2} \quad \text{답 (1) 5 (2) } \frac{11}{2}$$

다른풀이 넓이를 이용하여 구할 수도 있다.

$$\begin{aligned} (1) (\text{실제 움직인 거리}) &= \frac{1}{2} \cdot (1 + 4) \cdot 2 \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) (\text{실제 움직인 거리}) &= 5 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \\ &= \frac{11}{2} \end{aligned}$$

IV. 확률

148

서로 다른 4개에서 5개를 택하는 중복조합의 수이다.

$$\therefore {}_{4+5-1}C_5 = {}_8C_5 = {}_8C_3 = 56 \quad \text{답 56}$$

149

서로 다른 3개에서 10개를 택하는 중복조합의 수이므로

$${}_{3+10-1}C_{10} = {}_{12}C_{10} = {}_{12}C_2 = 66 \quad \text{답 66}$$

150

서로 다른 3개에서 7개를 택하는 중복조합의 수이므로

$${}_{3+7-1}C_7 = {}_9C_7 = {}_9C_2 = 36 \quad \text{답 36}$$

151

(1) a, b 의 두 문자 중에서 중복을 허락하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$$\therefore {}_{2+4-1}C_4 = {}_5C_4 = {}_5C_1 = 5$$

(2) a, b, c 의 세 문자 중에서 중복을 허락하여 6개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$$\therefore {}_{3+6-1}C_6 = {}_8C_6 = {}_8C_2 = 28$$

답 (1) 5 (2) 28

152

(1) x, y, z 중에서 중복을 허락하여 8개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$$\therefore {}_{3+8-1}C_8 = {}_{10}C_8 = {}_{10}C_2 = 45$$

(2) x, y, z 중에서 중복을 허락하여 8개를 택한다.

이때 x, y, z 는 양의 정수이므로 우선 x, y, z 를 하나씩 택한 후 x, y, z 에서 중복을 허락하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$$\therefore {}_{3+5-1}C_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = 21$$

답 (1) 45 (2) 21

153

$$\begin{aligned}
 (a-b)^6 &= {}_6C_0 a^6 + {}_6C_1 a^5(-b) + {}_6C_2 a^4(-b)^2 \\
 &\quad + {}_6C_3 a^3(-b)^3 + {}_6C_4 a^2(-b)^4 \\
 &\quad + {}_6C_5 a(-b)^5 + {}_6C_6 (-b)^6 \\
 &= a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 \\
 &\quad - 6ab^5 + b^6
 \end{aligned}$$

답 풀이 참조

154

(1) 전개식의 일반항은

$${}_8C_r (2x^3)^{8-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r = {}_8C_r \cdot 2^{8-r} \cdot x^{24-4r}$$

구하는 항이 상수항이므로

$$24-4r=0 \quad \therefore r=6$$

따라서 상수항은

$${}_8C_6 \cdot 2^2 = 112$$

(2) 전개식의 일반항은

$${}_{10}C_r (x^3)^{10-r} \left(-\frac{1}{x}\right)^r = {}_{10}C_r (-1)^r \cdot x^{30-4r}$$

$$30-4r=-2 \quad \therefore r=8$$

따라서 $\frac{1}{x^2}$ 의 계수는

$${}_{10}C_8 (-1)^8 = {}_{10}C_2 = 45$$

(3) 전개식의 일반항은

$${}_7C_r x^{7-r} \left(-\frac{1}{y}\right)^r = {}_7C_r (-1)^r x^{7-r} \left(\frac{1}{y}\right)^r$$

$$7-r=4 \quad \therefore r=3$$

$$\therefore {}_7C_3 (-1)^3 = -35$$

(4) 전개식의 일반항은

$${}_7C_r (2x)^{7-r} (-y)^r = {}_7C_r 2^{7-r} (-1)^r x^{7-r} y^r$$

$$7-r=4 \text{에서 } r=3$$

$$\therefore {}_7C_3 2^4 \cdot (-1)^3 = -560$$

답 (1) 112 (2) 45

(3) -35 (4) -560

155

전개식의 일반항은

$${}_6C_r x^{6-r} \left(-\frac{a}{x^2}\right)^r = {}_6C_r (-a)^r \cdot x^{6-3r}$$

구하는 항이 상수항이므로

$$6-3r=0 \quad \therefore r=2$$

$${}_6C_2 \cdot (-a)^2 = 60, \quad 15a^2 = 60$$

$$\therefore a=2 \quad (\because a>0)$$

답 2

156

$(x+3)^4$ 의 일반항은 ${}_4C_r x^{4-r} 3^r$

$(3x^2+5)^3$ 의 일반항은

$${}_3C_p (3x^2)^{3-p} \cdot 5^p = {}_3C_p 3^{3-p} \cdot 5^p \cdot x^{6-2p}$$

$(x+3)^4 (3x^2+5)^3$ 의 전개식의 일반항은

$${}_4C_r \cdot {}_3C_p \cdot 3^{r+3-p} \cdot 5^p \cdot x^{10-r-2p} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

x^4 항은 $10-r-2p=4$ 일 때이므로

$$r+2p=6$$

이때 r, p 의 순서쌍은

$$(r, p) = (0, 3), (2, 2), (4, 1)$$

이 값을 ①의 계수에 대입하여 더하면 x^4 의 계수는

$$\begin{aligned}
 &{}_4C_0 \cdot {}_3C_3 \cdot 3^0 \cdot 5^3 + {}_4C_2 \cdot {}_3C_2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 + {}_4C_4 \cdot {}_3C_1 \cdot 3^6 \cdot 5 \\
 &= 125 + 12150 + 10935
 \end{aligned}$$

$$= 23210$$

답 23210

157

분모가 x 이므로 $(1+2x)^5$ 의 전개식에서 x^3 의 계수

와 같다. $(1+2x)^5$ 의 일반항은

$${}_5C_r (2x)^r = {}_5C_r 2^r x^r \quad \therefore r=3$$

따라서 구하는 계수는 ${}_5C_3 \cdot 2^3 = 80$

답 80

158

첫째항이 $1+x$, 공비가 $1+x$ 인 등비수열의 첫째항
부터 제 10 항까지의 합이므로

$$\begin{aligned}
 (\text{주어진 식}) &= \frac{(1+x)\{(1+x)^{10}-1\}}{(1+x)-1} \\
 &= \frac{(1+x)^{11}-(1+x)}{x}
 \end{aligned}$$

분모가 x 이므로 $(1+x)^{11}$ 의 전개식에서 x^6 의 계수와
같다. $(1+x)^{11}$ 의 일반항은

$${}_{11}C_r x^r \text{에서 } r=6$$

따라서 구하는 계수는 ${}_{11}C_6 = {}_{11}C_5 = 462$

답 462

159

전개식의 일반항은

$$\frac{7!}{p!q!r!} x^p (2y)^q (-z)^r$$

$$= \frac{7!}{p!q!r!} 2^q (-1)^r x^p y^q z^r$$

$p=4, q=2, r=1$ 일 때이므로 구하는 계수는

$$\frac{7!}{4!2!1!} 2^2 \cdot (-1) = -420$$

답 -420

160

전개식의 일반항은

$$\frac{6!}{p!q!r!} (x^2)^p x^q 1^r = \frac{6!}{p!q!r!} x^{2p+q}$$

여기서 x^3 항이므로

$$2p+q=3 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$p+q+r=6 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$p \geq 0, q \geq 0, r \geq 0 \text{인 정수} \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

㉠에서 $q=3-2p$

㉡에서 $r=3+p$

㉢에서 $3-2p \geq 0, 3+p \geq 0$

$$0 \leq p \leq \frac{3}{2}$$

$$\therefore p=0, 1$$

$$\therefore (p, q, r) = (0, 3, 3), (1, 1, 4)$$

따라서 구하는 계수는

$$\frac{6!}{0!3!3!} + \frac{6!}{1!1!4!} = 20 + 30 = 50$$

답 50

161

전개식의 일반항은

$$\frac{3!}{p!q!r!} (x^2)^p (ax)^q 1^r = \frac{3!}{p!q!r!} a^q x^{2p+q}$$

x^3 항은 $2p+q=3, p+q+r=3$ ($p, q, r \geq 0$ 인 정수)일 때이므로 $q=3-2p, r=p$

$$3-2p \geq 0, p \geq 0 \text{에서 } 0 \leq p \leq \frac{3}{2}$$

p 는 정수이므로

$$p=0, 1$$

$$\therefore (p, q, r) = (1, 1, 1), (0, 3, 0)$$

따라서 x^3 의 계수는

$$\frac{3!}{1!1!1!} a + \frac{3!}{0!3!0!} a^3 = 7$$

$$a^3 + 6a - 7 = 0, (a-1)(a^2+a+7) = 0$$

$$\therefore a=1 (\because a \text{는 실수})$$

답 1

162

$${}_{10}C_0 + {}_{10}C_1 + {}_{10}C_2 + \dots + {}_{10}C_{10} = 2^{10}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} {}_{10}C_k = {}_{10}C_1 + {}_{10}C_2 + \dots + {}_{10}C_{10}$$

$$= 2^{10} - 1 = 1023$$

답 1023

163

$$\sum_{k=0}^9 {}_{19}C_{2k} = {}_{19}C_0 + {}_{19}C_2 + {}_{19}C_4 + \dots + {}_{19}C_{18}$$

$${}_nC_0 + {}_nC_2 + {}_nC_4 + \dots = 2^{n-1} \text{이므로}$$

$${}_{19}C_0 + {}_{19}C_2 + {}_{19}C_4 + \dots + {}_{19}C_{18} = 2^{18}$$

$$\therefore (\text{주어진 식}) = \log_4 2^{18} = \log_4 4^9 = 9$$

답 9

164

$$(\text{주어진 식}) = {}_nC_1 + 2 \cdot {}_nC_2 + 3 \cdot {}_nC_3 + \dots + n \cdot {}_nC_n$$

$$= n \cdot 2^{n-1}$$

$$= 192$$

$$n \cdot 2^{n-1} = 6 \times 2^5 \quad \therefore n=6$$

답 6

165

$${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \dots + {}_nC_n = 2^n \text{이므로}$$

$${}_nC_1 + {}_nC_2 + \dots + {}_nC_n = 2^n - 1$$

$$\therefore 2000 < 2^n - 1 < 3000$$

$$2001 < 2^n < 3001$$

그런데 n 은 양의 정수이므로

$$n=11$$

답 11

166

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라고 하면

표본공간 : {H, T}

근원사건 : {H}, {T}

답 풀이 참조

167

두 개의 동전을 각각 A, B라 하고, 앞면을 H, 뒷면을 T라고 하면

A	B	
H	<	H (H, H) T (H, T)
T	<	H (T, H) T (T, T)

∴ 4가지

또한, 같은 면이 나오는 근원사건은 둘다 앞면 또는 둘다 뒷면이 나오는 경우이다.

따라서 (H, H), (T, T)이므로 2가지이다.

답 근원사건 : 4

같은 면이 나오는 근원사건 : 2

168

사건 E와 배반인 사건은

$E^C = \{4, 5, 6\}$ 의 부분집합

사건 F와 배반인 사건은

$F^C = \{1, 5, 6\}$ 의 부분집합

따라서 E와도 배반이고 F와도 배반인 사건 H는 E^C 과 F^C 의 교집합 $\{5, 6\}$ 의 부분집합이어야 한다.

∴ $2^2 = 4$

답 4

169

표본공간을 S라고 하면 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 이고 $A = \{3, 6\}$ 이다.

이때 사건 A와 서로 배반인 사건을 B라고 하면

$A \cap B = \emptyset$ 이므로 $B \subset A^C = \{1, 2, 4, 5\}$ 이다.

따라서 사건 A와 서로 배반인 사건의 개수는 A^C 의 부분집합의 개수와 같다.

∴ $2^4 = 16$

답 16

170

두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$$6 \times 6 = 36$$

(i) 눈의 차가 3인 경우는 (1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 1), (5, 2), (6, 3)의 6가지

(ii) 눈의 차가 4인 경우는 (1, 5), (2, 6), (5, 1), (6, 2)의 4가지

(iii) 눈의 차가 5인 경우는 (1, 6), (6, 1)의 2가지
따라서 눈의 차가 3 이상이 되는 경우의 수는

$$6 + 4 + 2 = 12$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

답 $\frac{1}{3}$

171

주사위 한 개를 3번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는 6^3

이 중에서 눈의 합이 5인 경우는 (1, 1, 3), (1, 2, 2), (1, 3, 1), (2, 1, 2), (2, 2, 1), (3, 1, 1)의 6가지

따라서 구하는 확률은 $\frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}$

답 $\frac{1}{36}$

172

여섯 사람이 한 줄로 서는 경우의 수는 6!

이 중에서 특정한 세 사람이 이웃하여 서게 되는 경우의 수는

$$4! \times 3!$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{4! \times 3!}{6!} = \frac{1}{5}$

답 $\frac{1}{5}$

173

6개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는 6!

자음 b, c, d, f를 일렬로 나열 $\text{V}(\text{b})(\text{c})(\text{d})(\text{f})\text{V}$
하는 방법의 수는 4!

또한, 모음 a, e가 이웃하지 않도록 5곳 중 2곳에 a와 e를 나열하는 방법의 수는 ${}_5P_2$

따라서 구하는 확률은 $\frac{4! \times {}_5P_2}{6!} = \frac{2}{3}$

답 $\frac{2}{3}$

174

9개의 공 중에서 4개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_9C_4$

5개의 흰 공 중에서 2개, 4개의 검은 공 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_5C_2 \times {}_4C_2$

따라서 구하는 확률은 $\frac{{}_5C_2 \times {}_4C_2}{{}_9C_4} = \frac{10}{21}$ 답 $\frac{10}{21}$

175

전체 7대의 화재경보기에서 3대를 선택하는 경우의 수는 ${}_7C_3$

양호한 4대의 화재경보기에서 3대를 선택하는 경우의 수는 ${}_4C_3$

따라서 구하는 확률은 $\frac{{}_4C_3}{{}_7C_3} = \frac{4}{35}$ 답 $\frac{4}{35}$

176

50개의 제비에서 3개를 뽑는 경우의 수는 ${}_{50}C_3$

(1) 5개에서 3개를 뽑는 경우이므로 구하는 확률은

$$\frac{{}_5C_3}{{}_{50}C_3} = \frac{1}{1960}$$

(2) 당첨 제비 5개에서 1개를, 당첨 제비가 아닌 45개에서 2개를 뽑는 경우이므로

$${}_5C_1 \times {}_{45}C_2$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{{}_5C_1 \times {}_{45}C_2}{{}_{50}C_3} = \frac{99}{392}$

(3) 당첨 제비 5개에서 2개를, 당첨 제비가 아닌 45개에서 1개를 뽑는 경우이므로

$${}_5C_2 \times {}_{45}C_1$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{{}_5C_2 \times {}_{45}C_1}{{}_{50}C_3} = \frac{9}{392}$

$$\text{답 (1)} \frac{1}{1960} \quad (2) \frac{99}{392} \quad (3) \frac{9}{392}$$

177

9개에서 4개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_9C_4$

8과 9의 번호가 쓰여 있지 않은 7개의 공에서 4개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_7C_4$

따라서 구하는 확률은 $\frac{{}_7C_4}{{}_9C_4} = \frac{5}{18}$ 답 $\frac{5}{18}$

178

10개에서 5개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_{10}C_5$$

양호한 제품 6개 중에서 3개를 꺼내고, 불량품 4개 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_6C_3 \times {}_4C_2$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{{}_6C_3 \times {}_4C_2}{{}_{10}C_5} = \frac{10}{21}$

$$\text{답 } \frac{10}{21}$$

179

10000명 중 100명이 위암이 발생하였으므로 위암에 걸릴 확률은

$$\frac{100}{10000} = 0.01$$

$$\text{답 } 0.01$$

180

흰 바둑돌의 개수를 n 개라고 하면 2개를 꺼낼 때, 모

두 흰 바둑돌일 확률은 $\frac{{}_n C_2}{{}_8 C_2}$

2개 모두 흰 바둑돌일 통계적 확률은 $\frac{3}{4}$ 이므로

$$\frac{{}_n C_2}{{}_8 C_2} = \frac{3}{4}$$

$$n^2 - n - 42 = 0, (n-7)(n+6) = 0$$

$n > 0$ 이므로 $n = 7$

$$\text{답 } 7$$

181

9개의 공 중에서 3개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_9C_3$

3개 모두 흰 공일 확률은 $\frac{{}_4C_3}{{}_9C_3}$

3개 모두 검은 공일 확률은 $\frac{{}_5C_3}{{}_9C_3}$

두 사건은 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\frac{{}_4C_3}{{}_9C_3} + \frac{{}_5C_3}{{}_9C_3} = \frac{1}{21} + \frac{5}{42}$$

$$= \frac{1}{6}$$

$$\text{답 } \frac{1}{6}$$

182

갑, 을이 문제를 풀 사건을 각각 A, B 라고 하면

$$P(A)=0.7, P(B)=0.5, P(A \cup B)=0.9$$

따라서 갑, 을 모두 문제를 풀 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) + P(B) - P(A \cup B) \\ &= 0.7 + 0.5 - 0.9 \\ &= 0.3 \end{aligned} \quad \text{답 } 0.3$$

183

10개 중에서 3개의 제품을 꺼내는 방법의 수는

$${}_{10}C_3$$

이때 불량품이 1개 이하인 경우는

A : 우량품 2개, 불량품 1개

B : 우량품 3개, 불량품 0개

2개의 우량품과 1개의 불량품을 꺼내는 방법의 수는

$${}_8C_2 \times {}_2C_1$$

$$\therefore P(A) = \frac{{}_8C_2 \times {}_2C_1}{{}_{10}C_3} = \frac{7}{15}$$

또, 3개의 우량품을 꺼내는 방법의 수는 ${}_8C_3$

$$\therefore P(B) = \frac{{}_8C_3}{{}_{10}C_3} = \frac{7}{15}$$

한편, 두 사건 A, B 는 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \\ &= \frac{7}{15} + \frac{7}{15} = \frac{14}{15} \end{aligned} \quad \text{답 } \frac{14}{15}$$

다른풀이 여사건의 확률을 이용하면 불량품이 1개 이하인 사건은 불량품이 2개인 사건의 여사건이 된다. 따라서 구하는 확률은

$$1 - \frac{{}_8C_1 \times {}_2C_2}{{}_{10}C_3} = \frac{14}{15}$$

184

2개 모두 붉은 공일 사건을 A 라고 하면

$$P(A) = \frac{{}_3C_2}{{}_8C_2} = \frac{3}{28}$$

따라서 적어도 1개가 흰 공일 사건은 2개 모두 붉은 공일 사건의 여사건이므로

$$P(A^c) = 1 - \frac{3}{28} = \frac{25}{28} \quad \text{답 } \frac{25}{28}$$

185

2개 모두 당첨 제비가 아닐 사건을 A 라고 하면

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{{}_{20-n}C_2}{{}_{20}C_2} \\ &= \frac{(20-n)(19-n)}{20 \cdot 19} \\ \therefore P(A^c) &= 1 - P(A) \\ &= 1 - \frac{(20-n)(19-n)}{20 \cdot 19} \\ &= \frac{18}{19} \end{aligned}$$

$$n^2 - 39n + 360 = 0, (n-24)(n-15) = 0$$

$$\therefore n=24 \text{ 또는 } n=15$$

그런데 $n \leq 20$ 이므로 $n=15$ 답 15

186

구하는 확률은 흰 공이 1개 이하일 사건의 여사건의 확률이다.

(i) 흰 공 1개, 파란 공 3개를 꺼낼 확률은

$$\frac{{}_6C_1 \times {}_4C_3}{{}_{10}C_4} = \frac{4}{35}$$

(ii) 파란 공 4개를 꺼낼 확률은

$$\frac{{}_4C_4}{{}_{10}C_4} = \frac{1}{210}$$

따라서 구하는 확률은

$$1 - \left(\frac{4}{35} + \frac{1}{210} \right) = \frac{37}{42} \quad \text{답 } \frac{37}{42}$$

187

$$P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B)$$

$$0.4 = 1 - P(A \cup B)$$

$$\therefore P(A \cup B) = 0.6$$

그런데 A, B 는 서로 독립이므로

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B) \\ &= 0.4P(B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) \end{aligned}$$

$$0.6 = 0.4 + P(B) - 0.4P(B)$$

$$\therefore P(B) = \frac{1}{3} \quad \text{답 } \frac{1}{3}$$

188

$$\begin{aligned}
 & P((A-B) \cup (B-A)) \\
 &= P(A-B) + P(B-A) \quad \leftarrow A-B \text{와 } B-A \text{는} \\
 &= P(A \cap B^c) + P(B \cap A^c) \quad \text{배반사건이므로} \\
 &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \\
 &= \frac{1}{2} \quad \text{답 } \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

189

$$\begin{aligned}
 P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\
 &= \frac{P(A) + P(B) - P(A \cup B)}{P(B)} \\
 &= \frac{0.3 + 0.2 - 0.4}{0.2} = 0.5 \\
 P(A^c|B^c) &= \frac{P(A^c \cap B^c)}{P(B^c)} \\
 &= \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(B)} \\
 &= \frac{1 - 0.4}{1 - 0.2} = 0.75 \\
 &\text{답 } P(A|B) = 0.5, P(A^c|B^c) = 0.75
 \end{aligned}$$

190

눈의 합이 6인 사건을 A , 두 개의 주사위의 눈이 모두 3인 사건을 B 라고 하면

$$A = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$$

$$B = \{(3, 3)\}$$

$$A \cap B = \{(3, 3)\}$$

$$\therefore P(A) = \frac{5}{36}, P(A \cap B) = \frac{1}{36}$$

$$\therefore P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{5} \quad \text{답 } \frac{1}{5}$$

191

남학생을 뽑는 사건을 A , 자전거 통학생을 뽑는 사건을 B 라고 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$ 이다.

$$P(A) = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

$$P(A \cap B) = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$$

$$\therefore P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{5} \quad \text{답 } \frac{3}{5}$$

192

한 개의 공을 주머니 A , B 에서 꺼내는 사건을 각각 A , B 라 하고, 흰 공일 사건을 C 라고 하면 흰 공이 A 주머니에서 나왔을 확률은 $P(A|C)$ 이다.

$$P(A \cap C) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$$

$$P(B \cap C) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore P(A|C) &= \frac{P(A \cap C)}{P(C)} \\
 &= \frac{P(A \cap C)}{P(A \cap C) + P(B \cap C)} \\
 &= \frac{\frac{4}{15}}{\frac{4}{15} + \frac{1}{6}} \\
 &= \frac{8}{13} \quad \text{답 } \frac{8}{13}
 \end{aligned}$$

193

기계 A , B 의 제품일 사건을 각각 A , B 라 하고, 불량품일 사건을 E 라고 하면

(i) 기계 A 에서 불량품이 나올 확률은 $P(A \cap E)$

$$P(A \cap E) = P(A) \cdot P(E|A) = \frac{40}{100} \times \frac{5}{100}$$

(ii) 기계 B 에서 불량품이 나올 확률은 $P(B \cap E)$

$$P(B \cap E) = P(B) \cdot P(E|B) = \frac{60}{100} \times \frac{3}{100}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore P(E) &= P(A \cap E) + P(B \cap E) \\
 &= \frac{40}{100} \times \frac{5}{100} + \frac{60}{100} \times \frac{3}{100} \\
 &= \frac{19}{500}
 \end{aligned}$$

1개의 제품이 불량품일 때, 그것이 기계 A 에서 생산되었을 확률은 $P(A|E)$ 이므로

$$P(A|E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{40}{100} \times \frac{5}{100}}{\frac{19}{500}} = \frac{10}{19}$$

답 $\frac{10}{19}$

194

처음에 흰 공이 나오는 사건을 A 라고 하면

$$P(A) = \frac{4}{7}$$

두 번째 검은 공이 나오는 사건을 B 라고 하면 처음에 흰 공이 나오고 두 번째에 검은 공이 나올 확률 $P(B|A)$ 는

$$P(B|A) = \frac{3}{6}$$

따라서 구하는 확률 $P(A \cap B)$ 는

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B|A) \\ &= \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{2}{7} \end{aligned}$$

답 $\frac{2}{7}$

195

한국인일 사건을 A , 여성일 사건을 B 라고 하면 한국인 여성일 사건은 $A \cap B$ 이다.

$$P(A) = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$$

한국인 중에서 여성일 확률 $P(B|A)$ 는

$$P(B|A) = \frac{3}{4+3} = \frac{3}{7}$$

따라서 한국인 여성일 확률 $P(A \cap B)$ 는

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B|A) \\ &= \frac{3}{10} \times \frac{3}{7} = \frac{9}{70} \end{aligned}$$

답 $\frac{9}{70}$

196

A주머니에서 흰 바둑돌을 꺼내는 사건을 A , B주머니에서 흰 바둑돌을 꺼내는 사건을 B 라고 하면 두 사건 A , B 는 서로 독립이다.

따라서 구하는 확률은

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{9} = \frac{2}{9}$$

답 $\frac{2}{9}$

197

갑, 을이 탈락할 사건을 각각 A , B 라고 하면

$$P(A) = \frac{5}{8}$$

갑이 탈락했을 때, 을이 탈락할 확률 $P(B|A)$ 는

$$P(B|A) = \frac{4}{7}$$

따라서 갑과 을이 모두 탈락할 확률 $P(B \cap A)$ 는

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B|A) \\ &= \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{5}{14} \end{aligned}$$

답 $\frac{5}{14}$

198

갑, 을이 흰 공을 꺼내는 사건을 각각 A , B 라고 하면 갑과 을 모두 흰 공을 꺼내는 사건은 $A \cap B$ 이다.

(i) 갑이 흰 공을 꺼내고 을도 흰 공을 꺼내는 사건은 $P(A \cap B)$ 이므로

$$P(A) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}, P(B|A) = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$$

따라서 갑과 을이 모두 흰 공을 꺼낼 확률

$P(A \cap B)$ 는

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B|A) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{2}{7} = \frac{2}{21} \end{aligned}$$

(ii) 갑이 검은 공, 을이 흰 공을 꺼내는 사건은

$$A^c \cap B \text{이므로 } P(A^c) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \text{에서}$$

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B) &= P(A^c) \cdot P(B|A^c) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{5}{14} \\ &= \frac{5}{21} \end{aligned}$$

(i), (ii)는 서로 배반사건이므로 을이 흰 공을 꺼낼 확률은

$$\frac{2}{21} + \frac{5}{21} = \frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

참고 $P(B|A^c)$ 은 갑이 검은 공을 꺼냈다는 조건하에 을이 흰 공을 꺼낼 확률이다.

즉, 공 14개 중 흰 공이 5개 있으므로

$$P(B|A^c) = \frac{5}{14}$$

199

(1) (i) 남편이 생존할 확률은 $\frac{1}{5}$, 부인이 사망할

확률은 $\frac{3}{4}$ 이므로 남편만 생존할 확률은

$$\frac{1}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{20}$$

(ii) 부인이 생존할 확률은 $\frac{1}{4}$, 남편이 사망할

확률은 $\frac{4}{5}$ 이므로 부인만 생존할 확률은

$$\frac{1}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

따라서 두 사람 중 한 사람만 생존할 확률은

$$\frac{3}{20} + \frac{1}{5} = \frac{7}{20}$$

(2) 두 사람이 모두 사망할 사건의 여사건의 확률이므로 구하는 확률은

$$1 - \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{2}{5} \quad \text{답 (1) } \frac{7}{20} \quad (2) \frac{2}{5}$$

200

갑, 을 모두 문제를 못 풀 확률은

$$\left(1 - \frac{3}{4}\right) \times \left(1 - \frac{4}{5}\right) = \frac{1}{20}$$

따라서 적어도 한 사람이 문제를 풀 확률은

$$1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20} \quad \text{답 } \frac{19}{20}$$

201

모두 명중하지 못할 확률은

$$(1 - 0.8) \times (1 - 0.6) = 0.08$$

적어도 한 발이 표적에 명중될 확률은 A, B 중 적어도 어느 한 사람이 명중할 확률과 같으므로 구하는 확률은

$$1 - 0.08 = 0.92 \quad \text{답 } 0.92$$

202

A, B가 문제를 푸는 사건을 각각 A, B라고 하면

$$P(A \cup B) = \frac{9}{10}, P(A) = \frac{3}{5}$$

그런데 A, B는 서로 독립이므로

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$= \frac{3}{5} P(B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\frac{9}{10} = \frac{3}{5} + P(B) - \frac{3}{5} P(B)$$

$$\therefore P(B) = \frac{3}{4}$$

따라서 B 혼자서 풀 수 있는 확률은 $\frac{3}{4}$ 이다.

$$\text{답 } \frac{3}{4}$$

203

1 또는 2의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$ 이므로 1 또는 2의 눈이 나오지 않을 확률은 $\frac{2}{3}$ 이다.

또, 갑이 이기는 경우는 제 1회, 제 3회, 제 5회, ... 이고, 이들은 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^4 \times \frac{1}{3} + \dots$$

$$= \frac{\frac{1}{3}}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{3}{5} \quad \text{답 } \frac{3}{5}$$

204

갑이 이기는 경우는 다음과 같다.

1회 (갑)	2회 (을)	3회 (갑)	4회 (을)	5회 (갑)
○				
×	×	○		
×	×	×	×	○

흰 공을 꺼낼 확률은 $\frac{1}{4}$ 이고, 검은 공을 꺼낼 확률은 $\frac{3}{4}$ 이다.

갑이 제 1회에서 이길 확률은 $\frac{1}{4}$

제 3회에서 이길 확률은

$$\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{1}{4}$$

제 5회에서 이길 확률은

$$\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \times \frac{1}{4}$$

⋮

따라서 갑이 이길 확률은

$$\frac{\frac{1}{4}}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{4}{7} \quad \text{답 } \frac{4}{7}$$

205

$A = \{3, 6, 9, \dots, 18\}$, $B = \{5, 10, 15, 20\}$

$A \cap B = \{15\}$

$$P(A) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

$$P(B) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{20}$$

$$\therefore P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$$

따라서 두 사건 A 와 B 는 서로 종속이다.

답 종속

206

동전을 3회 던질 때, 생기는 모든 경우의 수는 8가지
이고 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라고 하면

$A = \{HHH, HHT, HTH, HTT\}$

$B = \{HHH, HHT, THH, THT\}$

$C = \{HHT, THH\}$

$A \cap B = \{HHH, HHT\}$

$A \cap C = \{HHT\}$

$B \cap C = \{HHT, THH\}$

$$\neg. P(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A)P(B)$$

즉, 사건 A 와 B 는 서로 독립이다.

$$\neg. P(A \cap C) = \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = P(A)P(C)$$

즉, 사건 A 와 C 는 서로 독립이다.

$$\neg. P(B \cap C) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = P(B)P(C)$$

즉, 사건 B 와 C 는 서로 독립이 아니다.

따라서 보기 중 독립이 아닌 것은 ㄷ이다. 답 ㄷ

207

주사위를 한 번 던질 때, 1의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$

$P_r = {}_nC_r p^r q^{n-r}$ 에서

$$n=5, r=1, p=\frac{1}{6}, q=\frac{5}{6}$$

$$\therefore P_1 = {}_5C_1 \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \left(\frac{5}{6}\right)^5 \quad \text{답 } \left(\frac{5}{6}\right)^5$$

208

문제를 풀 확률 p 는 $p = \frac{3}{5}$

문제를 풀지 못할 확률 q 는 $q = \frac{2}{5}$

4문제 중 2문제, 3문제, 4문제를 푸는 사건을 각각
 A, B, C 라고 하면

(i) 4문제 중 2문제를 풀 확률은

$$P(A) = {}_4C_2 \left(\frac{3}{5}\right)^2 \left(\frac{2}{5}\right)^2$$

(ii) 4문제 중 3문제를 풀 확률은

$$P(B) = {}_4C_3 \left(\frac{3}{5}\right)^3 \left(\frac{2}{5}\right)$$

(iii) 4문제 중 4문제 모두 풀 확률은

$$P(C) = {}_4C_4 \left(\frac{3}{5}\right)^4$$

이들은 모두 배반사건이므로

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

$$= 6 \times \frac{36}{625} + 4 \times \frac{54}{625} + 1 \times \frac{81}{625}$$

$$= \frac{513}{625} \quad \text{답 } \frac{513}{625}$$

209

1발의 탄환이 표적에 명중할 확률 p 는 $p = \frac{2}{3}$

명중하지 못할 확률 q 는 $q = \frac{1}{3}$

(i) 4발 중 2발이 명중할 확률은

$${}_4C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

(ii) 4발 중 3발이 명중할 확률은

$${}_4C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)$$

(iii) 4발 모두 명중할 확률은

$${}_4C_4\left(\frac{2}{3}\right)^4$$

이들은 모두 배반사건이므로 구하는 확률은

$$6 \times \frac{4}{81} + 4 \times \frac{8}{81} + 1 \times \frac{16}{81} = \frac{8}{9} \quad \text{답 } \frac{8}{9}$$

다른풀이 여사건의 확률을 이용한다.

적어도 2발이 명중할 확률은 전체 확률에서 1발 이하로 명중시킬 확률을 빼면 된다.

$$\therefore 1 - \left[{}_4C_0\left(\frac{1}{3}\right)^4 + {}_4C_1\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^3 \right] = \frac{8}{9}$$

210

먼저 3번 이기면 승리하므로 5번째 시합에서 감이 승자가 되는 경우는 4번까지의 시합에서 2번 이기고 5번째 시합에서 이기면 된다.

따라서 구하는 확률은

$${}_4C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} = \frac{16}{81} \quad \text{답 } \frac{16}{81}$$

211

(i) 주사위를 던져 3의 배수의 눈, 즉 3 또는 6이 나오면 동전을 3번 던지고 이때 앞면이 2번 나올 확률은

$$\frac{2}{6} \times {}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{8}$$

(ii) 주사위를 던져 4의 배수의 눈, 즉 4가 나오면 동전을 4번 던지고 이때 앞면이 2번 나올 확률은

$$\frac{1}{6} \times {}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16} \quad \text{답 } \frac{3}{16}$$

V. 통계

212

확률의 총합이 1이므로

$$a + \frac{1}{4} + a = 1 \quad \therefore a = \frac{3}{8}$$

$$\begin{aligned} \therefore P(X^2 + X = 0) &= P(X = -1 \text{ 또는 } X = 0) \\ &= P(X = -1) + P(X = 0) \\ &= \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8} \quad \text{답 } \frac{5}{8} \end{aligned}$$

213

(1) 두 수의 차가 1인 경우는 (5, 4), (4, 3), (3, 2), (2, 1)

두 수의 차가 2인 경우는 (5, 3), (4, 2), (3, 1)

두 수의 차가 3인 경우는 (5, 2), (4, 1)

두 수의 차가 4인 경우는 (5, 1)

이므로 두 수의 차 X 가 취할 수 있는 값은 1, 2, 3, 4이다.

또, 5개 중에서 2개를 뽑는 경우의 수는

${}_5C_2 = 10$ (가지)이고 X 의 각 값에 대한 확률은 다음과 같다.

$$P(X=1) = \frac{4}{10}, P(X=2) = \frac{3}{10}$$

$$P(X=3) = \frac{2}{10}, P(X=4) = \frac{1}{10}$$

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

(2) $P(1 \leq X \leq 3)$

$$= P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$$

$$= \frac{4}{10} + \frac{3}{10} + \frac{2}{10}$$

$$= \frac{9}{10}$$

답 (1) 풀이 참조 (2) $\frac{9}{10}$

214

불량품의 개수 X 가 취할 수 있는 값은 불량품이 0개, 불량품이 1개, 불량품이 2개의 경우가 있으므로

$X=0, 1, 2$ 이고 X 의 각 값에 대한 확률은

$$P(X=0) = \frac{{}_4C_2}{{}_6C_2} = \frac{2}{5}$$

$$P(X=1) = \frac{{}_2C_1 \times {}_4C_1}{{}_6C_2} = \frac{8}{15}$$

$$P(X=2) = \frac{{}_2C_2}{{}_6C_2} = \frac{1}{15}$$

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

$$\therefore P(X \geq 1) = P(X=1) + P(X=2)$$

$$= \frac{8}{15} + \frac{1}{15}$$

$$= \frac{3}{5}$$

답 $\frac{3}{5}$

215

동전을 두 번 던질 때, 나오는 경우와 액수는 다음과 같다. (H : 앞면, T : 뒷면)

$$(H, H) \rightarrow 100 + 100 = 200$$

$$(H, T) \rightarrow 100 + 20 = 120$$

$$(T, H) \rightarrow 20 + 100 = 120$$

$$(T, T) \rightarrow 20 + 20 = 40$$

따라서 X 가 취할 수 있는 값은 40, 120, 200이고, 이에 대응하는 확률은 각각 $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ 이다.

X	40	120	200	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

$$\therefore E(X) = 40 \times \frac{1}{4} + 120 \times \frac{1}{2} + 200 \times \frac{1}{4}$$

$$= 120(\text{원})$$

답 120원

216

불량품의 개수 X 가 취할 수 있는 값은 0, 1, 2이고

$$P(X=0) = \frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} = \frac{3}{10}$$

$$P(X=1) = \frac{{}_3C_1 \times {}_2C_1}{{}_5C_2} = \frac{6}{10}$$

$$P(X=2) = \frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} = \frac{1}{10}$$

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

$$\therefore E(X) = 0 \times \frac{3}{10} + 1 \times \frac{6}{10} + 2 \times \frac{1}{10} = \frac{4}{5}$$

답 $\frac{4}{5}$

217

확률변수 X 는 1, 2, ..., 6의 값을 취하므로 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	6	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$$\therefore E(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6}$$

$$+ 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{7}{2}$$

$$V(X) = 1^2 \times \frac{1}{6} + 2^2 \times \frac{1}{6} + 3^2 \times \frac{1}{6}$$

$$+ 4^2 \times \frac{1}{6} + 5^2 \times \frac{1}{6} + 6^2 \times \frac{1}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$= \frac{35}{12}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

$$= \sqrt{\frac{35}{12}} = \frac{\sqrt{105}}{6}$$

$$\text{답 분산 : } \frac{35}{12}, \text{ 표준편차 : } \frac{\sqrt{105}}{6}$$

218

확률변수 X 의 확률분포는 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$$\therefore E(X) = 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$$

$$V(X) = 1^2 \times \frac{3}{8} + 2^2 \times \frac{3}{8} + 3^2 \times \frac{1}{8} - \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$= \frac{3}{4}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{답 평균 : } \frac{3}{2}, \text{ 표준편차 : } \frac{\sqrt{3}}{2}$$

219

확률변수 X 가 취할 수 있는 값은 0, 1, 2이고 X 가 이들 값을 취할 확률은 각각

$$\frac{{}_7C_2}{{}_{10}C_2} = \frac{7}{15}, \quad \frac{{}_7C_1 \times {}_3C_1}{{}_{10}C_2} = \frac{7}{15}, \quad \frac{{}_3C_2}{{}_{10}C_2} = \frac{1}{15}$$

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

$$\therefore E(X) = 0 \times \frac{7}{15} + 1 \times \frac{7}{15} + 2 \times \frac{1}{15} = \frac{3}{5}$$

$$V(X) = 1^2 \times \frac{7}{15} + 2^2 \times \frac{1}{15} - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{28}{75}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{28}{75}} = \frac{2\sqrt{21}}{15}$$

$$\text{답 분산 : } \frac{28}{75}, \text{ 표준편차 : } \frac{2\sqrt{21}}{15}$$

220

확률변수 X 의 값은 0, 1, 2이고 이에 대응하는 확률은

$$P(X=0) = \frac{{}_2C_2}{{}_4C_2} = \frac{1}{6}$$

$$P(X=1) = \frac{{}_2C_1 \times {}_2C_1}{{}_4C_2} = \frac{2}{3}$$

$$P(X=2) = \frac{{}_2C_2}{{}_4C_2} = \frac{1}{6}$$

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

$$\therefore E(X) = 1 \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{1}{6} = 1$$

$$V(X) = 1^2 \times \frac{2}{3} + 2^2 \times \frac{1}{6} - 1^2 = \frac{1}{3}$$

$$\therefore E(3X+2) = 3E(X) + 2 = 3 \times 1 + 2 = 5$$

$$V(-3X+2) = (-3)^2 V(X) = 9 \times \frac{1}{3} = 3$$

$$\text{답 } E(3X+2) = 5, V(-3X+2) = 3$$

221

$E(X)=0$, $V(X)=1$, $E(Y)=5$, $V(Y)=100$ 이므로

$$E(aX+b) = aE(X) + b = 5$$

$$a \times 0 + b = 5 \quad \therefore b = 5$$

또, $V(Y)=100$ 이므로

$$V(aX+b) = a^2 V(X)$$

$$= 100$$

$$a^2 \times 1 = 100 \quad \therefore a = 10 (\because a > 0)$$

$$\therefore a - b = 10 - 5 = 5$$

답 5

222

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 \text{에서}$$

$$E(X)=1, \sigma(X)=2 \text{이므로}$$

$$V(X)=4$$

$$\therefore E(X^2) = V(X) + \{E(X)\}^2 = 4 + 1 = 5$$

$$\text{또, } \sigma(-2X+3) = |-2|\sigma(X) = 2 \times 2 = 4$$

$$\text{답 } E(X^2)=5, \sigma(-2X+3)=4$$

223

예약한 사람이 승차할 확률은 0.95이고 승차하지 않을 확률은 0.05이다. 그러므로 예약한 50명 중에서 승차하는 사람의 수를 확률변수 X 라고 하면 X 는 이항분포 $B(50, 0.95)$ 를 따른다.

$$\text{즉, } P(X=x) = {}_{50}C_x (0.95)^x (0.05)^{50-x}$$

$$(x=0, 1, 2, \dots, 50)$$

한편, 좌석이 부족한 것은 $X \geq 49$ 의 경우이므로 구하는 확률은

$$P(X \geq 49) = P(X=49) + P(X=50)$$

$$= {}_{50}C_{49} (0.95)^{49} (0.05) + {}_{50}C_{50} (0.95)^{50}$$

$$= 50 \times 0.95^{49} \times 0.05 + 0.95^{50}$$

$$= 0.2795$$

$$\text{답 } 0.2795$$

224

$$(1) E(X) = 50 \times \frac{2}{5} = 20$$

$$\sigma(X) = \sqrt{50 \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5}} = 2\sqrt{3}$$

$$(2) E(X) = 100 \times \frac{1}{10} = 10$$

$$\sigma(X) = \sqrt{100 \times \frac{1}{10} \times \frac{9}{10}} = 3$$

$$\text{답 (1) 평균 : 20, 표준편차 : } 2\sqrt{3}$$

$$(2) \text{평균 : 10, 표준편차 : 3}$$

225

$n=100$, $p=0.2$ 이고 X 는 이항분포 $B(100, 0.2)$ 를 따르므로

$$E(X) = 100 \times 0.2 = 20$$

$$\sigma(X) = \sqrt{100 \times 0.2 \times (1-0.2)} = 4$$

답 평균 : 20, 표준편차 : 4

226

$n=3$, 앞면이 나올 확률 $p=\frac{1}{2}$ 이므로 $B(3, \frac{1}{2})$

$$\therefore V(X) = npq$$

$$= 3 \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} \quad \text{답 } \frac{3}{4}$$

227

한 번 던질 때, 2의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$ 이므로

$$B\left(600, \frac{1}{6}\right)$$

$$\therefore E(X) = 600 \times \frac{1}{6} = 100$$

$$\sigma(X) = \sqrt{600 \times \frac{1}{6} \times \left(1 - \frac{1}{6}\right)} = \frac{5\sqrt{30}}{3}$$

답 평균 : 100, 표준편차 : $\frac{5\sqrt{30}}{3}$

228

$B(n, p)$ 에서

$$np = 0.95 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\sqrt{np(1-p)} = 0.95 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉡} \text{에서 } np(1-p) = (0.95)^2 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$\textcircled{㉠}$ 을 $\textcircled{㉢}$ 에 대입하면

$$0.95 \times (1-p) = (0.95)^2 \quad \therefore p = 0.05$$

이것을 $\textcircled{㉠}$ 에 대입하면 $n=19$

$$\therefore p=0.05, n=19 \quad \text{답 } p=0.05, n=19$$

229

X 는 이항분포 $B\left(10, \frac{1}{2}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = 10 \times \frac{1}{2} = 5$$

$$\therefore E(2X+1) = 2E(X) + 1 = 11 (\text{원})$$

답 11원

230

1회의 시행에서 짝수의 눈이 나올 확률은

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \therefore B\left(120, \frac{1}{2}\right)$$

$$E(X) = 120 \times \frac{1}{2} = 60$$

$$V(X) = 120 \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 30$$

$$E(X^2) = V(X) + \{E(X)\}^2 \text{에서}$$

$$E(X^2) = 30 + 60^2 = 3630$$

$$\begin{aligned} \therefore E\{(X-a)^2\} &= E(X^2) - 2aE(X) + a^2 \\ &= 3630 - 2a \times 60 + a^2 \\ &= (a-60)^2 + 30 \end{aligned}$$

따라서 $a=60$ 일 때, 최솟값은 30이다.

답 $a=60$, 최솟값 : 30

231

$$\left| \frac{X}{n} - \frac{1}{6} \right| < 0.01 \text{에서}$$

$$-0.01 + \frac{1}{6} < \frac{X}{n} < 0.01 + \frac{1}{6}$$

여기서 $n=30$ 인 경우이므로

$$-0.01 + \frac{1}{6} < \frac{X}{30} < 0.01 + \frac{1}{6}$$

$$4.7 < X < 5.3 \quad \therefore X=5$$

본문 269쪽의 이항분포표를 이용하면

$$P(X=5) = 0.192 \quad \text{답 } 0.192$$

232

$$\begin{aligned} (1) \int_0^3 ax(x-3)dx &= \int_0^3 (ax^2 - 3ax)dx \\ &= \left[\frac{a}{3}x^3 - \frac{3}{2}ax^2 \right]_0^3 \\ &= -\frac{9}{2}a = 1 \end{aligned}$$

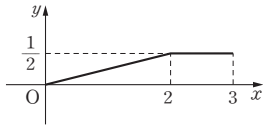
$$\therefore a = -\frac{2}{9}$$

$$\begin{aligned} (2) P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{5}{2}\right) &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} \left\{ -\frac{2}{9}x(x-3) \right\} dx \\ &= \left[-\frac{2}{27}x^3 + \frac{1}{3}x^2 \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} = \frac{23}{27} \end{aligned}$$

답 (1) $-\frac{2}{9}$ (2) $\frac{23}{27}$

233

$y=f(x)$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.



$$\begin{aligned} P(1 \leq X \leq 3) &= P(1 \leq X \leq 2) + P(2 \leq X \leq 3) \\ &= \int_1^2 \frac{1}{4}x dx + \int_2^3 \frac{1}{2} dx \\ &= \left[\frac{1}{8}x^2 \right]_1^2 + \left[\frac{1}{2}x \right]_2^3 \\ &= \frac{3}{8} + \frac{1}{2} = \frac{7}{8} \quad \text{답 } \frac{7}{8} \end{aligned}$$

다른풀이 넓이를 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} P(1 \leq X \leq 3) &= P(0 \leq X \leq 2) + P(2 \leq X \leq 3) \\ &\quad - P(0 \leq X \leq 1) \\ &= 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} - 1 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \\ &= 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \end{aligned}$$

234

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x) dx &= \int_0^2 (3kx - kx^2) dx \\ &= \left[\frac{3k}{2}x^2 - \frac{k}{3}x^3 \right]_0^2 = \frac{10}{3}k = 1 \\ \therefore k &= \frac{3}{10} \end{aligned}$$

따라서 $f(x) = \frac{3}{10}x(3-x)$ ($0 \leq x \leq 2$)이므로

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^2 xf(x) dx = \int_0^2 x \cdot \frac{3}{10}x(3-x) dx \\ &= \left[\frac{9}{10} \cdot \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{4}x^4 \right]_0^2 = \frac{6}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= \int_0^2 x^2 f(x) dx - m^2 \\ &= \int_0^2 x^2 \cdot \frac{3}{10}x(3-x) dx - \left(\frac{6}{5}\right)^2 \\ &= \frac{3}{10} \left[\frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5 \right]_0^2 - \frac{36}{25} \\ &= \frac{42}{25} - \frac{36}{25} = \frac{6}{25} \\ \text{답 } E(X) &= \frac{6}{5}, V(X) = \frac{6}{25} \end{aligned}$$

235

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-1}^1 xf(x) dx \\ &= \int_{-1}^0 xf(x) dx + \int_0^1 xf(x) dx \\ &= \int_{-1}^0 (x+x^2) dx + \int_0^1 (x-x^2) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = 0 \\ V(X) &= \int_{-1}^1 x^2 f(x) dx - m^2 \\ &= \int_{-1}^0 (x^2+x^3) dx + \int_0^1 (x^2-x^3) dx - 0^2 \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 \right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^1 = \frac{1}{6} \\ \therefore \sigma(X) &= \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6} \quad \text{답 } \frac{\sqrt{6}}{6} \end{aligned}$$

236

정규분포곡선은 직선 $x=20$ 에 대하여 대칭이므로

$P(X \leq a) = P(X \geq 29)$ 에서

$$\frac{a+29}{2} = 20, \quad a+29=40$$

$$\therefore a=11$$

답 11

237

확률 $P(k-3 \leq X \leq k+2)$

가 최대가 되려면 오른쪽

그림과 같이 $k-3, k+2$

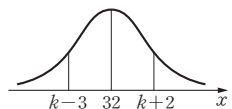
의 중점이 평균인 32가 되

어야 한다. 즉,

$$\frac{(k-3) + (k+2)}{2} = 32, \quad 2k-1=64$$

$$\therefore k = \frac{65}{2}$$

답 $\frac{65}{2}$



238

$$\begin{aligned} (1) P(Z \leq 2) &= P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= P(Z \geq 0) + P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 0.5 + 0.4772 = 0.9772 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) P(-1 \leq Z \leq 2) &= P(-1 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= P(0 \leq Z \leq 1) + P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 0.3413 + 0.4772 = 0.8185 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3) P(Z \geq -1.2) &= P(-1.2 \leq Z \leq 0) + P(Z \geq 0) \\ &= P(0 \leq Z \leq 1.2) + 0.5 \\ &= 0.3849 + 0.5 = 0.8849 \\ \text{답 (1) } 0.9772 \quad (2) \quad 0.8185 \quad (3) \quad 0.8849\end{aligned}$$

239

$$\begin{aligned}(1) P(Z \leq c) &= 0.5 + P(0 \leq Z \leq c) = 0.9495 \\ \therefore P(0 \leq Z \leq c) &= 0.4495 \quad \therefore c = 1.64 \\ (2) P(Z \geq c) &= 0.5 - P(0 \leq Z \leq c) = 0.1003 \\ \therefore P(0 \leq Z \leq c) &= 0.3997 \quad \therefore c = 1.28 \\ \text{답 (1) } 1.64 \quad (2) \quad 1.28\end{aligned}$$

240

$$\begin{aligned}m=60, \sigma=10 \text{이므로 } Z &= \frac{X-60}{10} \\ (1) X=68 \text{일 때, } Z &= 0.8 \\ P(X \geq 68) &= P(Z \geq 0.8) \\ &= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 0.8) \\ &= 0.5 - 0.2881 = 0.2119 \\ (2) X=45 \text{일 때, } Z &= -1.5 \\ P(X \leq 45) &= P(Z \leq -1.5) = P(Z \geq 1.5) \\ &= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1.5) \\ &= 0.5 - 0.4332 = 0.0668 \\ (3) X=55 \text{일 때, } Z &= -0.5 \\ X=70 \text{일 때, } Z &= 1 \\ \therefore P(55 \leq X \leq 70) &= P(-0.5 \leq Z \leq 1) \\ &= P(0 \leq Z \leq 0.5) + P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 0.1915 + 0.3413 = 0.5328 \\ \text{답 (1) } 0.2119 \quad (2) \quad 0.0668 \quad (3) \quad 0.5328\end{aligned}$$

241

통학 시간 X 가 $X > 38$ 일 때, 지각하게 된다.

$$Z = \frac{X-30}{5} \text{에 } X=38 \text{을 대입하면 } Z=1.6$$

따라서 지각할 확률은

$$\begin{aligned}P(X > 38) &= P(Z > 1.6) \\ &= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1.6) \\ &= 0.5 - 0.4452 \\ &= 0.0548 \quad \text{답 } 0.0548\end{aligned}$$

242

$m=154, \sigma=4$ 이므로

$$\begin{aligned}X=148 \text{일 때, } Z &= \frac{148-154}{4} = -1.5 \\ \therefore P(X \leq 148) &= P(Z \leq -1.5) = P(Z \geq 1.5) \\ &= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1.5) \\ &= 0.5 - 0.4332 = 0.0668\end{aligned}$$

따라서 $400 \times 0.0668 = 26.72$ 이므로 학생 수는 약 26명이다. 답 약 26명

243

$m=53, \sigma=6$ 이므로

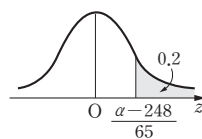
$$\begin{aligned}X=50 \text{일 때, } Z &= \frac{50-53}{6} = -0.5 \\ X=65 \text{일 때, } Z &= \frac{65-53}{6} = 2 \\ \therefore P(50 \leq X \leq 65) &= P(-0.5 \leq Z \leq 2) \\ &= P(-0.5 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= P(0 \leq Z \leq 0.5) + P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 0.1915 + 0.4772 = 0.6687 \quad \text{답 약 } 66.9 \%\end{aligned}$$

244

수험생의 성적을 X 라고 하면

X 는 정규분포 $N(248, 65^2)$

$$\text{을 따르므로 } Z = \frac{X-248}{65}$$



한편, 최저 합격 점수를 α 라고 하면

$$\begin{aligned}P(X \geq \alpha) &= \frac{800}{4000} = 0.2 \\ \therefore P(X \geq \alpha) &= P\left(Z \geq \frac{\alpha-248}{65}\right) = 0.2 \\ 0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{\alpha-248}{65}\right) &= 0.2 \\ \therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{\alpha-248}{65}\right) &= 0.3\end{aligned}$$

그런데 표준정규분포표에서 $P(0 \leq Z \leq 0.84) = 0.3$

$$\text{이므로 } \frac{\alpha-248}{65} = 0.84 \quad \therefore \alpha = 302.6 (\text{점})$$

따라서 합격자의 최저 점수는 대략 303점이다.

답 303점

245

α 점 이상이 100등 이내라고 하면

$$P(X \geq \alpha) = \frac{100}{500} = 0.2$$

$$\therefore P(X \geq \alpha) = P\left(Z \geq \frac{\alpha - 50}{4}\right) = 0.2$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{\alpha - 50}{4}\right) = 0.2$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{\alpha - 50}{4}\right) = 0.3$$

그런데 표준정규분포표에서

$$P(0 \leq Z \leq 0.84) = 0.3$$

이므로

$$\frac{\alpha - 50}{4} = 0.84 \quad \therefore \alpha = 53.36$$

따라서 54점 이상이어야 한다.

답 54점

246

성적을 X 라고 하면 X 는 정규분포 $N(75, 9^2)$ 을

따르므로 $Z = \frac{X - 75}{9}$

한편, 받아야 할 점수를 α 라고 하면

$$P(X \geq \alpha) = P\left(Z \geq \frac{\alpha - 75}{9}\right) = 0.1$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{\alpha - 75}{9}\right) = 0.1$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{\alpha - 75}{9}\right) = 0.4$$

그런데 $P(0 \leq Z \leq 1.28) = 0.4$ 이므로

$$\frac{\alpha - 75}{9} = 1.28 \quad \therefore \alpha = 86.52(\text{점})$$

따라서 적어도 87점을 받아야 한다.

답 87점

247

제품 중에서 100개를 임의로 꺼냈을 때, 나오는 불량품의 개수를 X 라고 하면 X 는 이항분포

$B\left(100, \frac{1}{10}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = 100 \times \frac{1}{10} = 10$$

$$V(X) = 100 \times \frac{1}{10} \times \frac{9}{10} = 9$$

$$\sigma(X) = 3$$

여기서 n 은 100회로 충분히 큰 수이므로 확률변수 X 는 정규분포 $N(10, 3^2)$ 을 따른다고 할 수 있다.

$$\therefore P(X \geq 16) = P\left(Z \geq \frac{16 - 10}{3}\right) = P(Z \geq 2)$$

$$= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 2)$$

$$= 0.5 - 0.4772$$

$$= 0.0228$$

답 0.0228

248

동전 2개를 던질 때, 동시에 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{4}$

이므로 동시에 앞면이 나오는 횟수 X 는 이항분포

$B\left(300, \frac{1}{4}\right)$ 을 따른다.

$$E(X) = 300 \times \frac{1}{4} = 75$$

$$V(X) = 300 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \left(\frac{15}{2}\right)^2$$

n 은 300으로 충분히 크므로 확률변수 X 는 정규분포

$N\left(75, \left(\frac{15}{2}\right)^2\right)$ 을 따른다.

$$X = 60 \text{ 일 때, } Z = \frac{60 - 75}{\frac{15}{2}} = -2$$

$$\therefore P(X \leq 60) = P(Z \leq -2)$$

$$= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 2)$$

$$= 0.5 - 0.4772$$

$$= 0.0228$$

답 0.0228

249

400명 중 사망자의 수 X 는 이항분포 $B(400, 0.2)$ 를 따르므로

$$E(X) = 400 \times 0.2 = 80$$

$$V(X) = 400 \times 0.2 \times 0.8 = 8^2$$

n 은 400으로 충분히 크므로 확률변수 X 는 정규분포 $N(80, 8^2)$ 을 따른다. 이때 400명의 25 %는

100명이므로 $Z = \frac{X - 80}{8}$ 에 $X = 100$ 을 대입하면

$$Z = 2.5$$

$$\begin{aligned}\therefore P(X \geq 100) &= P(Z \geq 2.5) \\ &= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 2.5) \\ &= 0.5 - 0.4938 = 0.0062 \\ &\text{답 } 0.0062\end{aligned}$$

250

모평균을 m , 모분산을 σ^2 이라고 하면

$$\begin{aligned}m &= 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 1 \\ \sigma^2 &= 0^2 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{4} - 1^2 = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

이때 표본의 크기가 4이므로

$$\begin{aligned}E(\bar{X}) &= 1, V(\bar{X}) = \frac{\frac{1}{2}}{4} = \frac{1}{8} \\ &\text{답 평균 : 1, 분산 : } \frac{1}{8}\end{aligned}$$

251

$$\text{모평균은 } m = \frac{1}{5}(1+2+3+4+5) = 3$$

모표준편차는

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{\frac{1}{5}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2) - 3^2} = \sqrt{2} \\ \therefore E(\bar{X}) &= m = 3, \sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \\ &\text{답 평균 : 3, 표준편차 : } \frac{\sqrt{6}}{3}\end{aligned}$$

252

모집단이 정규분포 $N(200, 10^2)$ 을 따르므로 표본

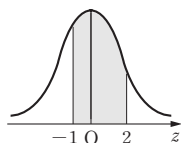
평균 \bar{X} 는 정규분포 $N\left(200, \frac{10^2}{25}\right)$, 즉 $N(200, 2^2)$

을 따른다. $Z = \frac{\bar{X} - 200}{2}$ 으로 표준화하면

$$\bar{X} = 198 \text{일 때, } Z = \frac{198 - 200}{2} = -1$$

$$\bar{X} = 204 \text{일 때, } Z = \frac{204 - 200}{2} = 2$$

$$\begin{aligned}\therefore P(198 \leq \bar{X} \leq 204) &= P(-1 \leq Z \leq 2) \\ &= P(-1 \leq Z \leq 0) \\ &\quad + P(0 \leq Z \leq 2)\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}&= P(0 \leq Z \leq 1) + P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 0.3413 + 0.4772 = 0.8185 \\ &\text{답 } 0.8185\end{aligned}$$

253

$\bar{X} = 162$, $\sigma = 12$, $n = 100$ 이므로

신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\begin{aligned}162 - 1.96 \frac{12}{\sqrt{100}} \leq m \leq 162 + 1.96 \frac{12}{\sqrt{100}} \\ \therefore 159.648 \leq m \leq 164.352 \\ \text{답 } 159.648 \leq m \leq 164.352\end{aligned}$$

254

$\bar{X} = 58.5$, $\sigma = 6.2$, $n = 25$ 이므로

신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$\begin{aligned}58.5 - 2.58 \frac{6.2}{\sqrt{25}} \leq m \leq 58.5 + 2.58 \frac{6.2}{\sqrt{25}} \\ \therefore 55.3008 \leq m \leq 61.6992 \\ \text{답 } 55.3008 \leq m \leq 61.6992\end{aligned}$$

255

신뢰도 99 %의 신뢰구간의 폭이 0.3 g 이하이므로

$$\begin{aligned}2 \times 2.58 \frac{5}{\sqrt{n}} \leq 0.3 \\ \sqrt{n} \geq 86 \quad \therefore n \geq 7396\end{aligned}$$

따라서 7396개 이상으로 해야 한다.

답 7396개 이상

256

신뢰도 95 %에서 모평균과 표본평균의 차가 3 g 이하이므로

$$\begin{aligned}1.96 \frac{40}{\sqrt{n}} \leq 3 \\ \sqrt{n} \geq \frac{1.96 \times 40}{3} \\ n \geq \left(\frac{1.96 \times 40}{3}\right)^2 \approx 682.9\end{aligned}$$

따라서 683개 이상으로 해야 한다.

답 683개 이상

연습문제 | 심화문제

I. 함수의 극한과 연속

1

$x^5 - 4x - 24$ 를 인수정리에 의한 조립제법으로 인수 분해하면

$$x^5 - 4x - 24 = (x-2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 12)$$

\therefore (주어진 식)

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 12)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} (x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 12)$$

$$= 16 + 16 + 16 + 16 + 12$$

$$= 76$$

답 76

2

$$(\text{주어진 식}) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-3)}{|x-2|}$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{(x-2)(x-3)}{|x-2|} = \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{(x-2)(x-3)}{x-2} = -1$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{(x-2)(x-3)}{|x-2|} = \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{(x-2)(x-3)}{-(x-2)} = 1$$

\therefore (우극한값) \neq (좌극한값)

따라서 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{|x-2|}$ 의 값은 없다.

답 ⑤

3

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - ax + 2}{x-2} = k \text{ (} k \text{는 상수)라고 하면}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - ax + 2) = 0$$

$$4 - 2a + 2 = 0 \quad \therefore a = 3$$

$$\therefore k = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x-2)}{x-2} = 1$$

$$\therefore ak = 3 \times 1 = 3$$

답 ③

4

$x \rightarrow 1$ 일 때 $x-1 \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} (a\sqrt{x} + b) = 0$$

$$a + b = 0 \quad \therefore b = -a$$

$$\therefore (\text{주어진 식}) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a\sqrt{x} - a}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(\sqrt{x}-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{a}{2}$$

따라서 $\frac{a}{2} = 1$ 에서 $a = 2 \quad \therefore b = -2$

$$\therefore ab = -4$$

답 ①

5

(1) $x = -t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -\infty} \cos \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \cos \left(-\frac{1}{t} \right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{t}$$

$$= \cos 0 = 1$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{x^2 - a^2} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x^2 + ax + a^2)}{(x-a)(x+a)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 + ax + a^2}{x+a}$$

$$= \frac{3a^2}{2a} = 6$$

$$\therefore a = 4$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx})$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(a-b)x}{\sqrt{x^2 + ax} + \sqrt{x^2 + bx}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a-b}{\sqrt{1 + \frac{a}{x}} + \sqrt{1 + \frac{b}{x}}}$$

$$= \frac{a-b}{2} = 3$$

$$\text{즉, } a-b=6 \quad \therefore b=-2$$

$$\therefore a+b=4+(-2)=2$$

(3) $x-1=t$ 로 놓으면 $x-2=t-1$ 이고 $x \rightarrow 2$ 일 때 $t \rightarrow 1$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x-2)}{x^2-4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x-2)}{(x-2)(x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} \cdot \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x-2)}{x-2} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \lim_{t \rightarrow 1} \frac{f(t-1)}{t-1} \\ &= \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

답 (1) 1 (2) 2 (3) $\frac{1}{4}$

6

$-1 \leq x < 0$ 일 때, $[x] = -1$

$0 \leq x < 1$ 일 때, $[x] = 0$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow +0} [x] &= 0, \lim_{x \rightarrow -0} [x] = -1, \\ \lim_{x \rightarrow +0} [x+1] &= 1, \lim_{x \rightarrow -0} [x-1] = -2, \\ \lim_{x \rightarrow -3+0} [x-3] &= 0 \end{aligned}$$

① $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{x}{[x]} = 0$

② $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{[x]}{x} = 0$

③ $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{[x-1]}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{-2}{x-1} = 2$

④ $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{x+1}{[x+1]} = 1$

⑤ $\lim_{x \rightarrow -3+0} \frac{[x-3]}{x-3} = 0$

답 ③

7

$\lim_{x \rightarrow 2-0} [x] = 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} ([x]^2 + a[x]) = 1 + a \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$\lim_{x \rightarrow 2+0} [x] = 2$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} ([x]^2 + a[x]) = 4 + 2a \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

①=②에서

$$1 + a = 4 + 2a \quad \therefore a = -3$$

답 ③

8

$$\begin{aligned} (1) \text{ (주어진 식)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\log \frac{x+1}{x} \right) \\ &= \log \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right\} \\ &= \log 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \text{ (주어진 식)} &= \lim_{x \rightarrow 3} \log_2 \left| \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} \right| \\ &= \log_2 \left| \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3} \right| \\ &= \log_2 \left| \lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x+1}+2) \right| \\ &= \log_2 4 = 2 \end{aligned}$$

답 (1) 0 (2) 2

9

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (2x-1)^2$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2x^2 - 1$$

$$\begin{aligned} \text{(주어진 식)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x-1)^2 - (2x^2-1)}{(x^2-1)(x^3-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)^2}{(x+1)(x-1)(x-1)(x^2+x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{(x+1)(x^2+x+1)} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{3}$

10

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} x^2 = 1, \lim_{x \rightarrow 1+0} (x+1) = 2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x)$$

따라서 $x \rightarrow 1$ 일 때 $f(x)$ 의 극한값은 없다.

답 $x \rightarrow 1$ 일 때, $f(x)$ 의 극한값은 없다.

11

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - 3x^2}{x} = a \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

②에서 $x \rightarrow 0$ 일 때,

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$

즉, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ 이므로 $f(0) = 0$ ㉔

㉓에서 $f(x) - 3x^2 = ax + k$ (k 는 상수)로 놓으면

$$f(x) = 3x^2 + ax + k$$

㉔에서 $f(0) = k = 0$

$$\therefore f(x) = 3x^2 + ax$$

㉕에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + ax}{x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (3x + a) = 2$$

$$\therefore a = 2$$

답 ②

12

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + ax + b}{x} = c$ 에서 $x \rightarrow 0$ 일 때

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + ax + b) = 0$$

$$\therefore b = 0 \quad \dots\dots ㉓$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x)} = \infty \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

$$\therefore 1 + a + b = 0 \quad \dots\dots ㉔$$

㉓, ㉔에서 $a = -1$

$$\therefore c = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + ax + b}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (x - 1) = -1$$

$$\therefore a + b + c = -2$$

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{2x^2 - x + 3} = 1$ 에서 극한값이 1이므로

분모, 분자는 같은 차수이고 $f(x)$ 는 이차식이다.

따라서 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)라고 하면

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx + c}{2x^2 - x + 3} = 1 \text{에서 } a = 2$$

$$\text{또, } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + bx + c}{x^2 + 3x + 2} = -1 \text{에서}$$

$x \rightarrow -2$ 일 때, (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -2} (2x^2 + bx + c) = 0$$

$$8 - 2b + c = 0$$

$$\therefore c = 2b - 8$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x^2 + 3x + 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + bx + 2b - 8}{x^2 + 3x + 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2(x^2 - 4) + b(x + 2)}{(x + 1)(x + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)(2x - 4 + b)}{(x + 1)(x + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x - 4 + b}{x + 1}$$

$$= \frac{-4 - 4 + b}{-2 + 1} = -1$$

$$\therefore b = 9, c = 10$$

$$\therefore f(x) = 2x^2 + 9x + 10$$

$$\therefore f(1) = 2 + 9 + 10 = 21$$

답 (1) -2 (2) 21

13

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 로 놓으면 조건에서

$f(1) = 0, f(-2) = 0$ 이므로

$$f(x) = (x - 1)(x + 2)(ax + k) \quad (k \text{는 상수})$$

로 놓을 수 있다.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} (ax + k) = a + k = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow -2} (ax + k) = -2a + k = 4$$

따라서 $a = -1, k = 2$ 이므로

$$f(x) = (x - 1)(x + 2)(-x + 2)$$

$$= -x^3 + x^2 + 4x - 4$$

$$\therefore a = -1, b = 1, c = 4, d = -4$$

답 $a = -1, b = 1, c = 4, d = -4$

14

$3f(x) - 2g(x) = h(x)$ 로 놓으면

$$2g(x) = 3f(x) - h(x), \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) + 4g(x)}{-2f(x) + 6g(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) + 2\{3f(x) - h(x)\}}{-2f(x) + 3\{3f(x) - h(x)\}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7f(x) - 2h(x)}{7f(x) - 3h(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7-2 \cdot \frac{h(x)}{f(x)}}{7-3 \cdot \frac{h(x)}{f(x)}} \leftarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(x)}{f(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} h(x)}{\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)} = 0$$

$$= \frac{7-2 \cdot 0}{7-3 \cdot 0} = 1 \quad \text{답 1}$$

15

$f(1)=0, f(-1)=0$ 이어야 하므로

$$f(x) = (x-1)(x+1)g(x)$$

라고 하면

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)g(x)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} (x+1)g(x) = 2g(1)$$

$$2g(1) = -6 \text{에서 } g(1) = -3 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\text{또, } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-1)g(x)}{x+1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} (x-1)g(x) = -2g(-1)$$

$$-2g(-1) = 2 \text{에서 } g(-1) = -1 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 만족시키는 차수가 가장 낮은 다항식은 일차식이므로 $g(x) = ax + b$ 라고 하면

$$g(1) = a + b = -3 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$$g(-1) = -a + b = -1 \quad \dots\dots \textcircled{㉣}$$

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $a = -1, b = -2$

$$\therefore g(x) = -x - 2$$

$$\therefore f(x) = -(x-1)(x+1)(x+2)$$

$$\text{답 } f(x) = -(x-1)(x+1)(x+2)$$

16

$\left[\frac{x}{4}\right] = \frac{x}{4} - k$ ($0 \leq k < 1$)로 놓으면

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8}{x} \left[\frac{x}{4}\right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8}{x} \left(\frac{x}{4} - k\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{8}{x} \cdot k\right) = 2 \quad \text{답 2}$$

KEY point

$$[1.2] = 1 = 1.2 - 0.2$$

$$[-3.4] = -4 = -3.4 - 0.6$$

따라서 일반적으로 x 가 실수일 때

$$[x] = x - k \quad (\text{단, } 0 \leq k < 1)$$

17

$$(i) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{2x - \sqrt{x^2 + 3}} = 2 \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)(2x + \sqrt{x^2 + 3})}{3x^2 - 3} = 2$$

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴이고 극한값이 2이므로

(분모의 차수) = (분자의 차수)이고 극한값 2는 최고차항의 계수의 비이다.

$$\therefore f(x) = 6x + k \quad (k \text{는 상수}) \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x^2 + x - 6} = p \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0 \quad \therefore f(2) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } 12 + k = 0 \quad \therefore k = -12$$

$$\therefore f(x) = 6x - 12$$

$$\therefore p = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6x - 12}{x^2 + x - 6}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6(x-2)}{(x-2)(x+3)} = \frac{6}{5}$$

$$\text{답 } f(x) = 6x - 12, p = \frac{6}{5}$$

18

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n + ax - 3}{x - 1} = 10 \text{에서}$$

$x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} (x^n + ax - 3) = 0$ 이므로

$$1 + a - 3 = 0 \quad \therefore a = 2$$

$$\text{즉, } x^n + 2x - 3 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 3)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n + 2x - 3}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} (x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1 + 2)$$

$$= n + 2 = 10 \quad \therefore n = 8 \quad \text{답 8}$$

19

$$\textcircled{1}. \lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x} = \sin 0 = 0$$

$$\textcircled{2}. \lim_{x \rightarrow 3+0} [x] = 3, \lim_{x \rightarrow 3-0} [x] = 2$$

$$\textcircled{3}. \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{x^2 - 3x}{|x - 3|} = \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{x(x-3)}{x-3} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{x^2-3x}{|x-3|} = \lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{x(x-3)}{-(x-3)} = -3$$

$$\text{ㄷ. } \lim_{x \rightarrow 1+0} 3^{\frac{1}{x-1}} = 3^{\infty} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} 3^{\frac{1}{x-1}} = 3^{-\infty} = 0$$

따라서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ이다.

답 ①

20

원의 반지름의 길이를 r 라고 하면 $x^2+y^2=r^2$

점 $P(x, y)$ 는 원과 곡선 $y=\sqrt{x}$ 위에 있으므로

$x^2+y^2=r^2$, $y=\sqrt{x}$ 를 연립하여 r 를 구하면

$$x^2+x=r^2 \quad \therefore r=\sqrt{x^2+x}$$

$$\therefore \overline{QH} = r - x = \sqrt{x^2+x} - x$$

또한, $\overline{PH}^2 = y^2 = (\sqrt{x})^2 = x$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\overline{PH}^2}{\overline{QH}} &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x}{\sqrt{x^2+x}-x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x(\sqrt{x^2+x}+x)}{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} (\sqrt{x^2+x}+x) = 0 \end{aligned}$$

답 0

21

우극한값과 좌극한값이 일치할 때, 극한값이 존재한다.

$$\text{ㄱ. } \lim_{x \rightarrow 2+0} \{f(x)+g(x)\} = 0+3=3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \{f(x)+g(x)\} = 0+(-3)=-3$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2+0} \{f(x)+g(x)\} \neq \lim_{x \rightarrow 2-0} \{f(x)+g(x)\}$$

$$\text{ㄴ. } \lim_{x \rightarrow 2+0} [\{f(x)\}^2 + \{g(x)\}^2] = 0^2 + 3^2 = 9$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} [\{f(x)\}^2 + \{g(x)\}^2] = 0^2 + (-3)^2 = 9$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2+0} [\{f(x)\}^2 + \{g(x)\}^2]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2-0} [\{f(x)\}^2 + \{g(x)\}^2]$$

$$\text{ㄷ. } \lim_{x \rightarrow 2+0} \{f(x)g(x)\} = 0 \times 3 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \{f(x)g(x)\} = 0 \times (-3) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2+0} \{f(x)g(x)\} = \lim_{x \rightarrow 2-0} \{f(x)g(x)\}$$

따라서 극한값이 존재하는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

22

$$\text{ㄱ. } \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 0 \text{이고 } \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 1 \text{이므로}$$

극한값은 존재하지 않는다. (거짓)

$$\text{ㄴ. } \lim_{x \rightarrow 1+0} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow +0} f(t) = 1 \text{ (참)}$$

$$\text{ㄷ. } \lim_{x \rightarrow 1-0} f(f(x)) = f(1) = 0 \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것을 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

23

$$\text{② } g(a)=0 \text{이면 } \frac{f(a)}{g(a)} \text{의 값이 존재하지 않으므로}$$

$\frac{f(x)}{g(x)}$ 는 $x=a$ 에서 반드시 연속이라고 할 수 없다.

예를 들어 $f(x)=x^2+1$, $g(x)=x$ 이면 $g(0)=0$

이므로 $x=0$ 에서 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 의 값이 존재하지 않는다

다. 따라서 $x=0$ 에서 불연속이고 그 이외의 점에서는 연속이다.

답 ②

24

$f(x)=0$ 에서 $f(0)f(1)<0$ 이면 0과 1 사이에 적어도 하나의 실근을 갖는다.

$$\text{① } f(0)f(1) = (-1) \cdot (-3) = 3 > 0$$

$$\text{② } f(0)f(1) = (-3) \cdot (-3) = 9 > 0$$

$$\text{③ } f(0)f(1) = 2 \cdot 5 = 10 > 0$$

$$\text{④ } f(0)f(1) = 1 \cdot 5 = 5 > 0$$

$$\text{⑤ } f(0)f(1) = 1 \cdot (-2) = -2 < 0$$

답 ⑤

25

$$\text{④ } f(x) = \cos x - x \text{라고 하면}$$

$$f(0) = 1 > 0, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} < 0$$

$$\therefore f(0) \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$$

따라서 중간값의 정리에 의하여 구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서

적어도 하나의 실근을 갖는다.

답 ④

26

① $f(x)=[x]$ 는 모든 정수에서 불연속이다.

② $f(x)=\frac{1}{x}$ 은 $x=0$ 에서 불연속이다.

③ $f(x)=\frac{1}{\sin x}$ 은 $\sin x=0$,

즉 $x=n\pi$ (n 은 정수)에서 불연속이다.

④ $f(0)=1, \lim_{x \rightarrow 0} f(x)=\lim_{x \rightarrow 0} (x^2+1)=1$

$$\therefore f(0)=\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$\therefore x=0$ 에서 연속

⑤ $f(0)=3,$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)=\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-3x}{x^2+x}=\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-3}{x+1}=-3$$

$\therefore x=0$ 에서 불연속

답 ④

27

$\{f(0)-0\}\{f(1)-1\}<0$ 이면 0과 1 사이에 반드시 실근을 가지므로

$$\log_2 2a \cdot (\log_2 \frac{a}{2}-1) < 0$$

$$(\log_2 2 + \log_2 a)(\log_2 a - \log_2 2 - 1) < 0$$

$$(1 + \log_2 a)(\log_2 a - 2) < 0$$

$$-1 < \log_2 a < 2 \quad \therefore \frac{1}{2} < a < 4$$

$$\text{답 } \frac{1}{2} < a < 4$$

28

$x=1$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)=f(1)$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x|-1}{x^2-1}=a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x|-1}{(|x|-1)(|x|+1)}=\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{|x|+1}=a$$

$$\therefore a=\frac{1}{2}$$

$$\text{답 } \frac{1}{2}$$

29

$x=0$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)=f(0)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$$

$$=\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

$$=\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=1=f(0)$$

$$f(0)=a \text{ 이므로 } a=1$$

답 1

30

①, ②, ③은 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$

④ $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)=\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$

⑤ $\lim_{x \rightarrow a} f(x)=\infty$

답 ④

31

오른쪽 그림에서

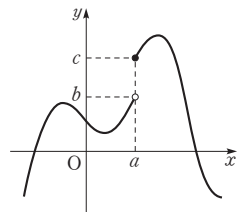
$$f(a)=c, \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)=c,$$

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)=b$$

이므로 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 의 값이

존재하지 않는다. 따라서

$x=a$ 에서 불연속이다.



답 ④

32

$g(x)=f(x)-x$ 로 놓으면

$$g(-2)=-1-(-2)=1>0$$

$$g(-1)=-2-(-1)=-1<0$$

$$g(0)=1-0=1>0$$

$$g(1)=-2-1=-3<0$$

$$g(2)=-\frac{1}{2}-2=-\frac{5}{2}<0$$

이므로 $-2 < x < -1$, $-1 < x < 0$, $0 < x < 1$ 에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=x$ 는 $-2 \leq x \leq 2$ 에서 적어도 3개의 실근을 갖는다.

답 3

33

$0 < x < 2$ 에서 $0 < x^2 < 4$

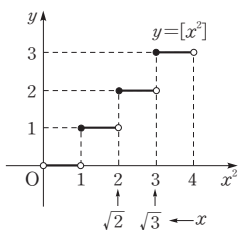
(i) $0 < x^2 < 1$ 일 때, $[x^2]=0$

(ii) $1 \leq x^2 < 2$ 일 때, $[x^2]=1$

(iii) $2 \leq x^2 < 3$ 일 때, $[x^2]=2$

(iv) $3 \leq x^2 < 4$ 일 때, $[x^2]=3$

따라서 불연속점은 $x=1$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ 의 3개이다.



답 3

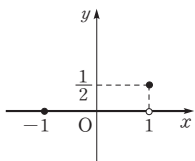
34

(i) $x=1$ 일 때, $f(x)=\frac{1}{2}$

(ii) $x=-1$ 일 때, $f(x)=0$

(iii) $|x|<1$ 일 때, $f(x)=0$

(iv) $|x|>1$ 일 때



$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^n}}{\frac{1}{x^{2n}} + 1} = 0$$

위의 그래프와 같이 $x=-1$ 에서 연속, $x=1$ 에서 불연속이다.

답 ①

35

$x \neq -2$ 일 때, $f(x) = \frac{ax^2 - bx}{x+2}$

$f(x)$ 가 $x=-2$ 에서 연속이므로

$$f(-2) = \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{ax^2 - bx}{x+2}$$

$x \rightarrow -2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow -2} (ax^2 - bx) = 0$ 이므로

$$4a + 2b = 0 \quad \therefore b = -2a$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -2} \frac{ax^2 + 2ax}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{ax(x+2)}{x+2} = -2a = 2$$

따라서 $a=-1$, $b=2$ 이므로 $a+b=1$

답 1

36

함수 $f(x)$ 가 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 연속이기 위해서는 $x=-1$, $x=2$ 에서 연속이어야 한다.

(i) $x=-1$ 에서 연속이려면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow -1-0} (ax+1) &= \lim_{x \rightarrow -1+0} (x^2 - 2x + b) \\ \therefore -a+1 &= 1+2+b \\ \therefore -a-b &= 2 \quad \dots\dots \textcircled{7} \end{aligned}$$

(ii) $x=2$ 에서 연속이려면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow 2-0} (x^2 - 2x + b) &= \lim_{x \rightarrow 2+0} (ax+1) \\ \therefore 4-4+b &= 2a+1 \\ \therefore 2a-b &= -1 \quad \dots\dots \textcircled{8} \end{aligned}$$

⑦, ⑧에서 $a=-1$, $b=-1$

$$\therefore 2a+b = 2 \times (-1) - 1 = -3 \quad \text{답 } -3$$

다른풀이 함수 $f(x)$ 가 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 연속이기 위해서는 그래프가 끊어져 있지 않고 연결되어 있어야 한다.

$p(x) = ax+1$, $q(x) = x^2 - 2x + b$ 라고 하면

$x=-1$, $x=2$ 일 때 $p(x)$

와 $q(x)$ 의 함수값이 같아

야 그래프는 연결이 된다.

$p(-1) = q(-1)$ 에서

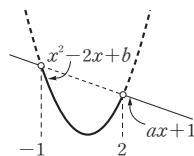
$$\begin{aligned} -a+1 &= 1+2+b \\ \therefore -a-b &= 2 \quad \dots\dots \textcircled{7} \end{aligned}$$

$p(2) = q(2)$ 에서 $2a+1 = 4-4+b$

$$\therefore 2a-b = -1 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧에서 $a=-1$, $b=-1$

$$\therefore 2a+b = 2 \times (-1) - 1 = -3$$



37

$x=1$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

$x \rightarrow 1$ 일 때, (분모) $\rightarrow 0$ 이 되므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 가 존재하려면 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$1+a+b=0 \quad \therefore b=-a-1$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + ax - a - 1}{(x-1)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1) + a(x-1)}{(x-1)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1 + a}{x-1} \end{aligned}$$

여기서 다시 $x \rightarrow 1$ 일 때, (분모) $\rightarrow 0$ 이므로
(분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$1+1+1+a=0 \quad \therefore a=-3, b=2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} (x+2) = 3 = c$$

$$\therefore a+b+c = -3+2+3=2 \quad \text{답 2}$$

38

$$f(x) = x^3 + \frac{x^3}{1+x^2} + \frac{x^3}{(1+x^2)^2} + \dots$$

(i) $x=0$ 일 때, $f(x)=0$

(ii) $x \neq 0$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 첫째항이 x^3 ,

공비가 $\frac{1}{1+x^2}$ 인 무한등비급수의 합이고

$$0 < \frac{1}{1+x^2} < 1 \text{이므로}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = x(1+x^2)$$

$$(i), (ii) \text{에서 } f(x) = \begin{cases} 0 & (x=0) \\ x(1+x^2) & (x \neq 0) \end{cases}$$

이때 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x(1+x^2) = 0 = f(0)$ 이므로

$f(x)$ 는 $x=0$ 을 포함한 모든 구간에서 연속이다.

따라서 불연속점은 없다. 답 0

39

$f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \{(x-2)^2 + b\} = 1+b$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} ax^2 = a$$

즉, $1+b=a$ 이므로 $b=a-1$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{(x-2)^2 + b - (1+b)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{(x-1)(x-3)}{x-1} = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{ax^2 - a}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{a(x-1)(x+1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-0} a(x+1)$$

$$= 2a$$

$$\therefore -2 = 2a$$

$$\therefore a = -1, b = -2$$

$$\text{답 } a = -1, b = -2$$

40

$$\neg. \lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0 \text{ (거짓)}$$

$$\neg. \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x)$$

따라서 $x=1$ 에서의 극한값은 존재하지 않는다. (참)

ㄷ. 주어진 그림에서 $x=1, 2, 3$ 에서 불연속이다.

(참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

41

(i) $|x| < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n+1} = 0$ 이므로

$$f(x) = \cos ax$$

(ii) $|x| > 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = \infty$ 이므로 분모, 분자를
각각 x^{2n} 으로 나누면

$$f(x) = x$$

(iii) $x = -1$ 일 때,

$$f(-1) = \frac{-1 + \cos a}{2}$$

$$(\because \cos(-a) = \cos a)$$

함수 $f(x)$ 가 $x = -1$ 에서 연속이 되려면

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} x = f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1+0} \cos ax$$

$$-1 = \frac{-1 + \cos a}{2} = \cos a$$

$$\therefore \cos a = -1$$

따라서 음수 a 의 최댓값은 $-\pi$ 이다.

답 $-\pi$

42

(i) $-1 < 2x-1 < 1$, 즉 $0 < x < 1$ 이면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2x-1)^{2n} = 0 \text{ 이므로}$$

$$f(x) = ax + b$$

(ii) $2x-1 < -1$ 또는 $2x-1 > 1$

즉, $x < 0$ 또는 $x > 1$ 이면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2x-1)^{2n} = \infty \text{ 이므로}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2x-1) + \frac{ax+b}{(2x-1)^{2n}}}{1 + \frac{1}{(2x-1)^{2n}}}$$

$$= 2x-1$$

$$\left(\because \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2x-1)^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ax+b}{(2x-1)^{2n}} = 0 \right)$$

(iii) $2x-1=1$ 또는 $2x-1=-1$

즉, $x=1$ 또는 $x=0$ 이면

$$f(1) = \frac{1+a+b}{2}, \quad f(0) = \frac{-1+b}{2}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=0$, $x=1$ 에서 연속이 되어야 모든 실수 x 에 대하여 연속이 되므로

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow +0} (ax+b) = \lim_{x \rightarrow -0} (2x-1)$$

$$\frac{-1+b}{2} = b = -1 \quad \therefore b = -1$$

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1-0} (ax+b) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (2x-1)$$

$$\frac{1+a+b}{2} = a+b=1 \quad \therefore a=2$$

답 $a=2, b=-1$

43

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \frac{1}{2}$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로

(분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

$$\therefore f(1) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

또, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = \frac{1}{2}$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\therefore f(2) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에서 $f(x) = (x-1)(x-2)g(x)$ 로 놓을 수 있다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x-2)g(x)$$

$$= -g(1) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore g(1) = -\frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x-1)g(x)$$

$$= g(2) = \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉣}$$

$\textcircled{㉢}, \textcircled{㉣}$ 에서 $g(1) \cdot g(2) = -\frac{1}{4} < 0$

따라서 방정식 $g(x)=0$ 은 열린 구간 $(1, 2)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. 즉, 방정식 $f(x)=0$ 은 닫힌 구간 $[1, 2]$ 에서 적어도 3개의 실근을 갖는다.

답 $\textcircled{㉤}$

44

함수 $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^m}{(1+x^4)^{k-1}}$ 에서

(i) $x=0$ 일 때, $f(0)=0$

(ii) $x \neq 0$ 일 때

$$f(x) = x^m + \frac{x^m}{1+x^4} + \frac{x^m}{(1+x^4)^2} + \dots$$

여기서 $f(x)$ 는 첫째항이 x^m , 공비가 $\frac{1}{1+x^4}$ 인

무한등비급수의 합이고, $0 < \frac{1}{1+x^4} < 1$ 이므로

$$f(x) = \frac{x^m}{1 - \frac{1}{1+x^4}} = \frac{x^m(1+x^4)}{x^4}$$

$$= (1+x^4)x^{m-4}$$

$f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이려면

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \quad \dots\dots \textcircled{㉦}$$

그런데 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x^4)x^{m-4}$ 에서

$m=4$ 이면

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x^4)x^{m-4} = 1, \quad f(0) \neq \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

따라서 자연수 m 의 최솟값은 5이다.

답 $\textcircled{㉧}$

II. 다항함수의 미분법

45

$$\frac{f(a)-f(1)}{a-1}=3$$

$$\frac{(a^3-2a+5)-(1-2+5)}{a-1}=3$$

$$\frac{a^3-2a+1}{a-1}=3$$

$$\frac{(a-1)(a^2+a-1)}{a-1}=3$$

$$\therefore a^2+a-4=0$$

이것은 a 에 관한 이차방정식이므로 a 를 모두 곱한 값은 근과 계수의 관계에 의하여 -4 이다. 답 ①

46

$$y'=3x^2-3=9$$

$$\therefore x=\pm 2$$

따라서 두 점은 $(2, 3), (-2, -1)$ 이므로 두 점 사이의 거리는

$$\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$$

답 ④

47

곡선 $y=x^3+ax^2+bx$ 가 점 $(1, -1)$ 을 지나므로

$$-1=1+a+b$$

$$\therefore a+b=-2 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

곡선 위의 점 $(1, -1)$ 에서의 접선의 기울기는 2이

므로 $y'_{x=1}=2$

$$y'=3x^2+2ax+b \text{이므로}$$

$$y'_{x=1}=3+2a+b=2$$

$$\therefore 2a+b=-1 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에서 $a=1, b=-3$ 답 $a=1, b=-3$

48

$$\textcircled{1} \text{ (주어진 식)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h)-f(1)}{-2h} \cdot (-2)$$

$$= -2f'(1)$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \text{ (주어진 식)} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h)-f(1)}{5h} \cdot 5 \\ &\quad - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h)-f(1)}{3h} \cdot 3 \end{aligned}$$

$$= 5f'(1) - 3f'(1)$$

$$= 2f'(1)$$

$$\textcircled{3} \text{ (주어진 식)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+4h)-f(1)}{4h} \cdot 2$$

$$= 2f'(1)$$

$$\textcircled{4} \text{ (주어진 식)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \cdot (\sqrt{x}+1)$$

$$= 2f'(1)$$

$$\textcircled{5} \text{ (주어진 식)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1} \cdot (x+1)$$

$$= 2f'(1)$$

답 ①

49

(주어진 식)

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(h)-f(0)\}-\{f(-2h)-f(0)\}}{2h}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$$

$$- \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2h)-f(0)}{-2h} \cdot (-1)$$

$$= \frac{1}{2}f'(0) + f'(0)$$

$$= \frac{3}{2}f'(0) = 3$$

$$\therefore f'(0) = 2$$

답 2

50

$$\text{ (주어진 식)} = \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x)-1}{x-1} \cdot \frac{f(x)+1}{x+1} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-1}{x-1} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+1}{x+1}$$

$$= f'(1) \cdot \frac{f(1)+1}{2} = 2 \cdot \frac{1+1}{2}$$

$$= 2$$

답 2

51

(1) (주어진 식)

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 f(x) - f(x) + f(x) - 1}{x^2 - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{(x^2 - 1)f(x)}{x^2 - 1} + \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \cdot \frac{1}{x + 1} \right\} \\ &= f(1) + \frac{1}{2} f'(1) \\ &= 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

(2) (주어진 식)

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 f(1) - f(1) + f(1) - f(x^2)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{(x^3 - 1)f(1)}{x - 1} - \frac{f(x^2) - f(1)}{x^2 - 1} \cdot (x + 1) \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ (x^2 + x + 1)f(1) \right. \\ &\quad \left. - \frac{f(x^2) - f(1)}{x^2 - 1} \cdot (x + 1) \right\} \\ &= 3f(1) - 2f'(1) \\ &= 3 \times 1 - 2 \times 3 = -3 \end{aligned}$$

답 (1) $\frac{5}{2}$ (2) -3

52

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(\sqrt{x}) - f(1)}{x^2 - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(\sqrt{x}) - f(1)}{(x - 1)(x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(\sqrt{x}) - f(1)}{\sqrt{x} - 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \cdot \frac{1}{x + 1} \right\} \\ &= f'(1) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{4}$

53

$f(2)=3, f'(2)=1$ 이고

$y' = 2x \cdot f(x) + (x^2 + 1) \cdot f'(x)$ 이므로 $x=2$ 에서의 미분계수는

$$\begin{aligned} y'_{x=2} &= 2 \cdot 2 \cdot f(2) + (4 + 1) \cdot f'(2) = 12 + 5 \\ &= 17 \end{aligned}$$

답 17

54

$f(1)=0$ 이므로

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\{f(x)\}^2 - 2f(x)}{1 - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)\{2 - f(x)\}}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \{2 - f(x)\} \\ &= f'(1)\{2 - f(1)\} = 10 \\ 2f'(1) &= 10 \quad \therefore f'(1) = 5 \end{aligned}$$

답 5

55

$g(x) = ax^3 + b^2, h(x) = bx^2 + ax + b$ 로 놓으면

$x=1$ 에서 연속이므로 $g(1) = h(1)$

$$a + b^2 = b + a + b, \quad b^2 - 2b = 0$$

$$\therefore b = 0 \text{ 또는 } b = 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또, $x=1$ 에서 미분계수가 존재하므로 $g'(1) = h'(1)$

$$g'(x) = 3ax^2, \quad h'(x) = 2bx + a \text{에서}$$

$$3a = 2b + a \quad \therefore a = b \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $a \neq 0$ 이므로 $a = 2, b = 2$

한편,

$$\begin{aligned} &\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1) - f(1-h) + f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(1+2h) - f(1)}{2h} \times 2 + \frac{f(1-h) - f(1)}{-h} \right\} \\ &= 3f'(1) = 3 \times 6 = 18 \end{aligned}$$

답 18

56

$f'(a)=2$ 이므로

$$\begin{aligned} (\text{주어진 식}) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(a+2h) - f(a)}{2h} \times 2 - \frac{g(h)}{h} \right\} \\ &= 2f'(a) - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h} \\ &= 2 \times 2 - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h} \\ &= 4 - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h} \end{aligned}$$

그런데 조건에서 $4 - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h} = 0$ 이므로

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h} = 4$$

답 4

57

① $y = \frac{1}{x}$ 은 $x=0$ 에서 불연속이다.

② $y = \frac{1}{|x|}$ 은 $x=0$ 에서 불연속이다.

③ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (-|x|) = 0$
 $\therefore f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

따라서 $x=0$ 에서 연속이다.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-|h|}{h} \end{aligned}$$

이때 $\lim_{h \rightarrow +0} \frac{-h}{h} = -1$, $\lim_{h \rightarrow -0} \frac{h}{h} = 1$ 이 되어 $f'(0)$

의 값은 존재하지 않는다.

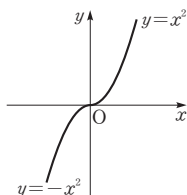
즉, $x=0$ 에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

④ $y = x|x|$

$$= \begin{cases} x^2 & (x \geq 0) \\ -x^2 & (x < 0) \end{cases}$$

따라서 모든 점에서 미분 가능하고, 연속이다.

⑤ $y = x^2 - 1$ 은 모든 점에서 미분가능하고, 연속이다.



답 ③

58

$$\begin{aligned} (\text{주어진 식}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{f\left(\frac{3}{n}\right) - f(0)}{\frac{1}{n}} \right\}^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{f\left(\frac{3}{n}\right) - f(0)}{\frac{3}{n}} \cdot 3 \right\}^2 \\ &= 9 \{f'(0)\}^2 \\ &= 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 \end{aligned}$$

답 1

59

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 2}{x - 3} = 1 \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 3} \{f(x) - 2\} = 0$$

$$\text{즉, } f(3) - 2 = 0 \quad \therefore f(3) = 2$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 2}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} \\ &= f'(3) = 1 \end{aligned}$$

$$\text{또, } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x) - 1}{x - 3} = 2 \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 3} \{g(x) - 1\} = 0$$

$$\text{즉, } g(3) - 1 = 0 \quad \therefore g(3) = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x) - 1}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x) - g(3)}{x - 3} \\ &= g'(3) = 2 \end{aligned}$$

$y = f(x)g(x)$ 에서

$$y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\begin{aligned} \therefore y'_{x=3} &= f'(3)g(3) + f(3)g'(3) \\ &= 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 5 \end{aligned}$$

답 5

60

답 (1) 1, 3 (2) 1, 2, 3

KEY point

미분이 가능하지 않은 경우

⇒ 불연속점에서 미분이 가능하지 않음

⇒ 연속인 점일지라도 뾰족점에서는 미분이 가능하지 않음

61

① $x=2$ 인 곡선 위의 점에서의 접선의 기울기가 양수이므로 $f'(2) > 0$

② $\lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-0} f(x)$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ 가 존재한다.

③ $x=3$, $x=5$ 에서 불연속이므로 $-1 < x < 6$ 에서 $f(x)$ 의 불연속인 점은 2개이다.

④ $x=1$, $x=3$, $x=5$ 에서 미분가능하지 않다.

⑤ $x=0$ 에서 $f'(x)=0$ 이고 $x=1$, 3에서는 미분가능하지 않으므로 $f'(x)=0$ 인 점은 1개이다.

답 ⑤

62

(1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x-3} = a$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 3} (x-3) = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0 \quad \therefore f(3) = 0$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} = a$ 이므로

$$f'(3) = a$$

(2) $f(1) = g(1) = 5$

$$f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4,$$

$$g'(x) = 4x^3 + 5x^4 + 6x^5 + 7x^6 + 8x^7 \text{이므로}$$

$$f'(1) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

$$g'(1) = 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 30$$

\therefore (주어진 식)

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1) - \{g(1-h) - f(1)\}}{3h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1) - \{g(1-h) - g(1)\}}{3h}$$

$$= \frac{2}{3} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{2h}$$

$$+ \frac{1}{3} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1-h) - g(1)}{-h}$$

$$= \frac{2}{3} f'(1) + \frac{1}{3} g'(1)$$

$$= \frac{2}{3} \times 15 + \frac{1}{3} \times 30$$

$$= 20$$

(3) $f(x) = x^{3n} + x^{2n} + x^n$ 으로 놓으면 $f(1) = 3$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{3n} + x^{2n} + x^n - 3}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1) = 12$$

그런데 $f'(x) = 3nx^{3n-1} + 2nx^{2n-1} + nx^{n-1}$ 이므로

$$f'(1) = 6n = 12$$

$$\therefore n = 2$$

답 (1) a (2) 20 (3) 2

63

$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$ 는 모든 실수 x, y 에 대하여 성립하므로 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0) = f(0) + f(0) + 0$$

$$\therefore f(0) = 0$$

한편,

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0) + f(h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h}$$

$$= -2$$

$$\therefore f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1) + f(h) + 2h - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) + 2h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} + 2$$

$$= -2 + 2$$

$$= 0$$

답 0

64

$$\{f(x) + g(x)\}' = f'(x) + g'(x)$$

$$= g(x) + g'(x)$$

그런데

$$g(x) + g'(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$g(x)$ 는 삼차식이고 삼차식의 계수는 1이므로

$$g(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \text{라고 하면}$$

$$g'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

이것을 ①에 대입하고 정리하면

$$x^3 + (a+3)x^2 + (2a+b)x + b+c$$

$$= x^3 + 3x^2 + 4x + 5$$

x 에 대한 항등식이므로

$$a+3=3, 2a+b=4, b+c=5$$

$$\therefore a=0, b=4, c=1$$

$$\therefore g(x) = x^3 + 4x + 1$$

$$g'(x) = 3x^2 + 4$$

$$\therefore g'(-1) = 3 + 4 = 7$$

답 7

65

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= -1 + 2x - 3x^2 + 4x^3 - \cdots + 200x^{199} \\
 \therefore f'(1) &= -1 + 2 - 3 + 4 - \cdots + 200 \\
 &= -(1 + 3 + \cdots + 199) + 2(1 + 2 + \cdots + 100) \\
 &= -\sum_{k=1}^{100} (2k-1) + 2\sum_{k=1}^{100} k \\
 &= \sum_{k=1}^{100} 1 \\
 &= 100
 \end{aligned}$$

답 100

66

$\frac{2}{n} = t$ 로 놓으면 $n = \frac{2}{t}$ 이고 $n \rightarrow \infty$ 일 때, $t \rightarrow 0$ 이므로
(주어진 식)

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2}{t} \{f(1+t) - f(1-t)\} \\
 &= 2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1+t) - f(1-t)}{t} \\
 &= 2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1+t) - f(1) + f(1) - f(1-t)}{t} \\
 &= 2 \left\{ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1+t) - f(1)}{t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-t)}{-t} \right\} \\
 &= 2 \{f'(1) + f'(1)\} = 4f'(1) \\
 &= 4 \times 2 = 8
 \end{aligned}$$

답 8

67

$f(x)$ 를 n 차 다항식이라고 하면 $\{f'(x)\}^2$ 의 차수는
 $2(n-1)$
 $2(n-1) = n \quad \therefore n = 2$
 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)로 놓으면
 $f'(x) = 2ax + b$
 $\therefore (2ax + b)^2 = ax^2 + bx + c$
 $(4a^2 - a)x^2 + (4ab - b)x + b^2 - c = 0$
 $\therefore 4a^2 = a, 4ab = b, b^2 = c$
 $a \neq 0$ 이므로 $a = \frac{1}{4}$

답 $\frac{1}{4}$

68

$$\begin{aligned}
 (1) y' &= \{f(x)f(x)\}' \\
 &= f'(x)f(x) + f(x)f'(x) \\
 &= 2f(x)f'(x)
 \end{aligned}$$

$$(2) y' = n\{f(x)\}^{n-1}f'(x) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$(i) n=1 \text{ 일 때, } y' = f'(x)$$

따라서 $n=1$ 일 때 $\textcircled{1}$ 은 성립한다.

$$(ii) n=k \text{ 일 때, } y' = k\{f(x)\}^{k-1}f'(x) \text{ 라고 가정 하면}$$

$$y = \{f(x)\}^{k+1}$$

$$= \{f(x)\}^k f(x)$$

$$y' = (\{f(x)\}^k)' f(x) + \{f(x)\}^k f'(x)$$

$$= k\{f(x)\}^{k-1}f'(x)f(x) + \{f(x)\}^k f'(x)$$

$$= k\{f(x)\}^k f'(x) + \{f(x)\}^k f'(x)$$

$$= (k+1)\{f(x)\}^k f'(x)$$

따라서 $\textcircled{1}$ 은 $n=k+1$ 일 때도 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 $\textcircled{1}$ 은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다. 답 풀이 참조

69

$$(가) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^3}{x^2 + 2} = 2 \text{ 이므로 } f(x) - x^3 \text{ 은 } x^2 \text{ 의}$$

계수가 2인 이차함수이므로

$$f(x) - x^3 = 2x^2 + ax + b$$

$$\therefore f(x) = x^3 + 2x^2 + ax + b$$

$$(다) f(0) = 0 \text{ 이므로}$$

$$b = 0$$

$$\therefore f(x) = x^3 + 2x^2 + ax \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$(나) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \cdot \frac{1}{x+1} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1}$$

$$= f'(1) \cdot \frac{1}{2} = 4$$

$$\therefore f'(1) = 8 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } f'(x) = 3x^2 + 4x + a$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } f'(1) = 8 \text{ 이므로}$$

$$3 + 4 + a = 8$$

$$\therefore a = 1$$

$$\therefore f(x) = x^3 + 2x^2 + x$$

$$\therefore f(1) = 1 + 2 + 1 = 4$$

답 4

70

(1) 주어진 식을 변형하면

$$f'(x)\{f'(x)+2\}-8f(x)=12x^2-5$$

$f(x)$ 가 n 차식일 때 $f'(x)$ 는 $(n-1)$ 차식이므로 좌변은 $(n-1)+(n-1)$, 즉 $(2n-2)$ 차식이다. 한편, 우변은 2차식이므로

$$2n-2=2 \quad \therefore n=2$$

따라서 $f(x)$ 는 2차식이다.

(2) $f(x)=ax^2+bx+c$ 로 놓으면 $f'(x)=2ax+b$

이것을 주어진 식에 대입하여 정리하면

$$(2ax+b)(2ax+b+2)$$

$$=8(ax^2+bx+c)+12x^2-5$$

$$\therefore 4a^2x^2+4a(b+1)x+b(b+2)$$

$$=(8a+12)x^2+8bx+8c-5$$

양변의 계수를 비교하면

$$4a^2=8a+12 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$4a(b+1)=8b \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$b(b+2)=8c-5 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

①에서 $a^2-2a-3=0$

$$\therefore a=3 \text{ 또는 } a=-1$$

②, ③에 대입하면

$$a=3\text{일 때, } b=-3, c=1$$

$$a=-1\text{일 때, } b=-\frac{1}{3}, c=\frac{5}{9}$$

$$\therefore f(x)=3x^2-3x+1$$

$$\text{또는 } f(x)=-x^2-\frac{1}{3}x+\frac{5}{9}$$

답 (1) 2차식

$$(2) f(x)=3x^2-3x+1$$

$$\text{또는 } f(x)=-x^2-\frac{1}{3}x+\frac{5}{9}$$

KEY point

$f(x)$ 가 n 차식이면 $f'(x)$ 는 $(n-1)$ 차식이다.

71

$$f'(x)=3x^2-6x=3(x-1)^2-3$$

$x=1$ 일 때, 기울기의 최솟값은 -3

접점의 y 좌표는 $f(1)=1-3+2=0$

따라서 구하는 접선의 방정식은 점 $(1, 0)$ 을 지나고 기울기가 -3 인 직선의 방정식이므로

$$y-0=-3(x-1)$$

$$\therefore y=-3x+3$$

$$\text{답 } y=-3x+3$$

72

(1) $f(x)=x^3$ 으로 놓으면

$$f'(x)=3x^2$$

접점을 (t, t^3) 으로 놓으면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t)=3t^2$$

따라서 접선의 방정식은

$$y-t^3=3t^2(x-t)$$

$$\therefore y=3t^2x-2t^3$$

이 식이 $y=ax+2$ 와 일치하므로

$$a=3t^2, 2=-2t^3$$

$$\therefore t=-1 \quad \therefore a=3$$

(2) $f(x)=\frac{1}{4}x^2$ 으로 놓으면

$$f'(x)=\frac{1}{2}x$$

접점을 $(t, \frac{1}{4}t^2)$ 으로 놓으면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t)=\frac{1}{2}t$$

따라서 접선의 방정식은

$$y-\frac{1}{4}t^2=\frac{1}{2}t(x-t)$$

점 $(0, -1)$ 을 지나므로

$$-1-\frac{1}{4}t^2=-\frac{1}{2}t^2, t^2=4$$

$$\therefore t=\pm 2$$

$t=2$ 일 때, 접선의 기울기는 1

$t=-2$ 일 때, 접선의 기울기는 -1

$$\therefore m_1m_2=-1$$

$$\text{답 (1) } 3 \quad (2) -1$$

73

접점의 x 좌표 t 를 두 곡선에 대입하면 접점의 y 좌표는 같으므로

$$t^3 + at^2 = -t^2 + 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

접점의 x 좌표 t 를 두 곡선의 도함수에 대입하면 접선의 기울기는 같으므로

$$3t^2 + 2at = -2t \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} \times 2 - \textcircled{㉡} \times t \text{에서 } t^3 = -8$$

$$\therefore t = -2$$

또, $\textcircled{㉡}$ 에서 $a = 2$

$$\therefore a + t = 0$$

답 ②

74

접선의 방정식은

$$y = 4a^3(x - a) + a^4$$

$$\therefore y = 4a^3x - 3a^4$$

$h(a) = -3a^4$ 이므로

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{h(\sqrt{a^2 + a}) - h(a)}{a^3}$$

$$= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{-3(a^2 + a)^2 + 3a^4}{a^3}$$

$$= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{-6a^3 - 3a^2}{a^3}$$

$$= -6$$

답 ①

75

$y = f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 방정식은

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

$$\therefore g(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - g(x)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f'(a)(x - a) - f(a)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \left\{ \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right\}$$

$$= f'(a) - f'(a)$$

$$= 0$$

답 ③

76

$$f(x) = x^3 + ax^2 + b \text{로 놓으면 } f'(x) = 3x^2 + 2ax$$

점 $(1, 0)$ 을 지나므로

$$1 + a + b = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$x = 1$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1) = 3 + 2a$ 이므로

점 $(1, 0)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y = (3 + 2a)(x - 1) \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$ 은 곡선 $y = x^3 + ax^2 + b$ 와 $x = 2$ 에서 만나므로

$$8 + 4a + b = (3 + 2a)(2 - 1)$$

$$\therefore 2a + b = -5 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉢}$ 에서 $a = -4, b = 3$

따라서 점 A의 y 좌표 c 는

$$8 + 4 \cdot (-4) + 3 = -5$$

답 ①

77

$$f(x) = x^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$g(x) = (x - 1)^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

으로 놓으면 두 포물선의 교점의 x 좌표는

$$x^2 = (x - 1)^2 \text{에서 } x = \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{㉠} \text{에서 } f'(x) = 2x \text{이므로 } f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$\textcircled{㉡} \text{에서 } g'(x) = 2(x - 1) \text{이므로 } g'\left(\frac{1}{2}\right) = -1$$

따라서 교점 P에서 곡선 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에 그은 접선의 기울기를 각각 m, m' 이라고 하면

$$mm' = f'\left(\frac{1}{2}\right) \times g'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \times (-1) = -1$$

따라서 두 접선이 이루는 각의 크기는 90° 이다.

답 90°

78

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 \text{으로 놓으면}$$

$$f'(x) = 2x - 2$$

곡선 $y = f(x)$ 의 접선 중에서 직선 $y = 2x - 10$ 과 평행한 접선의 접점의 좌표를 $(t, t^2 - 2t - 3)$ 이라고 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 2이어야 하므로

$$f'(t) = 2t - 2 = 2 \quad \therefore t = 2$$

$$f(2) = 2^2 - 2 \times 2 - 3 = -3 \text{이므로 접점은 } (2, -3)$$

따라서 점 $(2, -3)$ 과 직선 $y=2x-10$, 즉 $2x-y-10=0$ 사이의 거리가 최솟값이므로

$$\frac{|2 \cdot 2 - (-3) - 10|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

답 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

79

$f(x)=x^3-3x^2-8x-4$, $g(x)=3x^2+7x+4$ 로 놓고 이 두 곡선의 접점을 (a, b) 라고 하면

$$f'(a)=g'(a)$$

$$\therefore 3a^2-6a-8=6a+7, a^2-4a-5=0$$

$$\therefore a=-1 \text{ 또는 } a=5$$

$$a=-1 \text{ 일 때, } f(-1)=g(-1)=0$$

$$a=5 \text{ 일 때, } f(5)=6, g(5)=114 \text{ 이므로}$$

$$f(5) \neq g(5)$$

따라서 접점은 $(-1, 0)$ 이고, 접선의 기울기는 1이다.

따라서 수직인 직선의 기울기는 -1 이므로 구하는

방정식은 $y-0=-1 \cdot (x+1)$

$$\therefore y=-x-1$$

답 $y=-x-1$

80

$f(x)=x^3-3x^2+2x$ 로 놓으면

$$f'(x)=3x^2-6x+2$$

한편, 이 곡선의 접선은 $y=-x+2$ 에 평행하므로

$$3x^2-6x+2=-1, (x-1)^2=0$$

$$\therefore x=1, y=0$$

즉, 접점은 $(1, 0)$ 이므로 기울기가 -1 이고 점 $(1, 0)$ 을 지나는 접선의 방정식은

$$y=-(x-1)$$

$$\therefore y=-x+1$$

직선 $y=-x+1$ 을 x 축 방향으로 a 만큼, y 축 방향으로 b 만큼 평행이동하면

$$y-b=-(x-a)+1$$

$$\therefore y=-x+a+1+b$$

이것이 직선 $y=-x+2$ 와 일치하므로

$$a+1+b=2$$

$$\therefore a+b=1$$

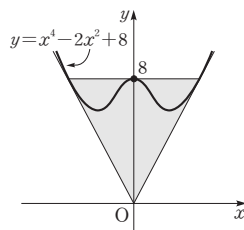
답 ④

81

$f(x)=x^4-2x^2+8$ 로 놓으면 $f'(x)=4x^3-4x$

접점을 (t, t^4-2t^2+8) 로 놓으면 접선의 기울기는

$$f'(t)=4t^3-4t$$



따라서 접선의 방정식은

$$y-(t^4-2t^2+8)=(4t^3-4t)(x-t)$$

$$y=(4t^3-4t)x-3t^4+2t^2+8$$

이것이 원점 $(0, 0)$ 을 지나므로

$$0=-3t^4+2t^2+8, 3t^4-2t^2-8=0$$

$$(t^2-2)(3t^2+4)=0$$

$$t^2=2 \text{ 에서 } t=\pm\sqrt{2}$$

따라서 두 접점은 $(-\sqrt{2}, 8)$, $(\sqrt{2}, 8)$ 이다.

그러므로 구하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 8 = 8\sqrt{2}$$

답 $8\sqrt{2}$

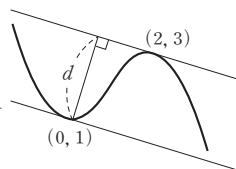
82

$f(x)=-x^3+3x^2-x+1$ 로 놓으면

접선의 기울기는

$$\tan 135^\circ = -1$$

$$f'(x)=-3x^2+6x-1 \\ = -1$$



에서 $x=0$ 또는 $x=2$

따라서 기울기가 -1 이고 두 접점 $(0, 1)$, $(2, 3)$ 을 지나는 두 접선은

$$y-1=-(x-0) \text{ 에서 } y=-x+1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$y-3=-(x-2) \text{ 에서 } y=-x+5 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

직선 $\textcircled{㉠}$ 위의 점 $(0, 1)$ 에서 직선 $\textcircled{㉡}$, 즉

$x+y-5=0$ 사이의 거리 d 는

$$d = \frac{|0+1-5|}{\sqrt{1+1}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

답 $2\sqrt{2}$

KEY point

점 $P(x_1, y_1)$ 에서 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d 는

$$\Rightarrow d = \frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

83

점 $P(a, a^3-3a)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y-(a^3-3a)=(3a^2-3)(x-a)$$

$$\therefore y=(3a^2-3)x-2a^3$$

$$x^3-3x=(3a^2-3)x-2a^3$$

$$x^3-3a^2x+2a^3=0, (x-a)^2(x+2a)=0$$

$$\therefore x=a \text{ (중근)}, x=-2a$$

$$\therefore P(a, a^3-3a), Q(-2a, -8a^3+6a)$$

$$\overline{PQ} \text{의 중점 } M\left(-\frac{a}{2}, \frac{-7a^3+3a}{2}\right)$$

따라서 중점 M 이 그리는 자취의 방정식은

$$x=-\frac{a}{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$y=\frac{-7a^3+3a}{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠에서 $a=-2x$

이것을 ㉡에 대입하여 정리하면

$$y=28x^3-3x \quad (x \neq 0) \quad \text{답 } \textcircled{㉢}$$

KEY point

자취의 방정식 구하는 방법

어떤 조건을 만족시키는 점 P 의 자취를 구하고자 할 때
첫째 : 조건을 만족시키는 점의 좌표를 $P(x, y)$ 로 놓는다.

둘째 : 주어진 조건을 이용하여 x 와 y 의 관계식을 세운다.

셋째 : x, y 이외의 문자가 있으면 그 문자를 소거한다.

84

$$f'(x)=-3x^2+2ax+b>0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

의 해가 $1<x<3$ 이므로

$$(x-1)(x-3)<0, x^2-4x+3<0 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} \text{에서 } 3x^2-2ax-b<0 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

㉡, ㉢이 일치해야 하므로

$$\frac{1}{3}=\frac{-4}{-2a}=\frac{3}{-b}$$

$$\frac{1}{3}=\frac{4}{2a} \text{에서 } a=6$$

$$\frac{1}{3}=\frac{3}{-b} \text{에서 } b=-9$$

$$\therefore a+b=6+(-9)=-3 \quad \text{답 } -3$$

85

$$f'(x)=3x^2-6x+a$$

열린 구간 $(1, 3)$ 에서 $f(x)$ 가 감소함수가 되려면 이 구간에서 $f'(x) \leq 0$ 이어야 한다. 즉,

$$f'(1)=a-3 \leq 0$$

$$\therefore a \leq 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

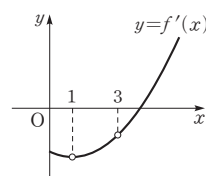
$$f'(3)=9+a \leq 0$$

$$\therefore a \leq -9 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡의 공통 범위는

$$a \leq -9$$

$$\text{답 } a \leq -9$$



86

$x_1 < x_2$ 일 때, $f(x_1) > f(x_2)$ 이면 $f(x)$ 는 감소함수이므로 모든 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$

$$f'(x)=3kx^2-2x+3k \leq 0$$

$$(i) 3k < 0 \text{에서 } k < 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$(ii) \frac{D}{4}=1-9k^2 \leq 0 \text{에서}$$

$$(3k+1)(3k-1) \geq 0$$

$$\therefore k \leq -\frac{1}{3} \text{ 또는 } k \geq \frac{1}{3} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } k \leq -\frac{1}{3} \quad \text{답 } k \leq -\frac{1}{3}$$

87

$$h(x)=f(x)-g(x) \text{로 놓으면}$$

$$h(0)=f(0)-g(0)=0$$

$$h'(x)=f'(x)-g'(x)>0$$

따라서 $h(x)$ 는 증가함수이다.

$$\therefore h(1)=f(1)-g(1)>0$$

$$\text{즉, } f(1)>g(1) \quad \text{답 } \textcircled{㉡}$$

88

함수 $f(x)$ 가 증가함수이므로

$$f'(x) = 3ax^2 - 6x + 3a \geq 0$$

(i) $a > 0$

(ii) $\frac{D}{4} = (-3)^2 - 3a \cdot 3a \leq 0$

$$\therefore a^2 \geq 1$$

(i), (ii)에서 $a \geq 1$

따라서 실수 a 의 최솟값은 1이다.

답 1

89

곡선 $y=f(x)$ 의 접선의 기울기는 $f'(x)$ 의 함숫값이다. $f'(x)$ 는 이차함수이고 주어진 그래프에서

$$f'(a)=0, f'(b)=0$$

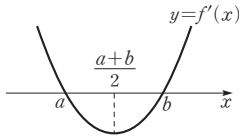
이므로 $y=f'(x)$ 의 그래프

는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $f'(x)$ 가 증가하는

$$\text{구간은 } x > \frac{a+b}{2}$$

답 ③



90

함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하려면 $f(x)$ 가 일대일 대응이어야 하므로 $f(x)$ 는 증가함수 또는 감소함수이어야 한다.

그런데 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수이므로 $f(x)$ 는 증가함수이어야 한다.

$$\therefore f'(x) = x^2 - 4\cos \theta x + 1 \geq 0$$

$$\therefore \frac{D}{4} = (-2\cos \theta)^2 - 1 \leq 0$$

$$(2\cos \theta + 1)(2\cos \theta - 1) \leq 0$$

$$\therefore -\frac{1}{2} \leq \cos \theta \leq \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2}{3}\pi \quad \text{답 } \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2}{3}\pi$$

91

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x^2 + 2x - 3)$$

$$= 3(x+3)(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-3 \text{ 또는 } x=1$$

$x=-3$ 일 때, 극댓값을 갖고 $x=1$ 일 때, 극솟값을

갖는다. 또한, 극댓값과 극솟값의 절댓값이 같으므로

$$f(-3) + f(1) = 0$$

$$(27+a) + (-5+a) = 0, 2a = -22$$

$$\therefore a = -11$$

답 -11

92

$$f'(x) = -6x^2 - 12x = -6x(x+2)$$

따라서 $x=-2$ 일 때, 극솟값

$$f(-2)=1 \text{을 가진다.}$$

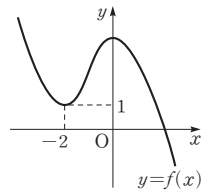
$$\therefore b = -2$$

$$f(-2) = 16 - 24 + a$$

$$= 1$$

$$\therefore a = 9$$

$$\therefore a+b=7$$



답 ②

93

$$f'(x) = (x+1)^2 + (x-a) \cdot 2(x+1)$$

$$= (x+1)(3x+1-2a) = 0$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x = \frac{2a-1}{3}$$

$$\text{그런데 } x=-1 \text{에서 극솟값을 가지므로 } x = \frac{2a-1}{3}$$

에서 극댓값을 가진다. 즉,

$$\frac{2a-1}{3} < -1 \quad \therefore a < -1 \quad \text{답 } a < -1$$

94

$$f'(x) = 3x^2 - 3ax - 6a^2 = 3(x-2a)(x+a)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=2a \text{ 또는 } x=-a (a>0)$$

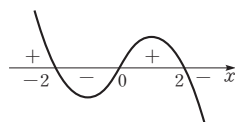
$$\therefore f(-a) - f(2a) = \frac{7}{2}a^3 + 10a^3 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a = \frac{1}{3}$$

답 ②

95

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-2 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$



$x=-2$ 에서 부호가 +에서 -로 변하므로 극대

$x=0$ 에서 부호가 $-$ 에서 $+$ 로 변하므로 극소
 $x=2$ 에서 부호가 $+$ 에서 $-$ 로 변하므로 극대
 따라서 극댓값을 갖는 x 의 값은 $x=-2, 2$

극솟값을 갖는 x 의 값은 $x=0$

답 극댓값을 갖는 x 의 값 : $-2, 2$

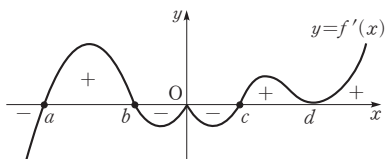
극솟값을 갖는 x 의 값 : 0

참고 증감표를 작성해 보면 다음과 같다.

x	...	-2	...	0	...	2	...
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	\nearrow	극대	\searrow	극소	\nearrow	극대	\searrow

96

$f'(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 값 중 x 의 값의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 바뀔 때, 함수 $f(x)$ 는 극대 또는 극소가 된다.



위의 그림에서

a 와 c 에서 부호가 $-$ 에서 $+$ 로 변하므로 극소

b 에서 부호가 $+$ 에서 $-$ 로 변하므로 극대

따라서 극점의 개수는 모두 3개이다.

답 3

97

$f'(x)=a(x+1)(x-1)$ ($a>0$)로 놓고 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	\nearrow	극대	\searrow	극소	\nearrow

따라서 $-1 < x < 1$ 에서 감소하며

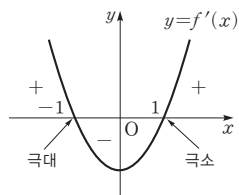
$x=-1$ 일 때 극댓값, $x=1$ 일 때 극솟값을 갖는다.

답 ③

참고 $f'(x)$ 의 부호가 $x=a$ 의 좌우에서

$+$ 에서 $-$ 로 변하면 $x=a$ 에서 극대

$-$ 에서 $+$ 로 변하면 $x=a$ 에서 극소



98

$f(x)=x^3-3ax^2+4a$ 로 놓으면

$$f'(x)=3x^2-6ax=3x(x-2a)$$

$a>0$ 이므로

$x=0$ 일 때, 극댓값 : $4a$,

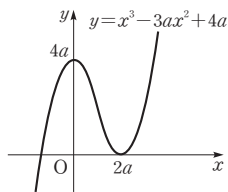
$x=2a$ 일 때,

극솟값 : $-4a^3+4a$

그런데 함수 $y=x^3-3ax^2+4a$ 의 그래프가 x 축에 접하기 위해서는 극솟값 $-4a^3+4a=0$ 이어야 한다.

$$\therefore a=1 (\because a>0)$$

답 1



99

$f'(x)=x^2+2ax+b$ 에서 $f'(-1)=0$, $f'(3)=0$

이므로

$$1-2a+b=0 \quad \text{..... ㉠}$$

$$9+6a+b=0 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡에서 $a=-1$, $b=-3$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+c$$

$$\therefore f(-1)-f(3)=\left(\frac{5}{3}+c\right)-(-9+c)$$

$$=\frac{32}{3}$$

답 $\frac{32}{3}$

100

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 로 놓으면

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c$$

$x=-1$ 에서 극솟값 -7 을 가지므로

$$f'(-1)=0 \text{에서 } 3a-2b+c=0 \quad \text{..... ㉠}$$

$$f(-1)=-7 \text{에서 } -a+b-c+d=-7 \quad \text{..... ㉡}$$

또, 점 $(1, f(1))$ 에서의 접선의 방정식은

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)$$

$$\begin{aligned} \therefore y &= f'(1)x - f'(1) + f(1) \\ \text{그런데 이것은 } y &= 6x - 1 \text{과 같으므로} \\ f'(1) &= 6, -f'(1) + f(1) = -1 \\ \therefore f(1) &= 5 \\ \therefore \begin{cases} 3a + 2b + c = 6 & \cdots \text{㉠} \\ a + b + c + d = 5 & \cdots \text{㉡} \end{cases} \\ \text{㉠, ㉡, ㉢, ㉣에서} \\ a = -\frac{3}{2}, b &= \frac{3}{2}, c = \frac{15}{2}, d = -\frac{5}{2} \\ \therefore f(x) &= -\frac{3}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{15}{2}x - \frac{5}{2} \\ \therefore f(2) &= -12 + 6 + 15 - \frac{5}{2} = \frac{13}{2} \end{aligned}$$

답 $\frac{13}{2}$

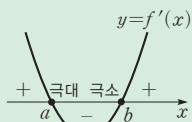
101

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 2ax + b & \cdots \text{㉠} \\ \text{한편, 그래프에서 } f'(x) &= 0 \text{인 } x \text{의 값은 0과 2이므로} \\ f'(x) &= 3x(x-2) = 3x^2 - 6x & \cdots \text{㉡} \\ \text{㉠, ㉡에서 } a &= -3, b = 0 \\ \text{또, } x=0 \text{에서 } f'(x) \text{의 부호가 } + \text{에서 } - \text{로 변하므로} & \text{극댓값을 갖는다.} \\ \text{즉, } f(0) &= 5 \text{이므로 } c = 5 \\ \therefore f(x) &= x^3 - 3x^2 + 5 \\ \text{따라서 극솟값은 } x=2 \text{일 때이므로} \\ f(2) &= 8 - 3 \times 4 + 5 = 1 \end{aligned}$$

답 1

KEY point

$f'(x)$ 의 그래프에 의한 극값의 판정
 $f(x)$ 는
 $x=a$ 에서 극대
 $x=b$ 에서 극소



102

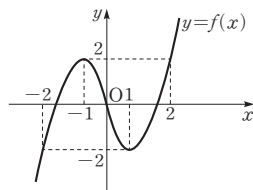
$$\begin{aligned} f'(x) &= 3ax^2 - 3 \\ f(x) \text{가 극값을 가지므로} \\ f'(x) &= 0 \text{에서 } D = 0^2 - 4 \cdot 3a(-3) > 0 \\ \therefore a &> 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{이때 } f'(x) &= 3a\left(x^2 - \frac{1}{a}\right) \\ &= 3a\left(x + \frac{1}{\sqrt{a}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{a}}\right) \\ f'(x) &= 0 \text{에서 } x = \pm \frac{1}{\sqrt{a}} \\ \therefore \text{극댓값: } f\left(-\frac{1}{\sqrt{a}}\right) &= -\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{3}{\sqrt{a}} + b = 4 \\ \frac{2}{\sqrt{a}} + b &= 4 & \cdots \text{㉠} \\ \text{극솟값: } f\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right) &= -\frac{2}{\sqrt{a}} + b = 2 & \cdots \text{㉡} \\ \text{㉠, ㉡에서 } a &= 4, b = 3 & \text{답 } a = 4, b = 3 \end{aligned}$$

103

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1) \\ f'(x) &= 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 1 \\ \text{따라서 함수 } f(x) \text{의 증감표와 그래프의 개형은 다} & \text{음과 같다.} \end{aligned}$$

x	\cdots	-1	\cdots	1	\cdots
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	\nearrow	2	\searrow	-2	\nearrow



- ㄱ. $f(x)$ 는 극댓값 2, 극솟값 -2 를 갖는다. (참)
 ㄴ. $x \geq 2$ 이면 $f(x) \geq 2$ 이다. (참)
 ㄷ. $-2 \leq x \leq 2$ 에서 $f(x)$ 의 최댓값은 2, 최솟값은 -2 이므로 $-2 \leq f(x) \leq 2$ 이다. (참)
 따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

104

$$\begin{aligned} \text{접선이 } x \text{축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 } \frac{\pi}{4} \text{이} \\ \text{므로 접선의 기울기는 } \tan \frac{\pi}{4} = 1, \text{ 즉 } f'(a) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a) - 2f(a+h) + f(a-2h)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2\{f(a+h) - f(a)\} + \{f(a-2h) - f(a)\}}{h} \\
&= -2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\
&\quad + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-2h) - f(a)}{-2h} \times (-2) \\
&= -2f'(a) + (-2)f'(a) \\
&= -4f'(a) = -4
\end{aligned}$$

답 ①

105

$y=f(x)$ 의 그래프가
 $x=a$ 에서 x 축에 접한다고
 하면

$$\begin{aligned}
f(x) &= -x^3 + px^2 + qx \\
&= -x(x-a)^2
\end{aligned}$$

..... ㉠

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -(x-a)^2 - 2x(x-a) \\
&= -(x-a)(3x-a)
\end{aligned}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=a \text{ 또는 } x=\frac{a}{3}$$

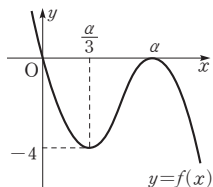
따라서 $f(x)$ 는 $x=\frac{a}{3}$ 에서 극솟값 -4 를 갖는다.

$$\begin{aligned}
\text{㉠에서 } f\left(\frac{a}{3}\right) &= -\frac{a}{3} \left(\frac{a}{3} - a\right)^2 = -\frac{4a^3}{27} \\
\therefore -\frac{4a^3}{27} &= -4 \quad \therefore a=3
\end{aligned}$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}
-x^3 + px^2 + qx &= -x(x-3)^2 \\
&= -x^3 + 6x^2 - 9x
\end{aligned}$$

$$\therefore p=6, q=-9 \quad \text{답 } p=6, q=-9$$



106

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = -2 \text{에서 } f(0)=0$$

따라서 $f(x)=xg(x)$ ($g(x)$ 는 다항함수)라고 하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xg(x)}{x} = g(0) = -2 \quad \text{..... ㉠}$$

또, $x=1$ 에서 극값 -3 을 가지므로

$$f'(1)=0, f(1)=-3$$

한편, $f(x)=xg(x)$ 에서 $f'(x)=g(x)+xg'(x)$

$$\therefore f'(1)=g(1)+g'(1)=0 \quad \text{..... ㉡}$$

$$f(1)=g(1)=-3 \quad \text{..... ㉢}$$

㉠, ㉡, ㉢을 모두 만족시키는 최저차 다항식 $g(x)$ 는 이차함수이므로 $g(x)=ax^2+bx+c$ 라고 하면

$$g'(x)=2ax+b$$

$$\therefore g(0)=c=-2$$

$$g(1)=a+b+c=-3$$

$$g'(1)=2a+b=3 \quad (\because \text{㉡, ㉢})$$

이것을 연립하여 풀면

$$a=4, b=-5, c=-2$$

$$\therefore g(x)=4x^2-5x-2$$

$$\therefore f(x)=x(4x^2-5x-2)$$

$$=4x^3-5x^2-2x$$

$$\text{답 } f(x)=4x^3-5x^2-2x$$

107

$f(x)=ax^2$ 으로 놓으면 $f'(x)=2ax$

접점을 $P(t, at^2)$ 이라고 하면 점 P에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2at$

따라서 점 P에서의 접선의 방정식은

$$y-at^2=2at(x-t)$$

$$\therefore y=2atx-at^2$$

접선이 점 A(2, 0)을 지나므로

$$4at-at^2=0, at(4-t)=0$$

$$at \neq 0 \text{이므로 } t=4 \quad \therefore P(4, 16a)$$

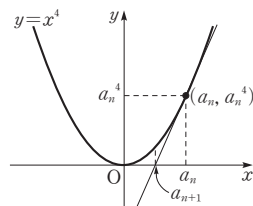
$$\therefore \overline{AP} = \sqrt{(4-2)^2 + (16a-0)^2} = \sqrt{4+256a^2}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \lim_{a \rightarrow 0} \overline{AP} &= \lim_{a \rightarrow 0} \sqrt{4+256a^2} \\
&= \sqrt{4} = 2
\end{aligned}$$

답 2

108

$f(x)=x^4$ 으로 놓으면 $f'(x)=4x^3$



점 (1, 1)에서의 접선의 방정식은

$$y-1=4(x-1) \quad \therefore y=4x-3$$

$y=4x-3$ 과 x 축의 교점은 $(\frac{3}{4}, 0)$, 즉 $a_1=\frac{3}{4}$

또, 곡선 위의 점 (a_n, a_n^4) 에서의 접선의 방정식은

$$y-a_n^4=4a_n^3(x-a_n)$$

$$\therefore y=4a_n^3x-3a_n^4$$

$y=4a_n^3x-3a_n^4$ 과 x 축의 교점의 x 좌표가 a_{n+1} 이므로

$$a_{n+1}=\frac{3}{4}a_n$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항 $a_1=\frac{3}{4}$, 공비 $r=\frac{3}{4}$ 인 등

비수열이므로 $a_n=\frac{3}{4} \cdot (\frac{3}{4})^{n-1} = (\frac{3}{4})^n$

$$\therefore a_5 = (\frac{3}{4})^5$$

답 ⑤

109

t 초 후의 속도를 v 라고 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=9-t^2$$

운동 방향이 바뀔 때는 $v=0$ 이므로

$$9-t^2=0 \quad \therefore t=\pm 3$$

그런데 $t>0$ 이므로 $t=3$

따라서 $t=3$ 일 때, $x=27-9=18$

답 ②

110

$$f'(x)=6x-3ax^2=-3ax(x-\frac{2}{a})$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=\frac{2}{a}$$

x	0	...	$\frac{2}{a}$...	2
$f'(x)$	0	+	0	-	
$f(x)$	0	\nearrow	$\frac{4}{a^2}$	\searrow	$12-8a$

그런데 $a>1$ 이므로 $\frac{2}{a}<2$

$$f(0)=0, f(\frac{2}{a})=\frac{4}{a^2}, f(2)=12-8a$$

따라서 최솟값은 $f(2)$ 이므로

$$f(2)=12-8a=-4$$

$$\therefore a=2$$

답 ③

111

$f(x)=x^4+2ax^2-4(a+1)x+a^2$ 으로 놓으면

$$f'(x)=4x^3+4ax-4(a+1)$$

$$=4(x-1)(x^2+x+a+1)$$

따라서 $x=1$ 에서 극소이며 최소이다.

($\because x^2+x+a+1>0$)

최솟값은

$$f(1)=1+2a-4(a+1)+a^2$$

$$=a^2-2a-3$$

이고 최솟값 $a^2-2a-3>0$ 이어야 주어진 부등식은

항상 성립하므로 $(a-3)(a+1)>0$ 에서

$$a>3 \quad (\because a>0)$$

답 ⑤

112

$x^3-2x^2-6x+2=x^2+3x+a$ 에서

$$x^3-3x^2-9x+2-a=0$$

$f(x)=x^3-3x^2-9x+2-a$ 로 놓으면

$$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

$$\therefore \text{극댓값: } f(-1)=7-a$$

$$\text{극솟값: } f(3)=-25-a$$

서로 다른 세 실근을 가지므로

$$(7-a)(-25-a)<0, (a-7)(a+25)<0$$

$$\therefore -25< a < 7$$

$$\text{답 } -25 < a < 7$$

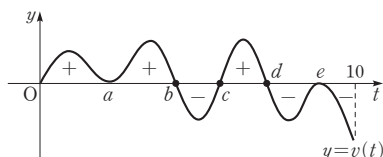
KEY point

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 교점의 개수

\Rightarrow 방정식 $f(x)=g(x)$ 의 실근의 개수

113

속도 $v(t)$ 의 부호가 바뀌는 시각 t 에서 점 P의 진행 방향이 바뀐다.



이 그림에서 속도 $v(t)$ 의 부호가 바뀌는 시각은 $t=b, c, d$ 이므로 점 P의 진행 방향이 3번 바뀐다.

답 3

114

$f(x)=2x^3-6ax-3a$ 가 극값을 가지므로 $f'(x)=6x^2-6a=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

$$D>0 \quad \therefore a>0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$f'(x)=6(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})=0$$

$$\therefore x=\sqrt{a} \text{ 또는 } x=-\sqrt{a}$$

$f(x)=0$ 이 하나의 실근만 가지므로

$$f(\sqrt{a}) \cdot f(-\sqrt{a})>0$$

$$(-4a\sqrt{a}-3a)(4a\sqrt{a}-3a)>0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에서

$$0<a<\frac{9}{16} \quad \text{답 } 0<a<\frac{9}{16}$$

115

$f(x)=4(1+x^3)-(1+x)^3$ 으로 놓으면

$$f(x)=3x^3-3x^2-3x+3$$

$$f'(x)=9x^2-6x-3=3(3x+1)(x-1)$$

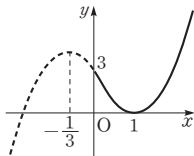
$f'(x)=0$ 에서

$$x=-\frac{1}{3} \text{ 또는 } x=1$$

$x \geq 0$ 에서 $x=1$ 일 때, 극소이며 최솟이고 $f(1)=0$ 이므로 이 범위에서 $f(x) \geq 0$ 이다.

$$\therefore 4(1+x^3) \geq (1+x)^3$$

$$\text{답 } 4(1+x^3) \geq (1+x)^3$$



116

$x^3+a \geq 3x$ 에서 $x^3-3x+a \geq 0$

$f(x)=x^3-3x+a$ 로 놓으면 $x>0$ 인 모든 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이므로 $x>0$ 에서 $(f(x)$ 의 최솟값) ≥ 0 이어야 한다.

$$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ (부적당) 또는 $x=1$

$x=1$ 일 때, 최솟값 $-2+a$ 를 가지므로 $x>0$ 인 모

든 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이기 위해서는

$$-2+a \geq 0 \quad \therefore a \geq 2$$

따라서 a 의 최솟값은 2이다.

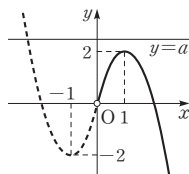
답 2

다른풀이 $x^3+a \geq 3x$ 에서 $a \geq -x^3+3x$

$f(x)=-x^3+3x$ 로 놓으면

$$f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$$

$f(-1)=-2, f(0)=0, f(1)=2$ 이므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



따라서 $a \geq f(x)$ 를 만족시키는 a 의 최솟값은 2이다.

117

$f(x)=4x^3-3x^2-6x-a+3$ 으로 놓으면

$$f'(x)=12x^2-6x-6=6(2x+1)(x-1)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=1$ 일 때 극소이다.

따라서 $x>-1$ 인 범위에

서 $f(x)>0$ 이라면

$x>-1$ 에서 $y=f(x)$ 의

그래프가 x 축보다 위쪽에

있어야 한다.

$$\therefore \text{극솟값} : f(1) = -2-a > 0$$

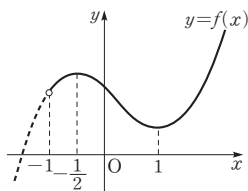
$$\therefore a < -2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\text{또, } f(-1)=2-a \geq 0 \quad \therefore a \leq 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 a 의 값의 범위는

$$a < -2$$

$$\text{답 } a < -2$$



118

$h(x)=f(x)-g(x)=4x^3-3x^2-6x+3-a$ 로 놓으면

$$h'(x)=12x^2-6x-6$$

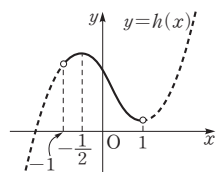
$$=6(2x+1)(x-1)$$

$-1< x < 1$ 에서 $h(x) \geq 0$

이라면 $y=h(x)$ 의 그래프

가 x 축과 만나거나 x 축보

다 위쪽에 있어야 한다. 즉,



$$h(-1)=2-a \geq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$h(1)=-2-a \geq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧을 동시에 만족시키는 a 의 값의 범위는

$$a \leq -2 \quad \text{답 } a \leq -2$$

119

오른쪽 그림에서 점 C의 좌표를 $(t, 0)$ 이라고 하면 직사각형 ABCD의 넓이 S는

$$S=2t(12-t^2)$$

한편, $12-x^2=0$ 에서

$$x=\pm 2\sqrt{3}$$

$$\therefore 0 < t < 2\sqrt{3}$$

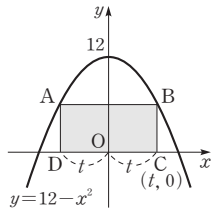
$$S'=24-6t^2=-6(t-2)(t+2)=0$$

$$\therefore t=2 \text{ 또는 } t=-2$$

$t=2$ 에서 극대이며 최대이다.

따라서 최댓값은

$$S_{t=2}=2 \cdot 2(12-2^2)=32 \quad \text{답 } 32$$



120

t 초 후의 밑면의 반지름의 길이를 r , 높이를 h 라고 하면

$$r=20-0.2t, h=5+0.5t$$

$$\text{부피 } V=\pi r^2 h=\pi(20-0.2t)^2(5+0.5t)$$

$$=\frac{\pi}{50}(t-100)^2(t+10)$$

$$V'=\frac{\pi}{50} \cdot 2(t-100)(t+10)+\frac{\pi}{50}(t-100)^2$$

$$=\frac{\pi}{50}(t-100)(3t-80)$$

$$V'=0 \text{에서 } t=100 \text{ 또는 } t=\frac{80}{3}$$

그런데 밑면의 반지름의 길이가 200 mm이고 매초 2 mm씩 감소하므로

$$0 < t < 100$$

따라서 $t=\frac{80}{3}$ 일 때, 극대이며 최대이다.

$$\text{답 } \frac{80}{3}$$

121

두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q 라고 하면

$$v_P=\frac{dx}{dt}=3t^2-2t$$

$$v_Q=\frac{dy}{dt}=4t+k$$

두 점 P, Q의 속도가 같으므로

$$3t^2-2t=4t+k, \text{ 즉 } 3t^2-6t-k=0$$

그런데 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 때가 두 번 있어야 하므로 이차방정식 $3t^2-6t-k=0$ 이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다. 즉,

$$(i) \frac{D}{4}=(-3)^2-3(-k)>0 \quad \therefore k>-3$$

$$(ii) (\text{두 근의 합})=2>0$$

$$(iii) (\text{두 근의 곱})=\frac{-k}{3}>0 \quad \therefore k<0$$

$$(i), (ii), (iii) \text{에서 } -3 < k < 0 \quad \text{답 } -3 < k < 0$$

122

(i) t 초 후의 반지름의 길이는

$$3+0.1t$$

t 초 후의 공의 겉넓이를 S 라고 하면

$$S=4\pi r^2=4\pi(3+0.1t)^2$$

t 에 관하여 미분하면

$$\begin{aligned} S' &= 4\pi \times 2(3+0.1t) \times 0.1 \\ &= \pi(2.4+0.08t) \end{aligned}$$

5초 후, 즉 $t=5$ 일 때,

$$S'_{t=5}=\pi(2.4+0.08 \times 5)=2.8\pi(\text{cm}^2/\text{초})$$

(ii) t 초 후의 공의 부피를 V 라고 하면

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi(3+0.1t)^3$$

t 에 관하여 미분하면

$$\begin{aligned} V' &= \frac{4}{3}\pi \times 3(3+0.1t)^2 \times 0.1 \\ &= 0.4\pi(3+0.1t)^2 \end{aligned}$$

$t=5$ 일 때,

$$\begin{aligned} V'_{t=5} &= 0.4\pi(3+0.1 \times 5)^2 \\ &= 4.9\pi(\text{cm}^3/\text{초}) \end{aligned}$$

$$\text{답 겉넓이의 변화율 : } 2.8\pi \text{ cm}^2/\text{초}$$

$$\text{부피의 변화율 : } 4.9\pi \text{ cm}^3/\text{초}$$

123

피타고라스의 정리에 의하여

$$x^2 + y^2 = 25 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①의 양변을 t 에 관하여 미분하면

$$2x \cdot \frac{dx}{dt} + 2y \cdot \frac{dy}{dt} = 0$$

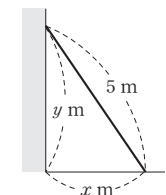
$$\therefore \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y} \cdot \frac{dx}{dt}$$

그런데 조건에서 매초 12 cm의 속도로 미끄러지므로

$$\frac{dx}{dt} = 0.12$$

또, $y=3$ 이면 ①에서 $x=4$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = -\frac{4}{3} \times 0.12 = -0.16$$



답 -16 cm/초

124

밀변의 길이를 문제의 뜻에 따라 x , $3x$, 높이를 h 라고 하면

(겉넓이)

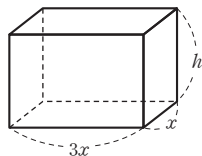
$$= (\text{밀넓이}) \times 2 + (\text{옆넓이})$$

$$= 3x \cdot x \cdot 2 + x \cdot h \cdot 2$$

$$+ 3x \cdot h \cdot 2$$

$$= 6x^2 + 8xh = 200$$

$$\therefore h = \frac{100 - 3x^2}{4x} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$



직육면체의 부피를 V 라고 하면

$$V = 3x^2 h = 3x^2 \cdot \frac{100 - 3x^2}{4x} = \frac{3}{4}x(100 - 3x^2)$$

$$V' = \frac{3}{4}(100 - 9x^2) = 0 \text{에서 } x = \pm \frac{10}{3}$$

$$x = \frac{10}{3} \text{일 때, } V \text{가 최대가 되므로 } \textcircled{1} \text{에서 } h = 5$$

답 5

125

(1) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + k$ 로 놓으면

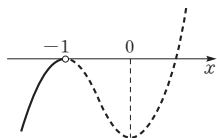
$$f'(x) = 6x^2 + 6x = 6x(x+1)$$

$x=0$ 일 때, 극소이고

$x=-1$ 일 때, 극대이며

$x < -1$ 일 때, $f(x) < 0$ 이

려면 오른쪽 그림에서처럼



$(f(x) \text{의 최댓값}) \leq 0$

$$\therefore f(-1) = 1 + k \leq 0$$

$$\therefore k \leq -1$$

따라서 실수 k 의 최댓값은 -1 이다.

(2) $x^3 + x^2 - 4x \leq x^2 + 8x - k$ 에서

$$x^3 - 12x + k \leq 0$$

$f(x) = x^3 - 12x + k$ 로 놓으면

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x+2)(x-2)$$

$x = -2$ 일 때, 극대,

$x = 2$ 일 때,

극소이며 $3 < x < 4$

일 때, $f(x) \leq 0$ 이러

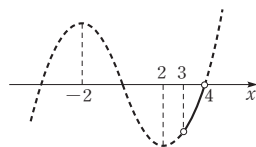
면 오른쪽 그림에서처럼

$(f(x) \text{의 최댓값}) \leq 0$

$$f(4) = 64 - 48 + k \leq 0$$

$$16 + k \leq 0 \quad \therefore k \leq -16$$

$$\text{답 (1) } -1 \quad (2) \ k \leq -16$$



KEY point

$x > a$ 일 때, 부등식 $f(x) < 0$ 의 증명

[방법 1] $x > a$ 에서 $(f(x) \text{의 최댓값}) < 0$ 임을 보인다.

[방법 2] $x > a$ 에서 $f(x)$ 가 감소함수이고 $f(a) \leq 0$

$$\Rightarrow f'(x) < 0 \text{이고 } f(a) \leq 0$$

126

t 초 후의 속도를 v 라고 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 9t + 6 = 3(t-1)(t-2)$$

ㄱ. 출발할 때는 $t=0$ 이므로

$$v = 3(0-1)(0-2) = 6 \text{ (참)}$$

ㄴ. 방향을 바꾸는 경우는 $v=0$ 일 때이고 $v=0$ 에서

$t=1$ 또는 $t=2$ 이므로 점 P는 $t=1, 2$ 의 좌, 우

에서 방향을 두 번 바꾼다. (참)

ㄷ. 점 P가 원점을 통과하는 것은 $x=0$ 일 때이므로

$$t^3 - \frac{9}{2}t^2 + 6t = 0, \quad t(2t^2 - 9t + 12) = 0$$

$$\text{여기서 } 2t^2 - 9t + 12 = 2\left(t - \frac{9}{4}\right)^2 + \frac{15}{8} > 0 \text{이므로}$$

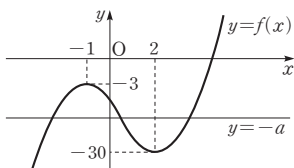
$$t=0 \text{이다.}$$

따라서 $t=0$ 일 때가 출발할 때이고 다시는 원점으로 돌아오지 않는다. (거짓)
 이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

127

함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동시키면 함수 $y=g(x)$ 의 그래프가 되므로 $g(x)=f(x)+a$ 이고, 방정식 $g(x)=0$ 의 근은 방정식 $f(x)=-a$ 의 근과 같다.

$$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)=0 \text{에서} \\ x=-1 \text{ 또는 } x=2$$



방정식 $g(x)=0$ 이 서로 다른 두 실근만을 가지려면 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=-a$ 가 극대점 또는 극소점에서 접해야 하므로

$$-a=-30 \text{ 또는 } -a=-3$$

$$\therefore a=30 \text{ 또는 } a=3$$

따라서 모든 a 의 값의 합은 $30+3=33$ 이다.

답 33

128

점 P의 속도를 v_P 라고 하면

$$v_P=2t(t^2-8t+18)+t^2(2t-8) \\ =4t^3-24t^2+36t$$

점 Q의 속도 $v_Q=m$

$$\therefore 4t^3-24t^2+36t=m$$

$$4t^3-24t^2+36t-m=0$$

$f(t)=4t^3-24t^2+36t-m$ 으로 놓으면

$$f'(t)=12t^2-48t+36=12(t-1)(t-3)$$

$f'(t)=0$ 에서 $t=1$ 또는 $t=3$

점 P와 점 Q의 속도가 같게 되는 때가 3회 있으므로 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$$\therefore f(1) \cdot f(3) < 0, (16-m) \cdot (-m) < 0$$

$$\therefore 0 < m < 16$$

답 $0 < m < 16$

129

임의의 실수 x_1, x_2 에 대하여 $f(x_1) \geq g(x_2)$ 가 되기 위해서는 $f(x)$ 의 최솟값이 $g(x)$ 의 최댓값보다 크거나 같아야 한다.

$$f'(x)=4x^3+2x-6=2(x-1)(2x^2+2x+3) \text{에서} \\ 2x^2+2x+3 > 0 \text{이므로 } f'(x)=0 \text{에서 } x=1$$

따라서 $x=1$ 일 때, $f(x)$ 는 최솟값을 가지고 $f(x)$ 의 최솟값은 -4 이다.

한편,

$$g(x)=-2x^2-16x+a \\ =-2(x+4)^2+32+a$$

에서 $x=-4$ 일 때, $g(x)$ 는 최댓값 $32+a$ 를 가지므로 $g(x)$ 의 최댓값은 $32+a$

따라서 $f(x)$ 의 최솟값이 $g(x)$ 의 최댓값보다 크거나 같아야 하므로 $-4 \geq 32+a \quad \therefore a \leq -36$

따라서 a 의 최댓값은 -36 이다.

답 -36

130

x 개를 판매하여 얻은 이익을 $P(x)$ 라고 하면

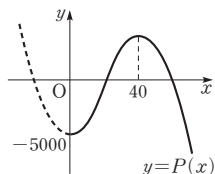
$$P(x)=1200x-f(x) \\ =1200x-(x^3-60x^2+1200x+5000) \\ =-x^3+60x^2-5000$$

$$P'(x)=-3x^2+120x=-3x(x-40)$$

$P'(x)=0$ 에서

$$x=0 \text{ 또는 } x=40$$

$x=40$ 일 때, $P(x)$ 는 극대이며 최댓값을 갖는다.



답 ①

131

$f(x)=x^3$ 으로 놓으면

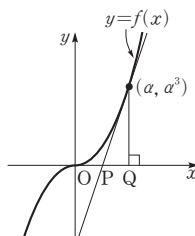
$$f'(x)=3x^2$$

점 Q의 x 좌표를 a 라고 하면

접점의 좌표는 (a, a^3) 이다.

또, 이 점에서의 접선의 기울

기는 $f'(a)=3a^2$



따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y - a^3 = 3a^2(x - a)$$

$$\therefore y = 3a^2x - 2a^3$$

이 접선이 점 $P(2t^3 - 3t, 0)$ 을 지나므로

$$0 = 3a^2(2t^3 - 3t) - 2a^3$$

$$2a^3 = 3a^2(2t^3 - 3t)$$

$$\therefore a = 3t^3 - \frac{9}{2}t$$

따라서 점 Q의 x 좌표는

$$x = 3t^3 - \frac{9}{2}t$$

속도 v 는 $v = x' = 9t^2 - \frac{9}{2}$

가속도 a 는 $a = v' = 18t$

$t = 1$ 일 때, 점 Q의 속도는 $9 - \frac{9}{2} = \frac{9}{2}$, 가속도는 18

답 속도 : $\frac{9}{2}$, 가속도 : 18

132

밑면의 한 변의 길이 : $15 - 2x$

높이 : $x \cdot \tan 30^\circ = \frac{x}{\sqrt{3}}$

부피 : $V = \frac{\sqrt{3}}{4} (15 - 2x)^2 \cdot \frac{x}{\sqrt{3}}$

$$= \frac{x}{4} (15 - 2x)^2$$

$$= \frac{x}{4} (2x - 15)^2$$

그런데 $15 - 2x > 0$ 에서

$$0 < x < \frac{15}{2}$$

$$V' = \frac{1}{4} (2x - 15)^2 + \frac{x}{4} \times 2(2x - 15) \times 2$$

$$= \frac{1}{4} (2x - 15)^2 + x(2x - 15)$$

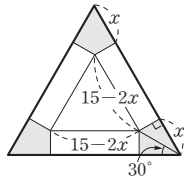
$$= (2x - 15) \left\{ \frac{1}{4} (2x - 15) + x \right\}$$

$$= (2x - 15) \left(\frac{3}{2}x - \frac{15}{4} \right)$$

$$\therefore x = \frac{15}{2} \text{ 또는 } x = \frac{5}{2}$$

따라서 $x = \frac{5}{2}$ 일 때, 부피가 최대가 된다.

답 $\frac{5}{2}$



III. 다항함수의 적분법

133

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (3x^2 + 2x - 1) dx$$

$$= x^3 + x^2 - x + C$$

$$f(0) = 1 \text{에서 } C = 1$$

따라서 $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$ 이므로

$$f(-1) = -1 + 1 + 1 + 1 = 2$$

답 2

134

$$\frac{d}{dx} \int \{f(x) + 1\} dx = \left(\frac{1}{4} x^4 - \frac{3}{2} x^2 + C \right)'$$

$$f(x) + 1 = x^3 - 3x$$

$$\therefore f(x) = x^3 - 3x - 1$$

$$\therefore f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$$

그런데 $f(x)$ 는 $x = -1$ 일 때 극대이므로 극댓값은

$$f(-1) = -1 + 3 - 1 = 1$$

답 1

135

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{2h} \cdot 2$$

$$= 2f'(1)$$

$$f(x) = \int (x^2 + 4x + 3) dx \text{에서}$$

$$f'(x) = x^2 + 4x + 3$$

$$\text{이므로 } 2f'(1) = 2(1 + 4 + 3) = 16$$

답 16

136

$f'(x) = k(2x + 1)$ (k 는 상수)이므로

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int k(2x + 1) dx$$

$$= kx^2 + kx + C$$

곡선 $y = f(x)$ 는 두 점 $(0, -1)$, $(1, 3)$ 을 지나므로

$$f(0) = C = -1, f(1) = k + k + C = 3$$

$$\therefore C = -1, k = 2$$

$$\therefore f(x) = 2x^2 + 2x - 1 \quad \text{답 } y = 2x^2 + 2x - 1$$

137

$f'(x)=0$ 의 두 근이 $-1, 0$ 이므로

$$f'(x)=ax(x+1)=ax^2+ax \quad (a<0)$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int f'(x)dx = \int (ax^2+ax)dx \\ &= \frac{a}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2 + C \quad \dots\dots \textcircled{㉠} \end{aligned}$$

$a<0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x=-1$ 일 때 극소이고 $x=0$ 일 때 극대이다.

$$\therefore f(-1)=-1, f(0)=1$$

$$\text{즉, } f(-1)=-\frac{a}{3}+\frac{a}{2}+C=-1, f(0)=C=1$$

$$\therefore a=-12, C=1$$

$$\therefore f(x)=-4x^3-6x^2+1$$

$$\text{답 } f(x)=-4x^3-6x^2+1$$

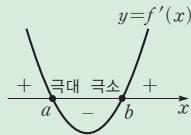
KEY point

$f'(x)$ 의 그래프에 의한 극값의 판정

$f(x)$ 는

$x=a$ 에서 극대

$x=b$ 에서 극소



138

$$\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=2x+1\text{의}$$

양변을 x 에 관하여 적분하면

$$f(x)+g(x)=x^2+x+C_1 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\cdot g(x)\}=3x^2-2x+2\text{의}$$

양변을 x 에 관하여 적분하면

$$f(x)\cdot g(x)=x^3-x^2+2x+C_2 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에 $x=0$ 을 대입하면

$$f(0)+g(0)=C_1$$

$$\therefore C_1=2-1=1$$

$$f(0)\cdot g(0)=C_2$$

$$\therefore C_2=2\times(-1)=-2$$

$$\therefore f(x)+g(x)=x^2+x+1 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$$f(x)\cdot g(x)=x^3-x^2+2x-2$$

$$=(x-1)(x^2+2) \quad \dots\dots \textcircled{㉣}$$

$\textcircled{㉢}, \textcircled{㉣}$ 에서 $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 t 에 대한 이차방정식

$$t^2-\{f(x)+g(x)\}t+f(x)\cdot g(x)=0$$

$$t^2-(x^2+x+1)t+(x-1)(x^2+2)=0$$

의 두 근이다.

$$\therefore \begin{cases} f(x)=x-1 \\ g(x)=x^2+2 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} f(x)=x^2+2 \\ g(x)=x-1 \end{cases}$$

그런데 $f(0)=2, g(0)=-1$ 을 만족시키는 것은

$$f(x)=x^2+2, g(x)=x-1$$

$$\therefore f(2)+g(1)=6+0=6 \quad \text{답 } \textcircled{3}$$

139

$f'(x)=ax^2-3x-6$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int (ax^2-3x-6)dx \\ &= \frac{a}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + C \end{aligned}$$

그런데 $f(x)$ 가 $x=-1$ 에서 극댓값 $\frac{11}{2}$ 을 가지므로

$$f'(-1)=0, f(-1)=\frac{11}{2}$$

$$f'(-1)=a+3-6=0\text{에서 } a=3$$

$$f(-1)=-\frac{a}{3}-\frac{3}{2}+6+C=\frac{11}{2}\text{에서 } C=2$$

$$\therefore f'(x)=3x^2-3x-6$$

$$=3(x+1)(x-2)$$

따라서 $f(x)$ 는 $x=2$ 일 때 극소이고

$$f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+2$$

이므로 극솟값은

$$f(2)=-8 \quad \text{답 } a=3, \text{ 극솟값} : -8$$

140

$$(1) \text{ (주어진 식)} = \int_{-1}^1 \{(x+1)^2 - (x-1)^2\}dx$$

$$= \int_{-1}^1 4x dx = \left[2x^2 \right]_{-1}^1 = 0$$

$$(2) \text{ (주어진 식)} = \int_{-1}^1 (x^3 - 2x^2 + x)dx$$

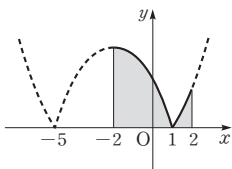
$$= 2 \int_0^1 (-2x^2)dx + \int_{-1}^1 (x^3 + x)dx = 0$$

$$= 2 \left[-\frac{2}{3}x^3 \right]_0^1 = -\frac{4}{3}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \text{ (주어진 식)} &= \int_1^2 (x^2+x)dx + \int_2^3 (x^2+x)dx \\
 &= \int_1^3 (x^2+x)dx \\
 &= \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_1^3 \\
 &= \left(9 + \frac{9}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{38}{3}
 \end{aligned}$$

(4) $-2 \leq x < 1$ 일 때,

$$\begin{aligned}
 |x^2+4x-5| &= -(x^2+4x-5) \\
 &= -x^2-4x+5
 \end{aligned}$$



$1 \leq x \leq 2$ 일 때,

$$|x^2+4x-5| = x^2+4x-5$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \text{ (주어진 식)} &= \int_{-2}^1 (-x^2-4x+5)dx \\
 &\quad + \int_1^2 (x^2+4x-5)dx \\
 &= \left[-\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5x \right]_{-2}^1 \\
 &\quad + \left[\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x \right]_1^2 \\
 &= 18 + \frac{10}{3} = \frac{64}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5) \text{ (주어진 식)} &= \int_1^4 (3x^2-2x)dx \\
 &= \left[x^3 - x^2 \right]_1^4 \\
 &= (64-16) - (1-1) = 48
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (6) \text{ (주어진 식)} &= \int_0^9 \frac{x^3+8}{x+2} dx \\
 &= \int_0^9 \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2} dx \\
 &= \int_0^9 (x^2-2x+4) dx \\
 &= \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 4x \right]_0^9 \\
 &= 243 - 81 + 36 \\
 &= 198
 \end{aligned}$$

답 (1) 0 (2) $-\frac{4}{3}$ (3) $\frac{38}{3}$

(4) $\frac{64}{3}$ (5) 48 (6) 198

141

(주어진 식)

$$\begin{aligned}
 &= \int_1^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx - \int_3^4 f(x)dx \\
 &= \int_1^4 f(x)dx + \int_4^3 f(x)dx \\
 &= \int_1^3 f(x)dx
 \end{aligned}$$

$$= \int_1^3 (x^2-2x)dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_1^3 = \frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

142

$$\begin{aligned}
 \text{(주어진 식)} &= \int_{-2}^0 f(x)dx + \int_0^3 f(x)dx - \int_1^3 f(x)dx \\
 &= \int_{-2}^1 f(x)dx = \int_{-2}^1 |x|dx \\
 &= \int_{-2}^0 (-x)dx + \int_0^1 xdx \\
 &= \left[-\frac{x^2}{2} \right]_{-2}^0 + \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 \\
 &= 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}
 \end{aligned}$$

답 $\frac{5}{2}$

143

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 f(x)dx &= \int_0^1 (ax+b)dx = \left[\frac{a}{2}x^2 + bx \right]_0^1 \\
 &= \frac{a}{2} + b = 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 xf(x)dx &= \int_0^1 (ax^2+bx)dx \\
 &= \left[\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 \right]_0^1 \\
 &= \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}
 \end{aligned}$$

㉠, ㉡에서 $a=18, b=-8$

$$\therefore a+b=10$$

답 10

144

$$\begin{aligned}
 \int_0^2 f(x)dx &= \int_0^1 (x^2+4)dx + \int_1^2 (2x+3)dx \\
 &= \left[\frac{1}{3}x^3 + 4x \right]_0^1 + \left[x^2 + 3x \right]_1^2 \\
 &= \left(\frac{1}{3} + 4 \right) + (10-4) = \frac{31}{3}
 \end{aligned}$$

답 ⑤

145

$$\begin{aligned} f(a) &= \int_a^{a+1} (x^2 + a^2) dx \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3 + a^2 x \right]_a^{a+1} = 2a^2 + a + \frac{1}{3} \\ \therefore f(x) &= 2x^2 + x + \frac{1}{3} \\ \therefore \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 \left(2x^2 + x + \frac{1}{3} \right) dx \\ &= \left[\frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x \right]_0^1 \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

답 $\frac{3}{2}$

146

주어진 그래프에서

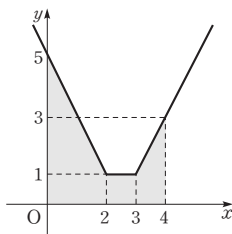
$0 \leq x \leq 2$ 일 때, $f(x) \leq 0$

$x \geq 2$ 일 때, $f(x) \geq 0$

- ① $\int_0^2 f(x) dx < 0$
- ② $\int_1^3 f(x) dx < \int_2^3 f(x) dx$
- ③ $\int_0^3 f(x) dx < \int_1^3 f(x) dx$
- ④ $\int_5^2 f(x) dx = -\int_2^5 f(x) dx < 0$
- ⑤ $\int_2^4 f(x) dx > \int_2^3 f(x) dx > 0$

답 ⑤

147



(주어진 식)

$$\begin{aligned} &= \int_0^2 \{-(x-2) - (x-3)\} dx \\ &\quad + \int_2^3 \{(x-2) - (x-3)\} dx \\ &\quad + \int_3^4 \{(x-2) + (x-3)\} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^2 (-2x+5) dx + \int_2^3 dx + \int_3^4 (2x-5) dx \\ &= \left[-x^2+5x \right]_0^2 + \left[x \right]_2^3 + \left[x^2-5x \right]_3^4 \\ &= 6+1+2 \\ &= 9 \end{aligned}$$

답 9

148

$$\begin{aligned} &\int_0^1 (x-k)^2 f(x) dx \\ &= \int_0^1 (x^2 - 2kx + k^2) f(x) dx \\ &= \int_0^1 x^2 f(x) dx - 2k \int_0^1 x f(x) dx + k^2 \int_0^1 f(x) dx \\ &\int_0^1 f(x) dx = 1, \int_0^1 x f(x) dx = 2 \text{이므로} \\ &\quad (\text{주어진 식}) = k^2 - 4k + \int_0^1 x^2 f(x) dx \\ &\quad = (k-2)^2 - 4 + \int_0^1 x^2 f(x) dx \end{aligned}$$

따라서 주어진 식은 $k=2$ 일 때 최소가 된다.

답 2

149

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때, (분모) $\rightarrow 0$ 이므로
(분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$f(1) = a + b + c = 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

또, $f(1) = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1) \\ \therefore f'(1) &= 1 \end{aligned}$$

조건에서 $f'(x) = 3ax^2 + b$ 이므로

$$f'(1) = 3a + b = 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\text{또, } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (ax^3 + bx + c) dx$$

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{a}{4} x^4 + \frac{b}{2} x^2 + cx \right]_0^1 \\ &= \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c = 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉢} \end{aligned}$$

㉠, ㉡, ㉢에서 $a=2, b=-5, c=3$

답 $a=2, b=-5, c=3$

150

주어진 그림에서 $f'(x)=2x$ 이므로

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int 2x dx = x^2 + C$$

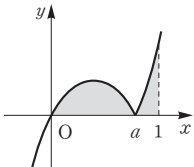
$$f(0)=2 \text{이므로 } C=2 \quad \therefore f(x)=x^2+2$$

$$\begin{aligned} \therefore F(x) &= \int_0^1 f(x-t) dt \\ &= \int_0^1 \{(x-t)^2 + 2\} dt \\ &= \int_0^1 (x^2 - 2tx + t^2 + 2) dt \\ &= \left[x^2 t - t^2 x + \frac{t^3}{3} + 2t \right]_0^1 \\ &= x^2 - x + \frac{1}{3} + 2 = x^2 - x + \frac{7}{3} \\ &= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{12} \end{aligned}$$

따라서 $F(x)$ 는 $x=\frac{1}{2}$ 일 때 최솟값 $\frac{25}{12}$ 를 갖는다.

답 $\frac{25}{12}$

151

$$\begin{aligned} \int_0^1 x|x-a| dx &= \int_0^a x(a-x) dx \\ &\quad + \int_a^1 x(x-a) dx \end{aligned}$$


$$\begin{aligned} &= \int_0^a (ax - x^2) dx + \int_a^1 (x^2 - ax) dx \\ &= \left[\frac{a}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^a + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{a}{2}x^2 \right]_a^1 \\ &= \left(\frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{3}a^3 \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{a}{2} \right) - \left(\frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{2}a^3 \right) \\ &= \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$f(a) = \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{3} \text{이라고 하면}$$

$$f'(a)=0 \text{에서 } a^2 - \frac{1}{2}=0, \left(a - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(a + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0$$

$$0 \leq a \leq 1 \text{에서 } a = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

그런데 $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 일 때 극소이므로 $a=0$ 일 때

정적분 $\int_0^1 x|x-a| dx$ 는 최대가 된다. 답 ①

152

정적분의 정의에 의하여

$$f(x)=x^2, \quad a=0, \quad b=2$$

인 경우이므로

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n}$$

$$x_k = a + k\Delta x = \frac{2k}{n}$$

$$f(x_k) = x_k^2 = \left(\frac{2k}{n}\right)^2 = \frac{4k^2}{n^2}$$

$$\therefore \int_0^2 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x$$

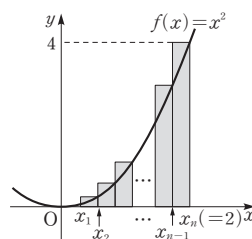
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{4k^2}{n^2} \cdot \frac{2}{n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{8}{n^3} \cdot k^2$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{8}{3}$$

답 $\frac{8}{3}$



153

$$f(a) = \int_{-1}^1 (a^3 - 9ax^2) dx$$

$$= 2 \int_0^1 (a^3 - 9ax^2) dx$$

$$= 2 \left[a^3 x - 3ax^3 \right]_0^1$$

$$= 2a^3 - 6a$$

$$\therefore f'(a) = 6a^2 - 6$$

$$= 6(a+1)(a-1)$$

$$f'(a)=0 \text{에서 } a=-1 \text{ 또는 } a=1$$

a	-2	...	-1	...	1	...	3
$f'(a)$	+	+	0	-	0	+	+
$f(a)$	↗	↗	극대	↘	극소	↗	↗

따라서 $f(a)$ 는 $a=-1$ 일 때 극대, $a=1$ 일 때 극소이고

$$f(-1)=4, f(1)=-4$$

또, 양끝 값 $f(-2)=-4, f(3)=36$ 이므로

$a=3$ 일 때 최대이고,

$a = -2$ 또는 $a = 1$ 일 때 최소이다.

답 $a = 3$ 일 때 최대

$a = -2$ 또는 $a = 1$ 일 때 최소

154

주어진 $y = f'(x)$ 의 그래프에서

$$f'(x) = a(x-2)(x+2) \quad (a > 0)$$

로 놓으면 $f'(0) = 3$ 이므로

$$f'(0) = -4a = 3 \quad \therefore a = -\frac{3}{4}$$

$$\therefore f'(x) = -\frac{3}{4}(x+2)(x-2)$$

$$= -\frac{3}{4}x^2 + 3$$

$$f(x) = \int \left(-\frac{3}{4}x^2 + 3 \right) dx$$

$$= -\frac{1}{4}x^3 + 3x + C \quad (C \text{는 적분상수})$$

$f(0) = 0$ 이므로 $C = 0$

$$\therefore f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 3x$$

이때 방정식 $f(x) = kx$ 에서

$$-\frac{1}{4}x^3 + 3x = kx$$

$$x^3 + 4(k-3)x = 0$$

$$x\{x^2 + 4(k-3)\} = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

그런데 방정식 $\textcircled{1}$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$x^2 + 4(k-3) = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

즉, 판별식 D 에 대하여

$$\frac{D}{4} = -4(k-3) > 0$$

$$\therefore k < 3$$

답 $k < 3$

155

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + (2a-3)$ 이고 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않기 위해서는 $f'(x) = 0$ 이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 $f'(x)$ 의 판별식

$$\frac{D}{4} = a^2 - 3(2a-3) \leq 0$$

$$a^2 - 6a + 9 \leq 0, \quad (a-3)^2 \leq 0$$

$$\therefore a = 3$$

$$\therefore f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$\therefore \int_0^1 \frac{f(x)}{x} dx + \int_1^0 \frac{1}{x} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{f(x)}{x} dx - \int_0^1 \frac{1}{x} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{f(x)-1}{x} dx$$

$$= \int_0^1 (x^2 + 3x + 3) dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 3x \right]_0^1$$

$$= \frac{29}{6}$$

$$\therefore (\text{주어진 식}) = 6 \cdot \frac{29}{6} = 29$$

답 29

156

(가)에서 $f(-x) = f(x)$ 이므로 $f(x)$ 는 우함수

즉, $y = f(x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이다.

(나)에서 $f(x) = f(x+4)$ 이므로 $f(x)$ 는 주기가 4인 주기함수이다.

$\int_0^2 f(x) dx = 16$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는 y 축에 대

하여 대칭이므로 $\int_{-2}^0 f(x) dx = 16$ 이다.

또한, 주기가 4이므로

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_{-4}^{-2} f(x) dx = 16$$

$$\therefore \int_{-4}^0 f(x) dx = \int_{-4}^{-2} f(x) dx + \int_{-2}^0 f(x) dx = 32$$

$$\therefore \int_{-4}^8 f(x) dx$$

$$= \int_{-4}^0 f(x) dx + \int_0^4 f(x) dx + \int_4^8 f(x) dx$$

$$= 3 \int_{-4}^0 f(x) dx = 3 \times 32 = 96$$

답 96

157

(가)에서 $f(x) = x^3 - 4x = x(x+2)(x-2)$

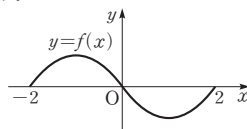
$$f(-2) = 0, \quad f(0) = 0, \quad f(2) = 0$$

이므로 오른쪽 그림과

같이 $-2 \leq x \leq 2$ 일 때

함수 $f(x) = x^3 - 4x$

의 그래프는 원점에 대하여 대칭임을 알 수 있다.



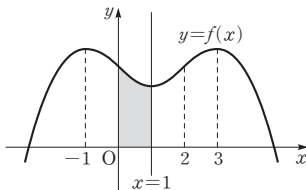
또한, (나)에서 임의의 실수 x 에 대하여
 $f(x)=f(x+4)$ 를 만족하므로 $f(x)$ 는 주기가 4인
 함수이다.

$$\begin{aligned}\therefore \int_1^2 f(x)dx &= \int_5^6 f(x)dx = \int_9^{10} f(x)dx = \dots \\ &= \int_{4k+1}^{4k+2} f(x)dx = \int_{2005}^{2006} f(x)dx\end{aligned}$$

답 ③

158

(가)에서 $f(1+x)=f(1-x)$ 이므로 $y=f(x)$ 의 그
 래프는 직선 $x=1$ 에 대하여 대칭이다.



따라서 위의 그림에서

$$\begin{aligned}\int_2^3 f(x)dx &= \int_{-1}^0 f(x)dx \\ &= \int_0^3 f(x)dx - 2\int_0^1 f(x)dx\end{aligned}$$

$$\int_{-1}^0 f(x)dx = a, \int_0^3 f(x)dx = b \text{이므로}$$

$$a = b - 2\int_0^1 f(x)dx$$

$$\therefore \int_0^1 f(x)dx = \frac{b-a}{2} \quad \text{답 } \frac{b-a}{2}$$

159

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n (2n+3k)^2$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(2 + 3 \cdot \frac{k}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(2 + \frac{3k}{n}\right)^2 \cdot \frac{3}{n} \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3} \int_2^5 x^2 dx$$

답 ②

160

$$\int f(t)dt = F(t) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

라고 하면

$$\begin{aligned}\int_1^x f(t)dt &= \left[F(t) \right]_1^x \\ &= F(x) - F(1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x f(t)dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x) - F(1)}{x-1} = F'(1)\end{aligned}$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } F'(t) = f(t) = t^3 - 4t^2 + 5t - 2$$

$$\therefore F'(1) = 1 - 4 + 5 - 2 = 0$$

답 0

161

주어진 등식의 양변에 $x=a$ 를 대입하면

$$0 = a^3 - 3a^2$$

$$a^2(a-3) = 0$$

$$\therefore a=0 \text{ 또는 } a=3$$

답 $a=0$ 또는 $a=3$

162

양변을 x 에 관하여 미분하면

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} \int_2^x (2t^2 - 5t + 3)dt$$

$$\therefore f'(x) = 2x^2 - 5x + 3$$

따라서 $x=2$ 일 때의 접선의 기울기는

$$f'(2) = 8 - 10 + 3 = 1$$

답 ③

163

$$\frac{k}{n} \rightarrow x, \frac{1}{n} \rightarrow dx \text{로 바꾸면}$$

$$k=1, n \rightarrow \infty \text{이면 } x=0$$

$$k=n \text{이면 } x=1$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f\left(\frac{3k}{n}\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{3k}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \int_0^1 f(3x)dx = \int_0^1 (9x^2 + 3ax + 1)dx$$

$$= \left[3x^3 + \frac{3}{2}ax^2 + x \right]_0^1$$

$$= 3 + \frac{3}{2}a + 1$$

$$\text{따라서 } \frac{3}{2}a + 4 = 10 \text{ 이므로 } a=4$$

답 4

164

③ $\frac{k}{n} \rightarrow x, \frac{1}{n} \rightarrow dx$ 로 바꾸면

$k=1, n \rightarrow \infty$ 이면 $x=0$

$k=n$ 이면 $x=1$

\therefore (주어진 식)

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{k}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 f\left(2 + \frac{1}{2}x\right) dx$$

답 ③

165

$\int_0^2 f(x) dx = a$ (a 는 상수)로 놓으면

$$f(x) = 2x + a$$

$$\therefore a = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 (2x + a) dx$$

$$= \left[x^2 + ax \right]_0^2 = 4 + 2a$$

즉, $a = 4 + 2a$ 이므로 $a = -4$

$$\therefore f(x) = 2x - 4$$

$$\therefore f(1) = -2$$

답 ②

166

$\int_1^2 f(t) dt = a$ (a 는 상수)로 놓으면

$$f(x) = \frac{12}{7}x^2 - 2ax + a^2$$

이므로

$$a = \int_1^2 f(t) dt$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{12}{7}t^2 - 2at + a^2 \right) dt$$

$$= \left[\frac{4}{7}t^3 - at^2 + a^2t \right]_1^2$$

$$= \left(\frac{32}{7} - 4a + 2a^2 \right) - \left(\frac{4}{7} - a + a^2 \right)$$

$$= 4 - 3a + a^2$$

즉, $a = 4 - 3a + a^2$ 이므로

$$(a-2)^2 = 0 \quad \therefore a = 2$$

$$\therefore 10 \int_1^2 f(x) dx = 10a = 20$$

답 20

167

$$\int_0^1 f'(y) dy = a \quad (a \text{는 상수}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

로 놓으면 $f(x) = x^3 - 2x + a$

$$\therefore f'(x) = 3x^2 - 2$$

이것을 ①에 대입하면

$$\int_0^1 (3y^2 - 2) dy = a$$

$$\left[y^3 - 2y \right]_0^1 = a \quad \therefore a = -1$$

따라서 $f(x) = x^3 - 2x - 1$ 이므로

$$f(1) = -2$$

답 -2

168

$\int_0^1 xf'(x) dx = a$ (a 는 상수)로 놓으면

$$f(x) = x^3 - 2x + a$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2$$

$$\therefore a = \int_0^1 x(3x^2 - 2) dx$$

$$= \int_0^1 (3x^3 - 2x) dx = \left[\frac{3}{4}x^4 - x^2 \right]_0^1$$

$$= \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$$

따라서 $f(x) = x^3 - 2x - \frac{1}{4}$ 이므로

$$f(0) = -\frac{1}{4}$$

답 $-\frac{1}{4}$

169

$f(x) = \int_0^x (t^2 + at + b) dt$ 의 양변을 x 에 관하여

미분하면 $f'(x) = x^2 + ax + b$

$x=3$ 일 때 극값 0을 가지므로

$$f'(3) = 9 + 3a + b = 0$$

$$\therefore 3a + b = -9 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f(3) = \int_0^3 (t^2 + at + b) dt$$

$$= \left[\frac{t^3}{3} + \frac{a}{2}t^2 + bt \right]_0^3$$

$$= 9 + \frac{9}{2}a + 3b = 0$$

$$\therefore \frac{9}{2}a + 3b = -9 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉠, ㉡에서

$$a = -4, b = 3$$

$$\begin{aligned}\therefore f'(x) &= x^2 - 4x + 3 \\ &= (x-1)(x-3)\end{aligned}$$

따라서 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극대이므로 극댓값은

$$\begin{aligned}f(1) &= \int_0^1 (t^2 + at + b) dt \\ &= \int_0^1 (t^2 - 4t + 3) dt \\ &= \left[\frac{1}{3} t^3 - 2t^2 + 3t \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} - 2 + 3 \\ &= \frac{4}{3}\end{aligned}$$

답 $x=1$ 일 때, 극댓값 $\frac{4}{3}$

170

(1) $\frac{d}{dx} \int_1^x t^2 dt = x^2$ 이고 $\log_x x^2 = 1$ 이다.

또, $\cos \pi = -1$ 이므로 주어진 방정식은

$$-1 = x^2 - 2x - 1$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

그런데 로그의 밑 x^2 에서 $x \neq 0$, $x \neq \pm 1$ 이므로

$$x = 2$$

(2) $\frac{d}{dx} \int_x^{x+1} \frac{1}{2} t(t-1) dt$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dx} \int_x^{x+1} (t^2 - t) dt$$

$$= \frac{1}{2} \{ (x+1)^2 - (x+1) - (x^2 - x) \} = x$$

$\log_x x = \frac{1}{2}$ 이므로 주어진 방정식은

$$\frac{1}{2} = x^2 - 3x + \frac{5}{2}$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 2$$

그런데 로그의 밑 x^2 에서 $x \neq 0$, $x \neq \pm 1$ 이므로

$$x = 2$$

답 (1) $x=2$ (2) $x=2$

171

오른쪽 그림과 같이 각 분

점 사이의 길이는 $\frac{2}{n}$,

각 분점의 x 좌표는

$$0, \frac{2}{n}, \frac{2 \cdot 2}{n}, \dots, \frac{2 \cdot n}{n}$$

각 직사각형의 높이는

$$\left(\frac{2}{n}\right)^2, \left(\frac{2 \cdot 2}{n}\right)^2, \dots, \left(\frac{2 \cdot n}{n}\right)^2$$

이므로 직사각형의 넓이의 합 S_n 은

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{2}{n} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{2}{n} \cdot \left(\frac{2 \cdot 2}{n}\right)^2 + \dots \\ &\quad + \frac{2}{n} \cdot \left(\frac{2 \cdot n}{n}\right)^2\end{aligned}$$

따라서 구하는 넓이 S 는

$$\begin{aligned}S &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{2}{n} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{2}{n} \cdot \left(\frac{2 \cdot 2}{n}\right)^2 + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{n} \cdot \left(\frac{2 \cdot n}{n}\right)^2 \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2}{n} \left(\frac{2k}{n}\right)^2\end{aligned}$$

답 ①

172

(1) $xf(x) = \frac{2}{3} x^3 + \int_0^x f(t) dt$ 의 양변을 x 에 관하

여 미분하면

$$f(x) + xf'(x) = 2x^2 + f(x)$$

$$xf'(x) = 2x^2$$

$$\therefore f'(x) = 2x$$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int 2x dx$$

$$= x^2 + C$$

$$f(0) = 0 \text{에서 } C = 0$$

$$\therefore f(x) = x^2 \quad \therefore f(2) = 4$$

(2) $f(x) = x \int_1^x (t+2)^2 dt$ 의 양변을 x 에 관하여

미분하면

$$f'(x) = \int_1^x (t+2)^2 dt + x(x+2)^2$$

$$\therefore f'(1) = \int_1^1 (t+2)^2 dt + (1+2)^2 = 9$$

$$(3) \int_1^x (x-t)f(t)dt = x^4 + ax^2 + bx \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

에서

$$x \int_1^x f(t)dt - \int_1^x tf(t)dt = x^4 + ax^2 + bx$$

양변을 x 에 관하여 미분하면

$$\begin{aligned} \int_1^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) \\ = 4x^3 + 2ax + b \end{aligned}$$

$$\therefore \int_1^x f(t)dt = 4x^3 + 2ax + b \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 에 $x=1$ 을 대입하면

$$0 = 1 + a + b$$

$$0 = 4 + 2a + b$$

$$\therefore a = -3, b = 2$$

$$\therefore ab = -6$$

$$(4) \int_1^x (x-t)f(t)dt = x^4 - 2x^2 + 1 \text{에서}$$

$$x \int_1^x f(t)dt - \int_1^x tf(t)dt = x^4 - 2x^2 + 1$$

양변을 x 에 관하여 미분하면

$$\int_1^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = 4x^3 - 4x$$

$$\therefore \int_1^x f(t)dt = 4x^3 - 4x$$

다시 양변을 x 에 관하여 미분하면

$$f(x) = 12x^2 - 4$$

$$\therefore f(2) = 12 \cdot 4 - 4 = 44$$

$$\text{답 (1) 4 (2) 9 (3) -6 (4) 44}$$

173

$$A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{2h} \cdot 2$$

$$= f'(1) \cdot 2$$

$$B = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \quad (\because f(1)=0)$$

$$= f'(1)$$

$$f(x) = \int_1^x (3t^2 - 2t + 1)dt \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 \quad \therefore f'(1) = 2$$

$$\therefore A = 4, B = 2 \quad \therefore A + B = 6 \quad \text{답 6}$$

174

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt \text{이므로 } F'(x) = f(x)$$

주어진 그림에서

$$0 < x < 1 \text{일 때, } F'(x) > 0$$

$$1 < x < 3 \text{일 때, } F'(x) < 0$$

$$3 < x < 5 \text{일 때, } F'(x) > 0$$

따라서 $F(x)$ 는 $x=3$ 일 때 극소이므로 극솟값은

$$\begin{aligned} F(3) &= \int_0^3 f(t)dt \\ &= \int_0^2 (1-t)dt + \int_2^3 (t-3)dt \\ &= \left[t - \frac{1}{2}t^2 \right]_0^2 + \left[\frac{1}{2}t^2 - 3t \right]_2^3 \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned} \quad \text{답 } -\frac{1}{2}$$

175

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 1) \\ x & (-1 < x < 1) \\ -1 & (x \leq -1) \end{cases}$$

(i) $x \leq -1$ 인 경우

$$y = \int_{-2}^x (-1)dt = \left[-t \right]_{-2}^x = -x - 2$$

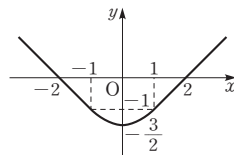
(ii) $-1 < x < 1$ 인 경우

$$\begin{aligned} y &= \int_{-2}^x f(t)dt = \int_{-2}^{-1} (-1)dt + \int_{-1}^x tdt \\ &= \left[-t \right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{1}{2}t^2 \right]_{-1}^x = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

(iii) $x \geq 1$ 인 경우

$$\begin{aligned} y &= \int_{-2}^x f(t)dt \\ &= \int_{-2}^{-1} (-1)dt + \int_{-1}^1 tdt + \int_1^x tdt \\ &= \left[-t \right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{1}{2}t^2 \right]_{-1}^1 + \left[\frac{1}{2}t^2 \right]_1^x \\ &= -1 + 0 + x - 1 = x - 2 \end{aligned}$$

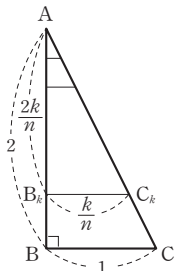
따라서 그래프는 다음 그림과 같다.



답 ③

176

$$\begin{aligned} \overline{B_k C_k}^2 &= \left(\frac{k}{n}\right)^2 \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \overline{B_k C_k}^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \\ &= 2\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \\ &= 2\pi \int_0^1 x^2 dx \\ &= \frac{2}{3} \pi \end{aligned}$$



답 ④

177

$$\begin{aligned} \int_0^a \left\{ 2 + \frac{df(t)}{dt} \right\} dt &= \int_0^a \{ 2 + f'(t) \} dt = k \text{로 놓으면} \\ f(x) - x^2 + 2ax &= 3k \\ \therefore f(x) &= x^2 - 2ax + 3k \\ f'(x) &= 2x - 2a \text{에서 } f'(t) = 2t - 2a \\ f(0) &= 0 \text{이므로} \\ f(0) &= 3k = 0 \quad \therefore k = 0 \\ \therefore k &= \int_0^a (2 + 2t - 2a) dt \\ &= \left[t^2 - 2at + 2t \right]_0^a \\ &= -a^2 + 2a = 0 \\ \therefore a &= 0 \text{ 또는 } a = 2 \\ \text{그런데 } a &\text{는 양수이므로 } a = 2 \end{aligned}$$

답 2

178

분모, 분자를 각각 n^7 으로 나누면
(주어진 식)

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left\{ \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^2 \right\} \frac{1}{n} \times \left\{ \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \left(\frac{2}{n}\right)^3 + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^3 \right\} \frac{1}{n}}{\left\{ \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{n}{n} \right\} \frac{1}{n} \times \left\{ \left(\frac{1}{n}\right)^4 + \left(\frac{2}{n}\right)^4 + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^4 \right\} \frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 \frac{1}{n} \times \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^3 \frac{1}{n}}{\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n} \times \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^4 \frac{1}{n}} \\ &= \frac{\int_0^1 x^2 dx \times \int_0^1 x^3 dx}{\int_0^1 x dx \times \int_0^1 x^4 dx} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 \times \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_0^1}{\left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 \times \left[\frac{1}{5} x^5 \right]_0^1} \\ &= \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{5}} \\ &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

답 ③

179

$$\begin{aligned} &\int_0^{0.5} \left(\sum_{k=1}^n k x^{k-1} \right) dx \\ &= \sum_{k=1}^n \int_0^{0.5} k x^{k-1} dx \\ &= \sum_{k=1}^n \left[x^k \right]_0^{0.5} = \sum_{k=1}^n (0.5)^k \\ &= 0.5 + (0.5)^2 + \dots + (0.5)^n \\ &= \frac{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right)}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \\ \therefore 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n &\geq 0.99, \quad 1 - 0.99 \geq \frac{1}{2^n} \\ \frac{1}{100} &\geq \frac{1}{2^n}, \quad 2^n \geq 100 \\ \text{따라서 최소의 자연수 } n &= 7 \text{이다.} \end{aligned}$$

답 7

180

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \int_{\frac{1}{3}}^x (1 + 2t + 3t^2 + \dots + nt^{n-1}) dt \\ &= \left[t + t^2 + t^3 + \dots + t^n \right]_{\frac{1}{3}}^x \\ &= \left[\frac{t(1-t^n)}{1-t} \right]_{\frac{1}{3}}^x \\ &= \frac{x(1-x^n)}{1-x} - \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{2} \\ \therefore S_n\left(\frac{1}{2}\right) &= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{2} \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{2}$

181

$$f(x)=f(2-x)=f(x-2) \quad (\because f(x)=f(-x))$$

이므로 $f(x)$ 는 주기함수이다.

또한, $f(x)=f(-x)$ 에서 $f(x)$ 는 우함수이므로

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 f(x) dx &= \int_0^1 f(x) dx \\ \therefore \int_0^1 f(x) dx &= \dots = \int_5^6 f(x) dx = 2 \\ \therefore \int_0^6 \{x^2 + f(x)\} dx &= \int_0^6 x^2 dx + 6 \int_0^1 f(x) dx \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^6 + 6 \times 2 \\ &= 72 + 12 = 84 \end{aligned}$$

답 84

182

주어진 곡선과 직선의 교점의 x 좌표는

$$x(x-3)^2 = x \text{에서}$$

$$x(x^2 - 6x + 9) = x$$

$$x(x^2 - 6x + 8) = 0$$

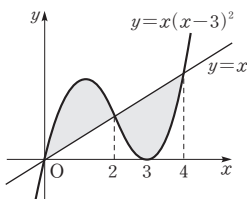
$$x(x-2)(x-4) = 0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=2 \text{ 또는 } x=4$$

따라서 구하는 넓이 S 는

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 \{x(x-3)^2 - x\} dx + \int_2^4 \{x - x(x-3)^2\} dx \\ &= \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx + \int_2^4 (-x^3 + 6x^2 - 8x) dx \\ &= \left[\frac{1}{4} x^4 - 2x^3 + 4x^2 \right]_0^2 - \left[\frac{1}{4} x^4 - 2x^3 + 4x^2 \right]_2^4 \\ &= 4 + 4 = 8 \end{aligned}$$

답 8



183

주어진 곡선과 직선의 교점의 y 좌표는

$$3y - y^2 = 3 - y \text{에서}$$

$$y^2 - 4y + 3 = 0$$

$$(y-1)(y-3) = 0$$

$$\therefore y=1 \text{ 또는 } y=3$$

따라서 구하는 넓이 S 는

$$\begin{aligned} S &= \int_1^3 \{(3y - y^2) - (3 - y)\} dy \\ &= \int_1^3 (-y^2 + 4y - 3) dy \\ &= \left[-\frac{1}{3} y^3 + 2y^2 - 3y \right]_1^3 \\ &= -\frac{1}{3} (3^3 - 1) + 2(3^2 - 1) - 3(3 - 1) \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

답 ②

184

$x(a-x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=a$ ($a>0$)

$$\begin{aligned} \therefore S &= \int_0^a x(a-x) dx \\ &= \left[\frac{a}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^a \\ &= \frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} = \frac{a^3}{6} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{a^3}{6} = \frac{2}{3} \text{이므로 } a^3 = 4$$

$$\therefore a = \sqrt[3]{4}$$

답 $\sqrt[3]{4}$

다른풀이 공식을 이용하면

$$S = \frac{|-1|(a-0)^3}{6} = \frac{a^3}{6} = \frac{2}{3}$$

$$a^3 = 4 \quad \therefore a = \sqrt[3]{4}$$

185

$y = x^3 + 3x^2 - x - 3$ 에서

$$y' = 3x^2 + 6x - 1$$

이므로 곡선 위의 점

$(-3, 0)$ 에서의 접선의

기울기는

$$3 \cdot (-3)^2 + 6 \cdot (-3) - 1 = 8$$

따라서 곡선 위의 점 $(-3, 0)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y = 8(x+3)$$

$$\therefore y = 8x + 24$$

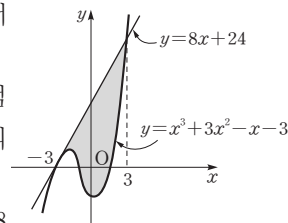
곡선과 접선의 또 다른 교점의 x 좌표는

$$x^3 + 3x^2 - x - 3 = 8x + 24 \text{에서}$$

$$x^3 + 3x^2 - 9x - 27 = 0$$

$$(x+3)^2(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 3$$



그러므로 위의 그림의 어두운 부분의 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-3}^3 \{(8x+24) - (x^3+3x^2-x-3)\} dx \\ &= \int_{-3}^3 (-x^3-3x^2+9x+27) dx \\ &= 2 \int_0^3 (-3x^2+27) dx \\ &= 2 \left[-x^3+27x \right]_0^3 = 108 \end{aligned}$$

답 108

다른풀이 $S = \frac{|a|}{12} (\beta - \alpha)^4$ 에서

$$S = \frac{|1|}{12} \{3 - (-3)\}^4 = 108$$

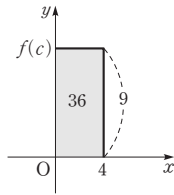
186

$$\begin{aligned} S &= \int_0^4 (3x^2 - 6x + 5) dx \\ &= \left[x^3 - 3x^2 + 5x \right]_0^4 \\ &= 36 \end{aligned}$$

$$\therefore f(c) = 3c^2 - 6c + 5 = 9$$

$$3c^2 - 6c - 4 = 0$$

$$\therefore c = 1 + \frac{\sqrt{21}}{3} \quad (\because c > 0)$$



$$\text{답 } 1 + \frac{\sqrt{21}}{3}$$

187

$y = \sqrt{x-1}$ 에서

$$y^2 = x - 1$$

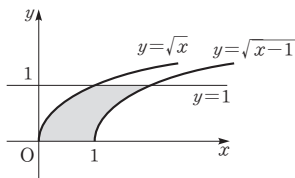
$y = \sqrt{x}$ 에서 $y^2 = x$

두 곡선 $y = \sqrt{x}$,

$y = \sqrt{x-1}$ 과 x 축

및 직선 $y=1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는 위의 그림의 어두운 부분의 넓이와 같으므로

$$\int_0^1 \{(y^2+1) - y^2\} dy = \left[y \right]_0^1 = 1 \quad \text{답 1}$$



188

$$S_1 = \int_a^0 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_a^0 = -\frac{a^3}{3}$$

$$S_2 = \int_0^b x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^b = \frac{b^3}{3}$$

$$\therefore S_1 : S_2 = -\frac{a^3}{3} : \frac{b^3}{3} = -a^3 : b^3$$

$$\text{답 } -a^3 : b^3$$

189

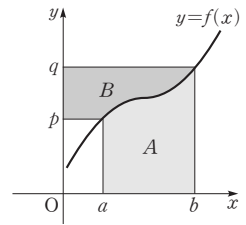
오른쪽 그림에서

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

$$B = \int_p^q f^{-1}(x) dx$$

$$\therefore A + B = bq - ap$$

답 ⑤



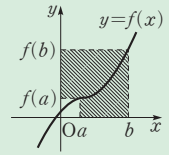
KEY point

함수 $y=f(x)$ 의 역함수를

$y=g(x)$ 라고 하면 $0 < a < b$ 에

대하여

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(x) dx + \int_{f(a)}^{f(b)} g(x) dx \\ &= b \cdot f(b) - a \cdot f(a) \end{aligned}$$



190

$y=x^2$ 을 조건에 따라 이동시키면

$$-(y-5) = (x+1)^2$$

$$\therefore y = -(x+1)^2 + 5$$

$$g(x) = -(x+1)^2 + 5$$

$y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^2 = -(x+1)^2 + 5$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 1$$

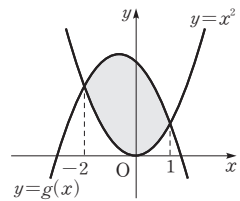
공식에 의하여

$$a = |1 - (-2)| = 3$$

$$\alpha = -2, \beta = 1$$

$$\therefore S = \frac{2}{6} \{1 - (-2)\}^3 = 9$$

답 9



191

$$A = \int_1^3 f(x) dx \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(1 + \frac{2k}{n}\right) \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(1 + \frac{2k}{n}\right) \frac{2}{n}$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^3 f(x) dx = \frac{A}{2}$$

$$\text{답 } \frac{A}{2}$$

192

$y=f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라고 하면

$$F'(x)=f(x)$$

$$S(x)=\int_a^x f(x)dx=F(x)-F(a)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)-F(a)}{x-a}=F'(a)=f(a)=b$$

답 ②

193

$y=x^2-2x$ 의 그래프의

대칭축은 $x=1$ 이고

$S_1=2S_2$ 가 성립하므로

곡선 $y=x^2-2x$ 와 직선 $x=1$ 및 x 축으로 둘러

싸인 도형의 넓이는 S_2 와 같다.

$$\text{즉, } -\int_1^2 (x^2-2x)dx = \int_2^a (x^2-2x)dx$$

$$\therefore \int_1^2 (x^2-2x)dx + \int_2^a (x^2-2x)dx = 0$$

$$\int_1^a (x^2-2x)dx = 0$$

$$\left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_1^a = 0$$

$$\frac{1}{3}a^3 - a^2 - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) = 0$$

$$a^3 - 3a^2 + 2 = 0$$

$$(a-1)(a^2-2a-2) = 0$$

$$\therefore a=1 \text{ 또는 } a=1 \pm \sqrt{3}$$

그런데 $a > 2$ 이므로 $a=1+\sqrt{3}$

답 $1+\sqrt{3}$

194

$f(x)=-x^3+3x+1$ 에서

$$f'(x)=-3x^2+3$$

$f'(x)=0$ 에서

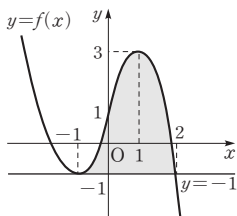
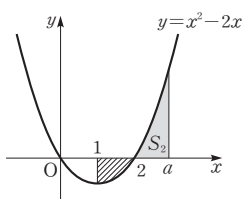
$$x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

따라서 극솟값은

$$m=f(-1)=-1$$

또, 곡선과 직선의 교점의 x 좌표는

$$-x^3+3x+1=-1, (x+1)^2(x-2)=0$$



$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=2$$

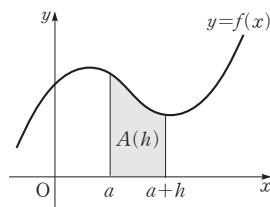
$$\therefore S = \int_{-1}^2 \{(-x^3+3x+1) - (-1)\} dx$$

$$= \int_{-1}^2 (-x^3+3x+2) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 2x \right]_{-1}^2 = \frac{27}{4}$$

$$\text{답 } m=-1, S=\frac{27}{4}$$

195



$$A(h) = \int_a^{a+h} f(x)dx \text{ 이므로}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_a^{a+h} f(x)dx$$

$F'(x)=f(x)$ 라고 하면

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(a+h)-F(a)}{h}$$

$$= F'(a) = f(a)$$

답 ④

196

$y=x^3$ 에서 $y'=3x^2$ 이므로

곡선 위의 점 $(1, 1)$ 에서

의 접선의 방정식은

$$y-1=3(x-1)$$

$$\therefore y=3x-2$$

또, 접선 $y=3x-2$ 와 y

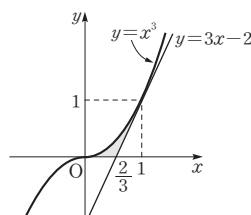
축의 교점의 x 좌표는

$$3x-2=0 \text{에서 } x=\frac{2}{3}$$

$$\therefore S = \int_0^1 x^3 dx - \int_{\frac{2}{3}}^1 (3x-2) dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 \right]_0^1 - \left[\frac{3}{2}x^2 - 2x \right]_{\frac{2}{3}}^1 = \frac{1}{12}$$

$$\text{답 } \frac{1}{12}$$

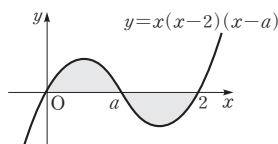


197

$y=x(x-2)(x-a)=0$ 에서

$x=0$ 또는 $x=a$ 또는 $x=2$

따라서 그래프는 다음 그림과 같다.



$$\begin{aligned} S &= \int_0^a x(x-2)(x-a)dx \\ &\quad - \int_a^2 x(x-2)(x-a)dx \\ &= \int_0^a \{x^3 - (2+a)x^2 + 2ax\}dx \\ &\quad - \int_a^2 \{x^3 - (2+a)x^2 + 2ax\}dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2+a}{3}x^3 + ax^2 \right]_0^a \\ &\quad - \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2+a}{3}x^3 + ax^2 \right]_a^2 \\ &= -\frac{a^4}{6} + \frac{2a^3}{3} - \frac{4a}{3} + \frac{4}{3} \\ \frac{dS}{da} &= -\frac{2}{3}(a^3 - 3a^2 + 2) \\ &= -\frac{2}{3}(a-1)(a-1-\sqrt{3})(a-1+\sqrt{3}) \end{aligned}$$

따라서 $0 < a < 2$ 에서 $\frac{dS}{da}=0$ 이 되는 것은 $a=1$ 일 때이며, $a=1$ 에서 S 는 감소상태에서 증가상태로 변하므로 이때 최솟값을 갖는다.

$$\therefore a=1 \text{ 일 때, 최소 넓이 } S = \frac{1}{2}$$

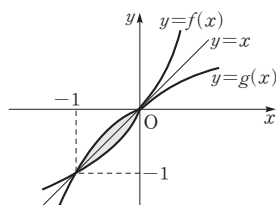
$$\text{답 } a=1 \text{ 일 때, (최소 넓이)} = \frac{1}{2}$$

198

(1) $f(x)=x^3+x^2+x$, $g(x)=f^{-1}(x)$ 이므로

$y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

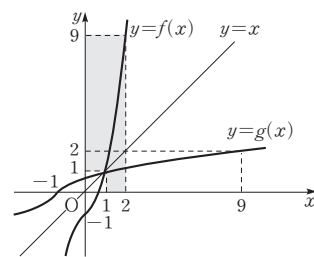
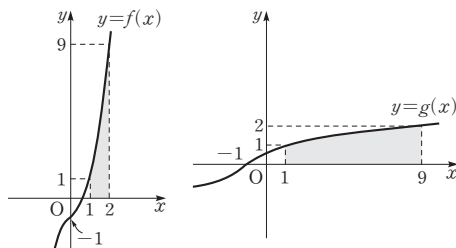
따라서 $y=f(x)$ 와 $y=x$ 의 교점의 x 좌표는 $x^3+x^2+x=x$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=0$



따라서 구하는 넓이 S 는 $y=f(x)$ 와 $y=x$ 로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배이므로

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_{-1}^0 \{(x^3+x^2+x)-x\}dx \\ &= 2 \int_{-1}^0 (x^3+x^2)dx \\ &= 2 \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^0 \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

(2) $f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로 $y=g(x)$ 의 그래프는 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.



따라서 구하는 정적분의 값은 위의 그림의 어두운 두 부분의 넓이의 합과 같다.

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-1}^2 f(x)dx + \int_1^9 g(x)dx \\ &= (2 \times 9) - (1 \times 1) \\ &= 17 \end{aligned}$$

$$\text{답 (1)} \frac{1}{6} \quad (2) 17$$

199

주어진 그림에서 파란 색이 칠해지는 부분 하나의 넓이를 A , 노란 색이 칠해지는 부분의 넓이를 B 라고 하면

$$2A : B = 2 : 3 \quad \therefore B = 3A$$

$$2A + B = 15^2 \text{이므로 } 5A = 225 \quad \therefore A = 45$$

따라서 $\int_0^{15} f(x) dx = A$ 이므로

$$\int_0^{15} f(x) dx = 45 \quad \text{답 } 45$$

200

두 점 P, Q의 위치를 각각 x_1, x_2 라고 할 때

$$\begin{aligned} x_1 &= \int_0^t (3t^2 - 8t + 4) dt \\ &= \left[t^3 - 4t^2 + 4t \right]_0^t = t^3 - 4t^2 + 4t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \int_0^t (12 - 8t) dt \\ &= \left[12t - 4t^2 \right]_0^t = 12t - 4t^2 \end{aligned}$$

$$\therefore t^3 - 4t^2 + 4t = 12t - 4t^2, t^3 - 8t = 0$$

$t(t^2 - 8) = 0$ 이고, $t > 0$ 이므로

$$t = 2\sqrt{2} \text{ (초 후)} \quad \text{답 } 2\sqrt{2}$$

201

2초 후에 5m의 상공에 도달하려면 $\int_0^2 v_t dt = 5$

$$\begin{aligned} \int_0^2 v_t dt &= \int_0^2 (v_0 - 9.8t) dt \\ &= \left[v_0 t - 4.9t^2 \right]_0^2 = 2v_0 - 19.6 \end{aligned}$$

이므로 $2v_0 - 19.6 = 5$

$$\therefore v_0 = 12.3 \text{ (m/초)} \quad \text{답 } 12.3 \text{ m/초}$$

202

주어진 그림에서

$$f'(t) = (t-1)(t-3) = t^2 - 4t + 3$$

따라서 반대 방향으로 실제 움직인 거리 d 는

$$\begin{aligned} d &= \int_1^3 |f'(t)| dt \\ &= \int_1^3 \{-(t-1)(t-3)\} dt = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore 12d = 12 \times \frac{4}{3} = 16 \quad \text{답 } 16$$

203

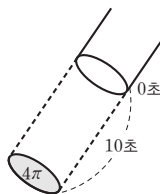
유출되는 물의 양은 원기둥의 부피가 된다.

(물이 흐른 거리)

$$\begin{aligned} &= \int_0^{10} (t+2) dt \\ &= \left[\frac{1}{2} t^2 + 2t \right]_0^{10} \\ &= 70 \text{ (cm)} \end{aligned}$$

파이프의 단면의 넓이는 $4\pi \text{ cm}^2$ 이므로

$$\begin{aligned} V &= 4\pi \times 70 \\ &= 280\pi \text{ (cm}^3\text{)} \quad \text{답 } 280\pi \text{ cm}^3 \end{aligned}$$



204

출발 후 a 분까지 2 km를 달렸다면

$$\begin{aligned} \int_0^a (3t^2 + 2t) dt &= \left[t^3 + t^2 \right]_0^a \\ &= a^3 + a^2 = 2 \end{aligned}$$

$$\therefore a = 1$$

즉, 1분 후 2 km까지 달린다.

1분 후 속력은 $v(1) = 5 \text{ (km/분)}$ 이고, 이후는 등속도 운동이므로 달린 거리 l 은

$$l = 2 + 5 \times (10 - 1) = 47 \text{ (km)} \quad \text{답 } 47 \text{ km}$$

205

운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로

$$t^2 - 3t + 2 = (t-1)(t-2) = 0$$

$$\therefore t = 1 \text{ 또는 } t = 2$$

따라서 운동 방향을 두 번째로 바꾸는 것은 2초 후이며 이때까지 움직인 거리는

$$\begin{aligned} &\int_0^2 |t^2 - 3t + 2| dt \\ &= \int_0^1 (t^2 - 3t + 2) dt + \int_1^2 (-t^2 + 3t - 2) dt \\ &= \left[\frac{1}{3} t^3 - \frac{3}{2} t^2 + 2t \right]_0^1 + \left[-\frac{1}{3} t^3 + \frac{3}{2} t^2 - 2t \right]_1^2 \\ &= \frac{5}{6} + \frac{1}{6} = 1 \end{aligned}$$

답 1

206

$t=2, t=4$ 를 전후하여 점 P의 운동 방향이 바뀌고
 $\int_0^4 v dt = \int_0^2 v dt + \int_2^4 v dt = 0$ 이므로 $t=4$ 일 때 점 P
 는 출발점인 원점으로 다시 돌아온다. 답 4

207

$72(\text{km/시}) = 20(\text{m/초})$ 이고 속도 v 가 일정한 비
 율로 감소하므로 v 는

$$v = 20 - kt (\text{m/초}) \quad (\text{단, } k \text{는 상수})$$

정지할 때까지 걸린 시간은 $v=0$ 에서 $t = \frac{20}{k}$ 이므로

$$\int_0^{\frac{20}{k}} (20 - kt) dt = 50$$

$$\left[20t - \frac{1}{2} kt^2 \right]_0^{\frac{20}{k}} = 50$$

$$\frac{400}{k} - \frac{1}{2} k \left(\frac{20}{k} \right)^2 = 50$$

$$\therefore k = 4$$

따라서 걸린 시간은

$$t = \frac{20}{k} = \frac{20}{4} = 5 (\text{초}) \quad \text{답 5초}$$

208

원점을 출발하여 다시 원점으로 돌아오면 위치 변화
 는 0이다.

따라서 x 초 후에 다시 원점으로 돌아온다고 하면

$$\begin{aligned} \int_0^x (6-3t) dt &= \left[6t - \frac{3}{2} t^2 \right]_0^x \\ &= 6x - \frac{3}{2} x^2 = 0 \end{aligned}$$

$$3x(4-x) = 0$$

$$\therefore x = 4$$

이때까지의 경과 거리는

$$\begin{aligned} &\int_0^4 |6-3t| dt \\ &= \int_0^2 (6-3t) dt - \int_2^4 (6-3t) dt \\ &= \left[6t - \frac{3}{2} t^2 \right]_0^2 - \left[6t - \frac{3}{2} t^2 \right]_2^4 \\ &= 12 (\text{m}) \quad \text{답 4초 후, 12 m} \end{aligned}$$

209

P, Q의 시각 t 에 대한 속도 v 의 방정식은 각각 $\frac{2}{3}t$,
 $2t-4$ 이다.

시각 t_1 에서 물체 Q가 물체 P를 추월했다는 것은 시
 각 t_1 까지 Q와 P가 움직인 거리가 같다는 뜻이므로

$$\int_0^{t_1} \frac{2}{3} t dt = \int_2^{t_1} (2t-4) dt \text{에서}$$

$$\left[\frac{1}{3} t^2 \right]_0^{t_1} = \left[t^2 - 4t \right]_2^{t_1}$$

$$\frac{1}{3} t_1^2 = t_1^2 - 4t_1 + 4$$

$$t_1^2 - 6t_1 + 6 = 0$$

$$\therefore t_1 = 3 + \sqrt{3} \quad (\because t_1 > 2)$$

$$\int_2^5 (2t-4) dt + \int_5^{t_2} 6 dt = \int_0^9 \frac{2}{3} t dt \text{에서}$$

$$\left[t^2 - 4t \right]_2^5 + \left[6t \right]_5^{t_2} = \left[\frac{1}{3} t^2 \right]_0^9$$

$$9 + 6(t_2 - 5) = 27$$

$$\therefore t_2 = 8$$

$$\therefore t_1 + t_2 = 11 + \sqrt{3}$$

답 ④

IV. 확률

210

$$\begin{aligned} & {}_{20}C_0 + {}_{20}C_1 + 2^2 {}_{20}C_2 + \cdots + 2^{20} {}_{20}C_{20} \\ &= 2^0 {}_{20}C_0 + 2 {}_{20}C_1 + 2^2 {}_{20}C_2 + \cdots + 2^{20} {}_{20}C_{20} \\ &= (1+2)^{20} = 3^{20} \end{aligned}$$

$$\therefore (\text{주어진 식}) = \log_3 3^{20} = 20 \quad \text{답 20}$$

211

$$(1) \sum_{k=0}^n {}_nC_k = {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n = 2^n \text{ 이므로}$$

$$2^n = 128 = 2^7 \quad \therefore n = 7$$

$$(2) \sum_{k=1}^8 k \cdot {}_8C_k = {}_8C_1 + 2 \cdot {}_8C_2 + 3 \cdot {}_8C_3 + 4 \cdot {}_8C_4 + \cdots + 8 \cdot {}_8C_8$$

$$= 8 \cdot 2^{8-1} = 2^{10}$$

$$\therefore (\text{주어진 식}) = \log_2 2^{10} = 10$$

$$(3) {}_iC_0 + {}_iC_1 + {}_iC_2 + \cdots + {}_iC_i = 2^i \text{ 이므로}$$

$$\sum_{i=0}^{10} \left(\sum_{j=0}^i {}_iC_j \right) = \sum_{i=0}^{10} 2^i = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{10}$$

$$= \frac{1 \cdot (2^{11} - 1)}{2 - 1} = 2^{11} - 1 = 2047$$

답 (1) 7 (2) 10 (3) 2047

212

$\left(x^3 - \frac{1}{x}\right)^{20}$ 의 일반항은

$${}_{20}C_r (x^3)^{20-r} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^r = (-1)^r \cdot {}_{20}C_r x^{60-4r}$$

$$60 - 4r = 0 \text{에서 } r = 15$$

따라서 상수항은

$$(-1)^{15} \cdot {}_{20}C_{15} x^0 = -{}_{20}C_5 \quad \text{답 ①}$$

213

전개식의 일반항은

$${}_4C_r (ax^3)^{4-r} \left(\frac{2}{x^2}\right)^r = {}_4C_r \cdot a^{4-r} \cdot 2^r \cdot x^{12-5r}$$

$$x^2 \text{항이므로 } 12 - 5r = 2 \quad \therefore r = 2$$

$$\text{따라서 } x^2 \text{의 계수는 } {}_4C_2 \cdot a^2 \cdot 2^2 = 24a^2$$

문제의 조건으로부터

$$24a^2 = 6, \quad a^2 = \frac{1}{4}$$

$$\therefore a = \frac{1}{2} \quad (\because a > 0) \quad \text{답 } \frac{1}{2}$$

214

$$(1) (1+x) + (1+x)^2 + (1+x)^3 + \cdots + (1+x)^7$$

$$\cdots \text{ ㉠}$$

㉠은 첫째항이 $1+x$, 공비가 $1+x$, 항 수가 7인 등비수열의 합이므로

$$\frac{(1+x)\{(1+x)^7 - 1\}}{(1+x) - 1} = \frac{(1+x)^8 - (1+x)}{x}$$

$$\cdots \text{ ㉡}$$

㉠의 전개식에서 x^3 의 계수는 ㉡의 $(1+x)^8$ 의 전개식에서 x^4 의 계수와 같다.

$(1+x)^8$ 의 전개식의 일반항이 ${}_8C_r x^r$ 이므로 $r=4$

$$\therefore {}_8C_4 = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 70$$

(2) 주어진 식은 첫째항이 $1+x^3$, 공비가 $1+x^3$, 항 수가 15인 등비수열의 합이므로

$$\frac{(1+x^3)\{(1+x^3)^{15} - 1\}}{(1+x^3) - 1} = \frac{(1+x^3)^{16} - (1+x^3)}{x^3}$$

$$\cdots \text{ ㉢}$$

㉢에서 x^6 의 계수는 $(1+x^3)^{16}$ 의 전개식에서 x^9 의 계수와 같다. 따라서 $(1+x^3)^{16}$ 의 전개식의 일반항이 ${}_{16}C_r (x^3)^r$ 이므로 $3r=9 \quad \therefore r=3$

$$\therefore {}_{16}C_3 = \frac{16 \times 15 \times 14}{3 \times 2 \times 1} = 560$$

$$\text{답 (1) 70 (2) 560}$$

다른풀이 (1) $(1+x)^n$ 의 일반항은 ${}_nC_r x^r$ 이고

$3 \leq n \leq 7$ 인 경우에만 x^3 항이 나오므로

$(1+x)^3$ 의 전개식에서 x^3 의 계수는 ${}_3C_3$

$(1+x)^4$ 의 전개식에서 x^3 의 계수는 ${}_4C_3$

\vdots

$(1+x)^7$ 의 전개식에서 x^3 의 계수는 ${}_7C_3$

따라서 x^3 의 계수는

$${}_3C_3 + {}_4C_3 + {}_5C_3 + {}_6C_3 + {}_7C_3$$

$$= 1 + 4 + 10 + 20 + 35 = 70$$

(2) $(1+x^3)^n$ 의 일반항은 ${}_nC_r (x^3)^r$ 이므로

$$3r = 6 \quad \therefore r = 2$$

$(1+x^3)^2$ 의 전개식에서 x^6 의 계수는 ${}_2C_2$

$(1+x^3)^3$ 의 전개식에서 x^6 의 계수는 ${}_3C_2$

:

$(1+x^3)^{15}$ 의 전개식에서 x^6 의 계수는 ${}_{15}C_2$

따라서 x^6 의 계수는

$$\begin{aligned} & {}_2C_2 + {}_3C_2 + {}_4C_2 + \cdots + {}_{15}C_2 \\ &= \sum_{k=2}^{15} {}_kC_2 = \sum_{k=2}^{15} \frac{k(k-1)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{15} (k^2 - k) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{15} (k^2 - k) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{15 \times 16 \times 31}{6} - \frac{15 \times 16}{2} \right) = 560 \end{aligned}$$

215

$\left(2x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^n$ 의 일반항은

$$\begin{aligned} {}_nC_r (2x^3)^{n-r} \left(\frac{1}{x^2}\right)^r &= {}_nC_r 2^{n-r} x^{3(n-r)} \cdot x^{-2r} \\ &= {}_nC_r 2^{n-r} \cdot x^{3n-5r} \end{aligned}$$

상수항은 x^0 항이므로

$$3n - 5r = 0 \quad \therefore 3n = 5r$$

따라서 이 식을 만족시키는 최소의 자연수 n 의 값은 $r=3$ 일 때, $n=5$ 답 5

216

(1) ${}_{3+10-1}C_{10} = {}_{12}C_{10} = {}_{12}C_2 = 66$

(2) 먼저 볼펜 1자루씩을 A, B, C 세 사람에게 나누어 준 후 나머지 7자루를 세 사람에게 나누어 주면 되므로 구하는 방법의 수는

$${}_{3+7-1}C_7 = {}_9C_7 = {}_9C_2 = 36$$

답 (1) 66 (2) 36

217

(i) $a+b+c+d=6$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수해의 개수는 a, b, c, d 의 4개의 문자 중에서 중복을 허락하여 6개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$$\therefore {}_{4+6-1}C_6 = {}_9C_6 = {}_9C_3 = 84$$

$$\therefore m=84$$

(ii) a, b, c, d 는 양의 정수이므로 우선 a, b, c, d 를 1개씩 택한 후 a, b, c, d 에서 중복을 허락하

여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$$\therefore {}_{4+2-1}C_2 = {}_5C_2 = 10 \quad \therefore n=10$$

$$\therefore m+n=84+10=94$$

답 94

218

$$\sum_{r=0}^{15} {}_r{}_{15}C_r = {}_{15}C_0 3^0 + {}_{15}C_1 3^1 + \cdots + {}_{15}C_{15} 3^{15}$$

이고, 이항정리에서

$$(1+3)^{15} = {}_{15}C_0 + {}_{15}C_1 3^1 + {}_{15}C_2 3^2 + \cdots + {}_{15}C_{15} 3^{15}$$

즉, $4^{15} = {}_{15}C_0 + {}_{15}C_1 3^1 + {}_{15}C_2 3^2 + \cdots + {}_{15}C_{15} 3^{15}$ 이므로

$$A = 4^{15} = 2^{30}$$

$$\therefore \log_{\frac{1}{2}} A = \log_{\frac{1}{2}} 2^{30} = -30 \log_2 2 = -30$$

답 -30

219

$(1+2x)(a+x)^5$ 의 전개식에서 x^4 항은

(상수항) \times (x^4 항) + (x 항) \times (x^3 항)일 때이므로

$$1 \cdot {}_5C_4 a x^4 + 2x \cdot {}_5C_3 a^2 x^3$$

$$= 5a x^4 + 20a^2 x^4 = (5a + 20a^2) x^4$$

$5a + 20a^2 = 195$ 에서

$$4a^2 + a - 39 = 0, (4a+13)(a-3) = 0$$

여기서 $a > 0$ 이므로 $a=3$

한편, x^2 항은 (상수항) \times (x^2 항) + (x 항) \times (x 항)일 때이므로

$$1 \cdot {}_5C_2 3^3 x^2 + 2x \cdot {}_5C_1 3^4 x = 270x^2 + 810x^2$$

$$= 1080x^2$$

따라서 구하는 x^2 의 계수는 1080이다.

답 1080

220

(1) $\left(\frac{1}{x^2} - 2x\right)^7$ 의 일반항은

$${}_r C_r \left(\frac{1}{x^2}\right)^{7-r} \cdot (-2x)^r = (-2)^r \cdot {}_r C_r \cdot x^{3r-14}$$

$$3r - 14 = -2 \text{에서 } r=4$$

따라서 $\frac{1}{x^2}$ 의 계수는

$$(-2)^4 \cdot {}_4 C_4 = 560$$

(2) $(x^2 + \frac{1}{x})^6$ 의 전개식의 일반항은

$${}_6C_r (x^2)^{6-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r = {}_6C_r x^{12-3r}$$

$(x+1)^4$ 의 전개식의 일반항은

$${}_4C_s x^{4-s}$$

두 식의 곱의 전개식의 일반항은

$$({}_6C_r x^{12-3r})({}_4C_s x^{4-s}) = {}_6C_r \cdot {}_4C_s x^{16-3r-s}$$

이므로

$$16-3r-s=3$$

$$3r+s=13 (0 \leq r \leq 6, 0 \leq s \leq 4)$$

이를 만족시키는 정수 r, s 의 순서쌍은

$$(r, s) = (3, 4), (4, 1)$$

따라서 구하는 계수는

$${}_6C_3 \cdot {}_4C_4 + {}_6C_4 \cdot {}_4C_1 = 20 + 60 = 80$$

(3) $(2x+1)^4$ 의 일반항은

$${}_4C_r (2x)^{4-r} = {}_4C_r 2^{4-r} x^{4-r}$$

$(x-3)^3$ 의 일반항은

$${}_3C_s x^{3-s} (-3)^s = {}_3C_s (-3)^s x^{3-s}$$

$(2x+1)^4(x-3)^3$ 의 전개식의 일반항은

$${}_4C_r \cdot {}_3C_s 2^{4-r} (-3)^s \cdot x^{7-r-s} \dots\dots \textcircled{1}$$

x^5 의 계수는 $7-r-s=5$ 인 경우이고,

$0 \leq r \leq 4, 0 \leq s \leq 3$ 이므로 이때 r, s 의 순서쌍은

$$(r, s) = (0, 2), (1, 1), (2, 0)$$

이 값을 $\textcircled{1}$ 의 계수에 대입하여 더하면 x^5 의 계수는

$$\begin{aligned} & 1 \cdot {}_3C_2 \cdot 2^4 \cdot 9 + {}_4C_1 \cdot {}_3C_1 \cdot 2^3 \cdot (-3) + {}_4C_2 \cdot {}_3C_0 \cdot 2^2 \\ &= 3 \times 144 + 4 \times 3 \times 8 \times (-3) + 6 \times 4 \\ &= 432 - 288 + 24 = 168 \end{aligned}$$

답 (1) 560 (2) 80 (3) 168

221

연속되는 세 항을 각각 $(r+1), (r+2), (r+3)$ 번째 항이라고 하면

$$(-1)^r {}_nC_r = -20 \dots\dots \textcircled{1}$$

$$(-1)^{r+1} {}_nC_{r+1} = 190 \dots\dots \textcircled{2}$$

$$(-1)^{r+2} {}_nC_{r+2} = -1140 \dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1} \div \textcircled{2}$ 에서

$$\frac{r+1}{n-r} = \frac{2}{19} \quad \therefore 2n-21r=19$$

$\textcircled{2} \div \textcircled{3}$ 에서

$$\frac{r+2}{n-r-1} = \frac{1}{6} \quad \therefore n-7r=13$$

$$\therefore r=1, n=20$$

답 20

222

$(1+x)^n$ 의 전개식에서 x^8 의 계수는 ${}_nC_8$

x^9 의 계수는 ${}_nC_9$, x^{10} 의 계수는 ${}_nC_{10}$ 이고 이 순서로 등차수열을 이루므로

$$2 \cdot {}_nC_9 = {}_nC_8 + {}_nC_{10}$$

$$2 \cdot \frac{n!}{9!(n-9)!} = \frac{n!}{8!(n-8)!} + \frac{n!}{10!(n-10)!}$$

양변에 $\frac{10!(n-8)!}{n!}$ 을 곱하면

$$2 \cdot 10(n-8) = 10 \times 9 + (n-8)(n-9)$$

$$n^2 - 37n + 322 = 0, (n-14)(n-23) = 0$$

$$\therefore n=14 \text{ 또는 } n=23$$

답 14, 23

223

근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha\beta = \frac{{}_nC_1}{{}_nC_2} = 1 \quad \therefore {}_nC_4 = {}_nC_2$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} = \frac{n(n-1)}{2!}$$

$n \geq 4$ 이므로 $n(n-1)$ 로 양변을 나눈 후 정리하면

$$n^2 - 5n - 6 = 0, (n-6)(n+1) = 0$$

$$\therefore n=6 (\because n \geq 4)$$

$$\therefore \alpha + \beta = \frac{{}_nC_3}{{}_nC_2} = \frac{{}_6C_3}{{}_6C_2} = \frac{4}{3}$$

답 $\frac{4}{3}$

224

$$21^{21} = (1+20)^{21}$$

$$= {}_{21}C_0 + {}_{21}C_1 \cdot 20 + {}_{21}C_2 \cdot 20^2 + \dots + {}_{21}C_{21} 20^{21}$$

$$= {}_{21}C_0 + {}_{21}C_1 \cdot 20$$

$$+ ({}_{21}C_2 + {}_{21}C_3 \cdot 20 + \dots + {}_{21}C_{21} \cdot 20^{19}) 20^2$$

여기서 $20^2=400$ 이므로 400으로 나눈 나머지는

$${}_{21}C_0 + {}_{21}C_1 \cdot 20 = 1 + 21 \times 20 = 421$$

에서 21이다.

답 $\textcircled{4}$

225

$$(1+i)^{16} = ({}_{16}C_0 - {}_{16}C_2 + \cdots - {}_{16}C_{14} + {}_{16}C_{16}) \\ + i({}_{16}C_1 - {}_{16}C_3 + {}_{16}C_5 - \cdots + {}_{16}C_{13} - {}_{16}C_{15})$$

이때 $(1+i)^{16} = \{(1+i)^2\}^8 = (2i)^8 = 256$ 이므로

$${}_{16}C_0 - {}_{16}C_2 + \cdots - {}_{16}C_{14} + {}_{16}C_{16} = 256 \\ {}_{16}C_1 - {}_{16}C_3 + {}_{16}C_5 - \cdots + {}_{16}C_{13} - {}_{16}C_{15} = 0 \\ \therefore (\text{주어진 식}) = 256 \quad \text{답 ④}$$

226

$$(a+b)^n = {}_nC_0 a^n + {}_nC_1 a^{n-1}b + \cdots + {}_nC_n b^n$$

a_n 은 $a=1, b=-\frac{1}{2}$ 일 때이므로

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n} \\ \therefore \sum_{n=1}^m a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^m} \\ = \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^m}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^m}$$

$$\therefore \left| \left(1 - \frac{1}{2^m}\right) - 1 \right| = \frac{1}{2^m} < 10^{-2}$$

$$2^m > 100$$

여기서 $2^6=64, 2^7=128$ 이므로 구하는 m 의 최솟값은 7이다. 답 7

227

전개식의 일반항은

$${}_{n+1}C_r x^{n+1-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r = {}_{n+1}C_r x^{n+1-2r}$$

$n+1-2r = -n+3$ 이어야 하므로

$$r = n-1$$

$$\therefore P_n = {}_{n+1}C_{n-1}$$

$$= {}_{n+1}C_2 = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{P_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$$

$$= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= 2$$

답 2

228

이항정리를 이용하면

$$11^{11} = (1+10)^{11} \\ = {}_{11}C_0 + {}_{11}C_1 \cdot 10 + {}_{11}C_2 \cdot 10^2 + {}_{11}C_3 \cdot 10^3 + \cdots + {}_{11}C_{11} \cdot 10^{11} \\ = 1 + 110 + 5500 + (\text{자연수}) \times 10^3 \\ = 5611 + (\text{자연수}) \times 10^3$$

따라서 11^{11} 의 일의 자리, 십의 자리, 백의 자리의 숫자는 $a=1, b=1, c=6$

$$\therefore a+b+c=8$$

답 8

229

10개 중 2개를 고르는 경우의 수는

$${}_{10}C_2$$

상하지 않은 7개 중 2개를 고르는 경우의 수는

$${}_7C_2$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{{}_7C_2}{{}_{10}C_2} = \frac{7}{15}$$

답 $\frac{7}{15}$

230

10명을 5명씩 두 팀으로 나누는 방법의 수는

$${}_{10}C_5 \times {}_5C_5 \times \frac{1}{2!} = 126$$

특정한 2명이 같은 팀이 되는 경우는 나머지 8명을 3명, 5명의 두 팀으로 나누는 경우와 같으므로

$${}_8C_3 \times {}_5C_5 = 56$$

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{56}{126} = \frac{4}{9}$$

답 ④

231

두 수의 곱이 홀수이려면 두 수가 모두 홀수이어야 한다. 홀수는 1, 3, 5의 3개이므로 구하는 확률은

$$\frac{{}_3C_1 \times {}_3C_1}{36} = \frac{1}{4}$$

답 ①

232

10개의 제비에서 2개를 뽑는 경우의 수는 ${}_{10}C_2$ 이고,
 n 개의 당첨 제비에서 2개를 뽑는 경우의 수는 ${}_nC_2$ 이므로

$$\frac{{}_nC_2}{{}_{10}C_2} = \frac{1}{15}, \quad {}nC_2 = \frac{1}{15} {}_{10}C_2$$

$$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{15} \cdot \frac{10 \cdot 9}{2}$$

$$n(n-1) = 6 = 3 \cdot 2 \quad \therefore n = 3 \quad \text{답 } 3$$

233

(1) 코스를 결정하는 모든 경우의 수는 7!

A가 제 3코스에서 출발하고 나머지 6명의 코스가 결정되는 경우의 수는 6!가지이므로 구하는 확률은

$$\frac{6!}{7!} = \frac{1}{7}$$

(2) A와 B가 이웃한 코스에서 출발하는 경우의 수는 A, B를 묶어 하나로 생각하면 $6! \times 2$


따라서 구하는 확률은

$$\frac{6! \times 2}{7!} = \frac{2}{7} \quad \text{답 (1) } \frac{1}{7} \quad (2) \frac{2}{7}$$

234

8명을 일렬로 세우는 모든 경우의 수는 8!

여자 5명을 일렬로 세우는 경우의 수는 5!

오른쪽 그림에서 6곳 중 3곳 에 남자가 서면 남자끼리는

이웃할 수 없으므로 남자가 서는 방법의 수는 ${}_6P_3$

8명을 일렬로 세울 때, 남자끼리는 이웃하지 않게 서 있을 경우의 수는 $5! \times {}_6P_3$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{5! \times {}_6P_3}{8!} = \frac{5}{14} \quad \text{답 } \frac{5}{14}$$

235

집합 A의 모든 부분집합의 개수는 2^6

a_1 이 속하는 부분집합의 개수는 $2^{6-1} = 2^5$

따라서 구하는 확률은 $\frac{2^5}{2^6} = \frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

236

1, 2, 3, 4, 5의 5장의 카드에서 3장을 뽑아 세 자리의 정수를 만드는 경우의 수는 ${}_5P_3$

세 자리의 정수가 홀수인 경우의 수는

(i) $\square\square 1$ 의 꼴 : ${}_4P_2$

(ii) $\square\square 3$ 의 꼴 : ${}_4P_2$

(iii) $\square\square 5$ 의 꼴 : ${}_4P_2$

따라서 구하는 확률은 $\frac{{}_4P_2 \times 3}{{}_5P_3} = \frac{3}{5}$

답 $\frac{3}{5}$

237

$$P_n = \frac{{}_3C_2 \cdot {}_nC_2}{{}_{n+5}C_4}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot P_n = n^2 \cdot 24 \cdot \frac{\frac{3}{2} n(n-1)}{(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)} = 36 \quad \text{답 } 36$$

KEY point

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값

⇒ (분모의 차수) = (분자의 차수) 일 때는 최고차항의 계수의 비가 극한값이 된다.

238

수험생 5명을 A, B, C, D, E A B C D E

라 하고, 수험표를 각각 $a, b, b-a \begin{cases} d-e-c \\ e-c-d \end{cases}$

c, d, e 라고 하면 오른쪽과 같은 수형도를 얻는다.

(A, b)인 경우는 11가지이고, $b-c \begin{cases} a-e-d \\ d-e-a \\ e-a-d \end{cases}$

(A, c), (A, d), (A, e)인

경우도 마찬가지로 모든 경

우의 수는 $b-d \begin{cases} a-e-c \\ e-a-c \\ e-c-a \end{cases}$

$$11 \times 4 = 44$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{44}{5!} = \frac{11}{30}$$

$$b-e \begin{cases} a-c-d \\ d-a-c \\ d-c-a \end{cases}$$

답 $\frac{11}{30}$

239

모든 경우의 수는 ${}_7P_4$

또, 네 자리 정수가 4200보다 큰 수는

$$42\square\square, 43\square\square, 45\square\square, 46\square\square, 47\square\square$$

인 것으로 ${}_5P_2 \times 5$ 와

$$5\square\square\square, 6\square\square\square, 7\square\square\square$$

인 것으로

$${}_6P_3 \times 3$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{{}_5P_2 \times 5 + {}_6P_3 \times 3}{{}_7P_4} = \frac{23}{42} \quad \text{답 } \frac{23}{42}$$

240

모든 경우의 수는 $6 \times 6 = 36$

$x^2 + 2ax + b = 0$ 이 실근을 가지므로

$$\frac{D}{4} = a^2 - b \geq 0 \text{에서}$$

$$b \leq a^2$$

(i) $a=1$ 일 때, $b=1$ 의 1가지

(ii) $a=2$ 일 때, $b=1, 2, 3, 4$ 의 4가지

(iii) $a=3, 4, 5, 6$ 일 때, b 의 값도 각각 1, 2, 3, 4, 5, 6이므로

$$4 \times 6 = 24 (\text{가지})$$

(i), (ii), (iii)에서 $1 + 4 + 24 = 29$

따라서 구하는 확률은 $\frac{29}{36}$ 답 $\frac{29}{36}$

241

8개의 점 중 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 개수는 ${}_8C_3$

직각삼각형의 한 변은 원의 지름이어야 하므로 원의 지름의 양 끝점을 택하는 방법은 4가지이고 나머지 다른 한 점을 택하는 방법은 6가지이므로 직각삼각형의 개수는

$$4 \times 6 = 24$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{24}{{}_8C_3} = \frac{3}{7} \quad \text{답 } \frac{3}{7}$$

242

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ b+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

$$\therefore p = a - b, \quad q = a + b$$

두 점 $(0, 0), (p, q)$ 사이의 거리는

$$\sqrt{p^2 + q^2} \leq 5$$

$p^2 + q^2 \leq 25$ 에서

$$(a-b)^2 + (a+b)^2 \leq 25$$

$$\therefore a^2 + b^2 \leq \frac{25}{2}$$

이때 부등식을 만족시키는 a, b 의 순서쌍은

$$(a, b) = (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (1, 3), (3, 1)$$

의 6개이다.

따라서 구하는 확률은

$$\frac{6}{36} = \frac{1}{6} \quad \text{답 } \frac{1}{6}$$

243

2명 모두 남학생인 사건을 A , 2명 모두 여학생인 사건을 B 라고 하면

$$P(A) = \frac{{}_6C_2}{{}_{10}C_2} = \frac{1}{3}$$

$$P(B) = \frac{{}_4C_2}{{}_{10}C_2} = \frac{2}{15}$$

그런데 사건 A, B 는 서로 배반사건이므로

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{15}$$

$$= \frac{7}{15} \quad \text{답 } \frac{7}{15}$$

244

$$P(B^c) = 1 - P(B) = \frac{2}{3} \text{이므로}$$

$$P(B) = \frac{1}{3}$$

이때

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - P(A \cap B)$$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{1}{12} \quad \text{답 } \frac{1}{12}$$

245

(남녀를 적어도 한 명씩 뽑을 확률)

$= 1 - (\text{모두 남자 또는 모두 여자를 뽑을 확률})$

(i) 4명 모두 남자를 뽑을 확률은

$$\frac{{}_6C_4}{{}_{11}C_4}$$

(ii) 4명 모두 여자를 뽑을 확률은

$$\frac{{}_5C_4}{{}_{11}C_4}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} 1 - \left(\frac{{}_6C_4}{{}_{11}C_4} + \frac{{}_5C_4}{{}_{11}C_4} \right) &= 1 - \frac{{}_6C_4 + {}_5C_4}{{}_{11}C_4} \\ &= 1 - \frac{2}{33} = \frac{31}{33} \quad \text{답 } \textcircled{3} \end{aligned}$$

246

12명의 학생 중 3명의 대표를 선발하는 경우의 수는

$${}_{12}C_3$$

선발된 대표가 모두 1학년인 사건을 A ,

선발된 대표가 모두 2학년인 사건을 B ,

선발된 대표가 모두 3학년인 사건을 C 라고 하면

$$P(A) = \frac{{}_4C_3}{{}_{12}C_3} = \frac{1}{55}$$

$$P(B) = \frac{{}_5C_3}{{}_{12}C_3} = \frac{1}{22}$$

$$P(C) = \frac{{}_3C_3}{{}_{12}C_3} = \frac{1}{220}$$

그런데 사건 A, B, C 는 서로 배반사건이므로

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) \\ &= \frac{1}{55} + \frac{1}{22} + \frac{1}{220} \\ &= \frac{3}{44} \quad \text{답 } \frac{3}{44} \end{aligned}$$

247

$$6x^2 - 5ax + a^2 = 0, (3x - a)(2x - a) = 0$$

$$\therefore x = \frac{a}{3} \text{ 또는 } x = \frac{a}{2}$$

x 가 정수이므로 a 는 3의 배수이거나 또는 2의 배수 이어야 한다.

a 가 2의 배수일 사건을 A , 3의 배수일 사건을 B 라고 하면

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{25}{50} + \frac{16}{50} - \frac{8}{50} \\ &= \frac{33}{50} \quad \text{답 } \frac{33}{50} \end{aligned}$$

248

모든 경우의 수는 $6 \times 6 = 36$

두 눈의 합은 2, 3, 4, ..., 12 중 하나이고 이 중에서 12와 서로소인 것은 5, 7, 11이다.

(i) 두 눈의 합이 5인 경우 :

(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)

(ii) 두 눈의 합이 7인 경우 :

(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)

(iii) 두 눈의 합이 11인 경우 : (5, 6), (6, 5)

(i), (ii), (iii)은 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\frac{4}{36} + \frac{6}{36} + \frac{2}{36} = \frac{1}{3} \quad \text{답 } \frac{1}{3}$$

249

6개의 숫자로 만들 수 있는 세 자리 정수의 개수는

$$5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$$

이때 일의 자리의 숫자가 0, 2, 4인 사건을 각각 A, B, C 라고 하면

$$P(A) = \frac{{}_5P_2}{100} = \frac{1}{5}$$

0은 백의 자리에 올 수 없으므로

$$P(B) = \frac{4 \times 4}{100} = \frac{4}{25}$$

$$P(C) = \frac{4 \times 4}{100} = \frac{4}{25}$$

A, B, C 는 서로 배반사건이므로

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) \\ &= \frac{1}{5} + \frac{4}{25} + \frac{4}{25} \\ &= \frac{13}{25} \quad \text{답 } \frac{13}{25} \end{aligned}$$

250

- (i) 갑의 주머니에서 검은 공을 꺼내 을의 주머니로 옮겼을 때, 을의 주머니에서 흰 공을 꺼낼 확률은

$$\frac{2}{4} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$$

- (ii) 갑의 주머니에서 흰 공을 꺼내 을의 주머니로 옮겼을 때, 을의 주머니에서 흰 공을 꺼낼 확률은

$$\frac{2}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

- (i), (ii)는 배반사건이므로

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8} \quad \text{답 } \frac{5}{8}$$

251

- (1) A가 위원으로 뽑히는 사건을 A, B가 위원으로 뽑히는 사건을 B라고 하면

$$P(A) = \frac{{}_5C_2}{{}_6C_3} = \frac{1}{2}$$

A, B가 모두 위원으로 뽑힐 확률 $P(A \cap B)$ 는

$$P(A \cap B) = \frac{{}_4C_1}{{}_6C_3} = \frac{1}{5}$$

따라서 A가 위원으로 뽑혔을 때, B도 위원일 확률 $P(B|A)$ 는

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ &= \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

- (2) 세 수의 합이 홀수인 경우는
(홀수)+(홀수)+(홀수),
(홀수)+(짝수)+(짝수)

이므로 각 경우의 수는

$${}_5C_3, {}_5C_1 \times {}_5C_2$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} \frac{{}_5C_3 + {}_5C_1 \times {}_5C_2}{{}_{10}C_3} &= \frac{10 + 5 \times 10}{120} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{답 (1) } \frac{2}{5} \quad (2) \frac{1}{2}$$

252

1차 시험에 합격하는 사건을 A, 2차 시험에 합격하는 사건을 B라고 하면

$$P(A) = \frac{5}{100}, P(A \cap B) = \frac{2}{100}$$

따라서 1차 시험에 합격했을 때, 2차 시험에 합격할 확률 $P(B|A)$ 는

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ &= \frac{2}{100} \times \frac{100}{5} = \frac{2}{5} \quad \text{답 } \frac{2}{5} \end{aligned}$$

253

비가 오는 경우를 ○, 비가 오지 않는 경우를 ×라고 하면

월	화	수	목	확률
○	○	○	○	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$
○	○	×	○	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$
○	×	○	○	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$
○	×	×	○	$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{9} = \frac{29}{72} \quad \text{답 } \frac{29}{72}$$

254

- (1) $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$ 에서

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} - P(A \cap B)$$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

또한,

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

$$\therefore P(A^c|B) = \frac{P(A^c \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}$$

$$(2) P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{이므로}$$

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

$$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$$

$$\text{이때 } A^c \cap B^c = (A \cup B)^c \text{이므로}$$

$$P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A \cup B) \\ = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$(3) P(A^c \cap B^c) = 0.4 \text{에서 } P((A \cup B)^c) = 0.4$$

$$\therefore 0.4 = 1 - P(A \cup B)$$

$$\therefore P(A \cup B) = 0.6 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\text{한편, } P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = 0.25P(B)$$

$$\therefore P(A \cup B) \\ = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ = 0.3 + P(B) - 0.25P(B) \\ = 0.3 + 0.75P(B) \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧에서

$$0.6 = 0.3 + 0.75P(B)$$

$$\therefore P(B) = 0.4$$

$$\therefore P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \\ = \frac{0.25 \times 0.4}{0.3} = \frac{1}{3}$$

$$\text{답 (1) } \frac{1}{4} \quad (2) \frac{1}{2} \quad (3) \frac{1}{3}$$

255

두 사건 A 와 C 는 서로 독립이므로

$$P(A) \cdot P(C) = P(A \cap C)$$

$$P(A) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad \therefore P(A) = \frac{1}{2}$$

또, A 와 B 는 서로 배반사건이므로

$$P(A \cap B) = 0$$

따라서 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + P(B)$$

$$\therefore P(B) = \frac{1}{6}$$

$$\text{답 } \frac{1}{6}$$

256

A 가 새를 맞히는 사건을 A , B 가 새를 맞히는 사건을 B 라고 하면 A 와 B 는 독립이므로

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

$$\text{그런데 } P(A) = \frac{2}{3}, P(A \cup B) = \frac{3}{4} \text{이므로}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{2}{3} + P(B) - \frac{2}{3}P(B)$$

$$\therefore P(B) = \frac{1}{4} \quad \text{답 } \frac{1}{4}$$

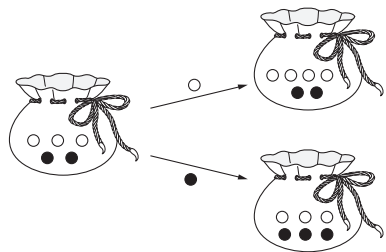
257

(i) 처음에 흰 공, 다음에 2개의 검은 공을 꺼내는 경우의 확률은

$$\frac{3}{5} \times \frac{{}_2C_2}{{}_6C_2} = \frac{3}{5} \times \frac{1}{15} = \frac{1}{25}$$

(ii) 처음에 검은 공, 다음에 2개의 검은 공을 꺼내는 경우의 확률은

$$\frac{2}{5} \times \frac{{}_3C_2}{{}_6C_2} = \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{25}$$



(i), (ii)는 배반사건이므로 2개 모두 검은 공일 확률은

$$\frac{1}{25} + \frac{2}{25} = \frac{3}{25}$$

따라서 흰 공이 적어도 하나 뽑힐 확률은

$$1 - \frac{3}{25} = \frac{22}{25} \quad \text{답 } \frac{22}{25}$$

258

눈의 합이 6의 배수가 되는 경우는

$$(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1), \\ (6, 6)$$

의 6가지이므로 확률은 $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

한편, A가 이기는 경우는
오른쪽과 같이 제 1회,
제 3회, 제 5회, ...이다.
따라서 A가 이길 확률은

제 1회	○
제 3회	× × ○
제 5회	× × × × ○
⋮	⋮

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} + \dots \\ &= \frac{\frac{1}{6}}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{6}{11} \end{aligned} \quad \text{답 } \frac{6}{11}$$

259

합격생 1명을 임의로 선택하였을 때, 지방 출신일 사건을 A, 남학생일 사건을 B라고 하면

$$\text{구하는 확률은 } P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

이때 $P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$ 이고

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B|A) \\ &= 0.6 \times 0.55 = 0.33 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B) &= P(A^c) \cdot P(B|A^c) \\ &= 0.4 \times 0.45 = 0.18 \end{aligned}$$

$$\therefore P(B) = 0.33 + 0.18 = 0.51$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.33}{0.51} = \frac{11}{17} \quad \text{답 } \frac{11}{17}$$

260

ㄱ. (반례) 동전을 던지는 시행에서 앞면, 뒷면이 나오는 사건을 각각 A, B라고 하면 두 사건 A, B는 배반사건이다.

그러나 $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) = 0$ 에서

$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$ 이므로 두 사건 A, B는 독립이 아니다. (거짓)

ㄴ. $P(A^c \cap B^c)$

$$= P((A \cup B)^c)$$

$$= 1 - P(A \cup B)$$

$$= 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B))$$

$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) \quad (\because A, B \text{가 독립})$$

$$= (1 - P(A))(1 - P(B))$$

$$= P(A^c)P(B^c)$$

따라서 두 사건 A^c , B^c 은 독립이다. (참)

ㄷ. 두 사건 A, B가 서로 독립이므로 A, B^c 도 서로 독립이다.

$$\therefore P(A^c) + P(A|B^c)$$

$$= P(A^c) + P(A)$$

$$= 1 \quad (\text{참})$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄴ, ㄷ

261

우산을 A, B, C의 집에 두고 오는 사건을 각각 A, B, C라 하고, 우산을 잃어버리는 사건을 Z라고 하면

$$P(A) = \frac{1}{5}, P(B) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{4}{25}$$

$$P(C) = \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{16}{125}$$

이므로 A, B, C 세 사람의 집 중 어느 한 집에 두고 올 확률 P(Z)는

$$\begin{aligned} P(Z) &= P(A) + P(B) + P(C) \\ &= \frac{1}{5} + \frac{4}{25} + \frac{16}{125} = \frac{61}{125} \end{aligned}$$

따라서 B의 집에 두고 왔을 확률은

$$\begin{aligned} P(B|Z) &= \frac{P(B \cap Z)}{P(Z)} = \frac{P(B)}{P(Z)} \\ &= \frac{\frac{4}{25}}{\frac{61}{125}} = \frac{20}{61} \end{aligned} \quad \text{답 } \frac{20}{61}$$

262

같은 색의 공을 꺼낼 확률은

$$\frac{{}_3C_2 + {}_2C_2}{{}_5C_2} = \frac{3+1}{10} = \frac{2}{5}$$

이므로 다른 색의 공을 꺼낼 확률은

$$1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

먼저 시작한 사람이 이기는 경우는

제 1회 : ○

$$\frac{2}{5}$$

제 3회 : × × ○

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \frac{2}{5}$$

제 5회 : × × × × ○

$$\left(\frac{3}{5}\right)^4 \cdot \frac{2}{5}$$

⋮

따라서 먼저 시작한 사람이 이길 확률은

$$\begin{aligned} & \frac{2}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \frac{2}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^4 \cdot \frac{2}{5} + \cdots \\ &= \frac{\frac{2}{5}}{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

답 $\frac{5}{8}$

263

A 신문을 보는 친구의 집합을 A, B 신문을 보는 친구의 집합을 B라고 하면 $n(A)=24$, $n(B)=16$ 따라서 구하는 확률은

$$P(B^c | A) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(A)}$$

A, B 중 어느 신문도 구독하지 않는 친구가 8명이므로

$$\begin{aligned} n(A^c \cap B^c) &= n(U) - n(A \cup B) \\ &= 40 - n(A \cup B) = 8 \\ \therefore n(A \cup B) &= 32 \end{aligned}$$

따라서 A, B 두 신문 모두 구독하는 친구 수는

$$\begin{aligned} n(A \cap B) &= n(A) + n(B) - n(A \cup B) \\ &= 24 + 16 - 32 = 8 \end{aligned}$$

$$\therefore n(A \cap B^c) = 24 - 8 = 16$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B^c | A) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(A)} = \frac{\frac{16}{40}}{\frac{24}{40}} = \frac{2}{3} \quad \text{답 } \frac{2}{3}$$

264

$$P(S) = \frac{70}{100}, P(S^c) = \frac{30}{100}$$

$$P(L) = \frac{60}{100}, P(L^c) = \frac{40}{100}$$

$$\neg, P(S \cap L) = \frac{42}{100}$$

$$P(S) \cdot P(L) = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{42}{100}$$

$$\therefore P(S \cap L) = P(S) \cdot P(L)$$

따라서 S와 L은 서로 독립이다.

$$\neg, P(S \cap L^c) = \frac{28}{100}$$

$$P(S) \cdot P(L^c) = \frac{7}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{28}{100}$$

$$\therefore P(S \cap L^c) = P(S) \cdot P(L^c)$$

따라서 S와 L^c 은 서로 독립이다.

$$\neg, P(S^c \cap L^c) = \frac{12}{100}$$

$$P(S^c) \cdot P(L^c) = \frac{3}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{12}{100}$$

$$\therefore P(S^c \cap L^c) = P(S^c) \cdot P(L^c)$$

따라서 S^c 과 L^c 은 서로 독립이다.

이상에서 서로 독립인 것은 \neg , \neg , \neg 이다. 답 ⑤

265

공을 넣을 때, C지점으로 내려 가는 경우는 다음과 같다.

(i) 왼쪽 → 오른쪽 → 오른쪽

$$\therefore \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{27}$$

(ii) 오른쪽 → 왼쪽 → 오른쪽

$$\therefore \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{27}$$

(iii) 오른쪽 → 오른쪽 → 왼쪽

$$\therefore \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$$\frac{4}{27} + \frac{4}{27} + \frac{4}{27} = \frac{4}{9}$$

답 $\frac{4}{9}$



266

각각의 스위치가 열리거나 닫히는 확률은 $\frac{1}{2}$ 이다.

7개 스위치 a, b, c, d, e, f, g가 닫혀 있는 사건을 각각 A, B, C, D, E, F, G라고 하자.

주어진 그림에서 P에서 Q로 적어도 하나의 선만 연결되면 전류는 흐르므로 P에서 Q로 전류가 흐르지 않는 경우를 구하면

(i) 회로 g 가 열려 있는 경우 : G^c 일 확률은 $\frac{1}{2}$

(ii) 회로 g 가 닫혀 있고, 회로 a 는 열려 있고, 회로 b, c, d 중 적어도 하나가 열려 있고, 회로 e, f 중 적어도 하나가 열려 있는 경우이다.

$G \cap A^c \cap (B \cap C \cap D)^c \cap (E \cap F)^c$ 일 확률은

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{8}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{21}{128}$$

즉, 전류가 흐르지 않을 확률은

$$\frac{1}{2} + \frac{21}{128} = \frac{85}{128}$$

따라서 전류가 흐를 확률은

$$1 - \frac{85}{128} = \frac{43}{128} \quad \text{답 } \frac{43}{128}$$

267

세 번의 시험에서 A가 적어도 두 번 이길 확률은 A가 두 번 또는 세 번 이길 확률이므로

$${}_3C_2 \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \frac{2}{5} + {}_3C_3 \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{81}{125} \quad \text{답 } \frac{81}{125}$$

268

구하는 확률은

$$\begin{aligned} & {}_5C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + {}_5C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \frac{1}{2} + {}_5C_5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \\ &= \frac{1}{32} (10 + 5 + 1) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2} \quad \text{답 } \frac{1}{2} \end{aligned}$$

269

동전을 n 번 던질 때, 뒷면이 한 번도 나오지 않을 확률

$$\text{은 } {}_nC_0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$$

따라서 뒷면이 적어도 한 번 나올 확률은

$$1 - \frac{1}{2^n} \geq \frac{15}{16}, \quad 2^n \geq 2^4 \quad \therefore n \geq 4 \quad \text{답 } 4$$

270

5번째 시험에서 A팀이 승자가 되려면 앞의 4번의 시험에서 3번을 이기고, 5번째 시험에서 이겨야 하므로 확률은

$$\left\{{}_4C_3 \left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot \frac{2}{5}\right\} \cdot \frac{3}{5} = \frac{648}{3125}$$

또, B팀이 승자가 되려면

$$\left\{{}_4C_3 \left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \frac{3}{5}\right\} \cdot \frac{2}{5} = \frac{192}{3125}$$

따라서 5번째 시험에서 승자가 결정될 확률은

$$\frac{648}{3125} + \frac{192}{3125} = \frac{168}{625} \quad \text{답 } \frac{168}{625}$$

271

(i) A팀이 4, 5, 6차전에서 연속하여 이기는 경우

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

(ii) A팀이 4, 5, 6차전 중 두 번 이기고, 7차전에서 이길 경우

$${}_3C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{16}$$

(i), (ii)에서 A팀이 우승할 확률은

$$\frac{1}{8} + \frac{3}{16} = \frac{5}{16} \quad \text{답 } \textcircled{3}$$

272

$$P_1 = {}_5C_1 \cdot \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^4 = 5 \cdot \frac{9^4}{10^5}$$

$$P_2 = {}_5C_2 \left(\frac{1}{10}\right)^2 \left(\frac{9}{10}\right)^3 = 10 \cdot \frac{9^3}{10^5}$$

$$\therefore \frac{P_1}{P_2} = \frac{9}{2} \quad \text{답 } \frac{9}{2}$$

273

점 O에서 출발하여 점 P에 도달하려면 오른쪽으로 3

칸, 위로 1칸 가면 된다. 1 또는 6의 눈이 나오는 확률

은 $\frac{1}{3}$ 이고 그 이외의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{3}$ 이므로 점 P

에 도달할 확률은

$${}_4C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{8}{81}$$

같은 방법으로 점 Q에 도달하려면 오른쪽으로 2칸,

위로 2칸 가면 되므로 구하는 확률은

$${}_4C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}$$

$$\text{답 점 P에 도달할 확률 : } \frac{8}{81}$$

$$\text{점 Q에 도달할 확률 : } \frac{8}{27}$$

274

짝수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$, 홀수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$ 이다.

- (1) 5번은 짝수의 눈, 5번은 홀수의 눈이 나와야 하므로 구하는 확률은

$${}_{10}C_5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{63}{256}$$

- (2) 짝수의 눈이 x 번 나온다고 하면 홀수의 눈은 $(10-x)$ 번 나오므로 이 차는 $2x-10$ 으로 짝수가 된다. 따라서 점 P의 좌표는 짝수이어야 한다. 그러므로 점 P는 $-2, 0, 2$ 인 위치에 있어야 하며 이 경우는 짝수의 눈이 4번, 5번, 6번 나오는 경우이고 이들은 서로 배반사건이다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} & {}_{10}C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^6 + {}_{10}C_5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \\ & \quad + {}_{10}C_6 \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \\ & = \frac{210+252+210}{1024} \\ & = \frac{21}{32} \end{aligned} \quad \text{답 (1) } \frac{63}{256} \quad (2) \frac{21}{32}$$

275

동전의 앞면의 개수 : 주사위의 눈 \Rightarrow 확률로 나타내면

$$6\text{개} : 1, 2, 3, 4, 5 \Rightarrow {}_6C_6 \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times \frac{5}{6}$$

$$5\text{개} : 1, 2, 3, 4 \Rightarrow {}_6C_5 \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times \frac{4}{6}$$

$$4\text{개} : 1, 2, 3 \Rightarrow {}_6C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times \frac{3}{6}$$

$$3\text{개} : 1, 2 \Rightarrow {}_6C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times \frac{2}{6}$$

$$2\text{개} : 1 \Rightarrow {}_6C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times \frac{1}{6}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} & \frac{1}{64} \times \frac{1}{6} (5+24+45+40+15) \\ & = \frac{1}{64} \times \frac{1}{6} \times 129 = \frac{43}{128} \end{aligned} \quad \text{답 } \frac{43}{128}$$

276

한 개의 주사위를 던질 때, 1점을 받을 확률은 $\frac{1}{3}$, 0점을 받을 확률은 $\frac{1}{3}$, -1 점을 받을 확률은 $\frac{1}{3}$ 이고, 주사위를 4번 던져 1점이 x 번, 0점이 y 번, -1 점이 z 번 나왔다고 하면

$$x+y+z=4 \quad (x, y, z \text{는 } 0 \text{에서 } 4 \text{까지의 정수})$$

따라서 점수의 합이 0이 되려면 $x-z=0$

이것을 만족시키는 (x, y, z) 의 쌍은 $(0, 4, 0)$, $(1, 2, 1)$, $(2, 0, 2)$ 의 세 가지 경우가 있다.

$$(0, 4, 0) \text{ 일 확률은 } {}_4C_4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$$

$$(1, 2, 1) \text{ 일 확률은 } {}_4C_1 \times {}_3C_2 \times {}_1C_1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{12}{81}$$

$$(2, 0, 2) \text{ 일 확률은 } {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{6}{81}$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{1}{81} + \frac{12}{81} + \frac{6}{81} = \frac{19}{81} \quad \text{답 } \frac{19}{81}$$

277

1회의 시행에서 흰 공이 나타날 확률은 $\frac{8}{9}$ 이므로 n 회

의 시행에서 n 회 모두 흰 공이 나타날 확률은

$${}_nC_n \left(\frac{8}{9}\right)^n = \left(\frac{8}{9}\right)^n$$

따라서 n 회의 시행에서 적어도 1개의 검은 공이 나타날 확률은 $1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n$

$$\therefore 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n \geq 0.8, \left(\frac{8}{9}\right)^n \leq 0.2$$

위 식의 양변에 상용로그를 취하면

$$n \log \frac{8}{9} \leq \log \frac{2}{10}$$

$$n(\log 8 - \log 9) \leq \log 2 - 1$$

$$n(\log 2^3 - \log 3^2) \leq \log 2 - 1$$

$$\therefore n \geq \frac{\log 2 - 1}{3 \log 2 - 2 \log 3}$$

$$= \frac{0.3010 - 1}{3 \times 0.3010 - 2 \times 0.4771} = 13. \times \times \times$$

따라서 14회 이상 반복해야 한다.

답 14

V. 통계

278

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times \frac{7}{30} + 1 \times \frac{4}{15} + 2 \times \frac{4}{15} + 3 \times \frac{7}{30} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore E(2X+5) = 2E(X) + 5 = 8 \quad \text{답 8}$$

279

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - m^2 \\ &= \left(1^2 \times \frac{1}{6} + 2^2 \times \frac{1}{6} + \dots + 6^2 \times \frac{1}{6}\right) - \left(\frac{7}{2}\right)^2 \\ &= \frac{35}{12} \\ \therefore \sigma(X) &= \frac{\sqrt{105}}{6} \quad \text{답 } \frac{\sqrt{105}}{6} \end{aligned}$$

280

$$\begin{aligned} E((X-3)^2) &= E(X^2 - 6X + 9) \\ &= E(X^2) - 6E(X) + 9 \\ &= V(X) + \{E(X)\}^2 - 6E(X) + 9 \\ &= 7 + 2^2 - 6 \cdot 2 + 9 \\ &= 8 \quad \text{답 8} \end{aligned}$$

281

$$E(2X+4) = 2E(X) + 4 = 12 \text{이므로}$$

$$E(X) = 4$$

$$V(2X) = 2^2 V(X) = 36 \text{이므로}$$

$$V(X) = 9$$

$$\begin{aligned} \therefore E(X^2) &= V(X) + \{E(X)\}^2 \\ &= 9 + 4^2 = 25 \end{aligned}$$

답 ④

282

$$E(X) = 8, \sigma(X) = 0.1 \text{에서}$$

$$\begin{aligned} E(aX+b) &= aE(X) + b \\ &= 8a + b = 0 \quad \dots\dots ㉠ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma(aX+b) &= |a|\sigma(X) \\ &= 0.1 \times |a| = 1 \quad \dots\dots ㉡ \end{aligned}$$

$$㉡ \text{에서 } |a| = 10 \quad \therefore a = 10 \quad (\because a > 0)$$

㉠에 대입하면

$$b = -80$$

$$\therefore a - b = 10 - (-80)$$

$$= 90$$

답 90

283

$$Y = \frac{1}{10}X - 15 \text{에서}$$

$$X = 10Y + 150$$

$$\therefore E(X) = E(10Y + 150)$$

$$= 10E(Y) + 150$$

$$= 10 \times (-0.3) + 150 = 147$$

또한,

$$\begin{aligned} V(Y) &= E(Y^2) - \{E(Y)\}^2 \\ &= 0.5 - (-0.3)^2 = 0.41 \end{aligned}$$

$$\therefore V(X) = V(10Y + 150)$$

$$= 10^2 V(Y)$$

$$= 100 \times 0.41 = 41$$

답 평균 : 147, 분산 : 41

284

$$\text{꺼낸 두 개의 공이 모두 흰 공일 확률은 } \frac{{}_4C_2}{{}_7C_2}$$

$$\text{꺼낸 두 개의 공이 모두 검은 공일 확률은 } \frac{{}_3C_2}{{}_7C_2}$$

따라서 꺼낸 두 개의 공이 같은 색일 확률은

$$\frac{{}_4C_2}{{}_7C_2} + \frac{{}_3C_2}{{}_7C_2} = \frac{3}{7}$$

또, 두 개의 공의 색이 다를 확률은 위의 사건의 여사건의 확률이므로

$$1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$$

따라서 기대 금액은

$$1400 \times \frac{3}{7} + 700 \times \frac{4}{7} = 1000 \text{(원)}$$

답 1000원

285

$$a+b+c=1 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= a+2b+3c \\ &= 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉡} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma^2(X) &= 1^2 \cdot a + 2^2 \cdot b + 3^2 \cdot c - 2^2 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore a+4b+9c = \frac{9}{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}, \textcircled{㉢}$ 에서

$$a = \frac{1}{4}, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = \frac{1}{4}$$

$$\therefore P(X=2) = b = \frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

286

$P(X=-2)+P(X=-1)+P(X=0)=1$ 에서

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + k = 1$$

$$\therefore k = \frac{1}{4}$$

또, $X^2+2X-3 < 0$ 에서

$$(X+3)(X-1) < 0$$

$$-3 < X < 1 \quad \therefore X = -2, -1, 0$$

$$\begin{aligned} \therefore P(X^2+2X-3 < 0) &= P(X=-2)+P(X=-1)+P(X=0) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\text{답 } k = \frac{1}{4}, \quad P(X^2+2X-3 < 0) = 1$$

287

확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + a + b = 1$$

$$\therefore a+b = \frac{5}{12} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\begin{aligned} P(X^2 \leq 3X-2) &= P(X^2-3X+2 \leq 0) \\ &= P(1 \leq X \leq 2) \end{aligned}$$

$$= P(X=1) + P(X=2)$$

$$= \frac{1}{4} + a$$

$$= \frac{5}{12}$$

$$\therefore a = \frac{1}{6} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } b = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \therefore 12(b-a) &= 12\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

답 1

288

$$\begin{aligned} P(X=n) &= \frac{k}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{k(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})} \\ &= k(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \end{aligned}$$

확률의 총합은 1이므로

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{15} P(X=n) &= 1 \\ \therefore \sum_{n=1}^{15} k(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) &= k\{(\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \dots \\ &\quad + (\sqrt{16}-\sqrt{15})\} \\ &= k(-1+4) \\ &= 3k \end{aligned}$$

따라서 $3k=1$ 이므로

$$k = \frac{1}{3} \quad \text{답 } \frac{1}{3}$$

289

$$E(Y) = E(2X+3) = 2E(X) + 3 = 7 \text{이므로}$$

$$E(X) = 2$$

$$\therefore E(X) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 a + \left(\frac{1}{2}\right)^3 a^2 + \dots$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}a}$$

$$= 2$$

$$\therefore a = \frac{3}{2} \quad \text{답 } \frac{3}{2}$$

290

$E(X)=m, V(X)=\sigma^2$ 이므로

$$\begin{aligned} E(Z) &= E\left(\frac{X-m}{\sigma}\right) = E\left(\frac{X}{\sigma} - \frac{m}{\sigma}\right) \\ &= \frac{1}{\sigma} E(X) - \frac{m}{\sigma} \\ &= 0 \\ V(Z) &= V\left(\frac{X-m}{\sigma}\right) = V\left(\frac{1}{\sigma} X - \frac{m}{\sigma}\right) \\ &= \frac{1}{\sigma^2} V(X) = 1 \\ \therefore \sigma(Z) &= 1 \end{aligned}$$

답 $E(Z)=0, \sigma(Z)=1$

291

$Z = \frac{X-m}{\sigma}$ 의 평균과 분산은

$$E(Z)=0, V(Z)=1$$

$$(1) E(T) = E(10Z + 50) = 10E(Z) + 50 = 50$$

$$\sigma(T) = \sigma(10Z + 50) = |10| \sigma(Z) = 10$$

$$(2) T = 10\left(\frac{75-55}{10}\right) + 50 = 70 \text{ (점)}$$

답 (1) 평균 : 50, 표준편차 : 10 (2) 70점

292

$b + \frac{1}{4} + a = 1$ 에서 $a + b = \frac{3}{4}$

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \cdot b + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot a \\ &= \left(\frac{3}{4} - a\right) + \frac{2}{4} + 3a = 2a + \frac{5}{4} \\ V(X) &= 1^2 \cdot b + 2^2 \cdot \frac{1}{4} + 3^2 \cdot a - \left(2a + \frac{5}{4}\right)^2 \\ &= \left(\frac{3}{4} - a\right) + 1 + 9a - \left(4a^2 + 5a + \frac{25}{16}\right) \\ &= -4a^2 + 3a + \frac{3}{16} \\ &= -4\left(a - \frac{3}{8}\right)^2 + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

따라서 X 의 분산은 $a = \frac{3}{8}$ 일 때, 최대이다.

답 $\frac{3}{8}$

293

확률변수 X 가 취할 수 있는 값은 0, 1, 2이고 이에 대응하는 확률은

$$P(X=0) = \frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} = \frac{3}{10}$$

$$P(X=1) = \frac{{}_3C_1 \cdot {}_2C_1}{{}_5C_2} = \frac{6}{10}$$

$$P(X=2) = \frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} = \frac{1}{10}$$

이므로 X 의 확률분포는 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

$$\therefore E(X) = 0 \cdot \frac{3}{10} + 1 \cdot \frac{6}{10} + 2 \cdot \frac{1}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\therefore E(10X + 4) = 10E(X) + 4$$

$$= 10 \cdot \frac{4}{5} + 4 = 12 \quad \text{답 ③}$$

294

확률변수 X 가 취할 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고 이에 대응하는 확률은

$$P(X=0) = \frac{{}_3C_3}{{}_7C_3} = \frac{1}{35}$$

$$P(X=1) = \frac{{}_4C_1 \cdot {}_3C_2}{{}_7C_3} = \frac{12}{35}$$

$$P(X=2) = \frac{{}_4C_2 \cdot {}_3C_1}{{}_7C_3} = \frac{18}{35}$$

$$P(X=3) = \frac{{}_4C_3}{{}_7C_3} = \frac{4}{35}$$

이므로 X 의 확률분포는 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$	1

$$\therefore E(X) = \frac{1}{35}(0 \cdot 1 + 1 \cdot 12 + 2 \cdot 18 + 3 \cdot 4) = \frac{12}{7}$$

$$V(X) = \frac{1}{35}(0^2 \cdot 1 + 1^2 \cdot 12 + 2^2 \cdot 18 + 3^2 \cdot 4)$$

$$- \left(\frac{12}{7}\right)^2$$

$$= \frac{24}{7} - \frac{144}{49} = \frac{24}{49}$$

$$\therefore V(Y) = V(7X+1) = 7^2 V(X)$$

$$= 49 \cdot \frac{24}{49} = 24 \quad \text{답 ③}$$

295

6번의 시행 중 짝수가 a 번, 홀수가 b 번 나왔다고 하면

a	0	6	1	5	2	4	3
b	6	0	5	1	4	2	3
$X = (a-b)^2$	36	36	16	16	4	4	0

$$P(X=0) = {}_6C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{10}{32}$$

$$P(X=4) = 2 \cdot {}_6C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{15}{32}$$

$$P(X=16) = 2 \cdot {}_6C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{6}{32}$$

$$P(X=36) = 2 \cdot {}_6C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{32}$$

$$\therefore E(X) = 0 \times \frac{10}{32} + 4 \times \frac{15}{32} + 16 \times \frac{6}{32}$$

$$+ 36 \times \frac{1}{32}$$

$$= 6 \quad \text{답 ⑤}$$

296

확률변수 X 가 이항분포 $B\left(48, \frac{3}{4}\right)$ 을 따르므로

$$\sigma(X) = \sqrt{48 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4}} = 3$$

$$\therefore \sigma(3X-4) = |3| \sigma(X)$$

$$= 3 \times 3 = 9 \quad \text{답 9}$$

297

이항분포 $B\left(3, \frac{1}{4}\right)$ 에서 X 가 취할 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고 이에 대응하는 확률은 각각

$${}_3C_0 \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^3, {}_3C_1 \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$${}_3C_2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^1, {}_3C_3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^0$$

이므로 이것의 확률분포표는 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$	1

답 풀이 참조

298

$$(1) P(X=x) = {}_3C_x \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{3-x}$$

따라서 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(3, \frac{1}{3}\right)$ 을 따른다.

$$\therefore E(X) = 3 \times \frac{1}{3} = 1$$

$$(2) P(X=x) = {}_{100}C_x \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{100-x}$$

$$= {}_{100}C_x \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{100-x}$$

따라서 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(100, \frac{1}{2}\right)$ 을 따른다.

$$\therefore V(X) = 100 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 25$$

답 (1) 1 (2) 25

299

X 는 이항분포 $B(n, p)$ 를 따르므로

$$np = 15 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\sqrt{npq} = \frac{3\sqrt{5}}{2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{의 양변을 제곱하면 } npq = \frac{45}{4}$$

$$\text{여기에 } \textcircled{1} \text{을 대입하면 } 15q = \frac{45}{4} \quad \therefore q = \frac{3}{4}$$

$$\text{또, } p+q=1 \text{에서 } p = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } \frac{1}{4}n = 15 \quad \therefore n = 60$$

답 $n=60, p=\frac{1}{4}$

300

남편이 생존하는 사건과 부인이 생존하는 사건은 독립사건이므로 부부 모두가 30년 후까지 생존할 확률은

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

따라서 X 는 이항분포 $B(240, \frac{1}{12})$ 을 따른다.

$$\begin{aligned} \therefore E(X) &= 240 \times \frac{1}{12} \\ &= 20 \end{aligned}$$

답 20

301

이항분포를 $B(n, p)$ 라고 하면 확률변수 X 의 평균이 12, 분산이 4이므로

$$np = 12 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$np(1-p) = 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에서 $n=18, p=\frac{2}{3}$

따라서 $P(X=2)$ 의 값은

$$\begin{aligned} {}_{18}C_2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^{16} &= \frac{18 \cdot 17}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{16} \\ &= \frac{68}{3^{16}} \end{aligned}$$

답 ㉢

302

확률변수 X 는 이항분포 $B(8, \frac{1}{2})$ 을 따른다.

$$\begin{aligned} \therefore P(X \geq 1) &= 1 - P(X=0) \\ &= 1 - {}_8C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^8 \\ &= 1 - \frac{1}{256} = \frac{255}{256} \end{aligned}$$

답 $\frac{255}{256}$

303

5번의 시행에서 나온 빨간 공의 개수를 X 라고 하면

X 는 이항분포 $B(5, \frac{2}{5})$ 를 따른다.

$$\therefore E(X) = 5 \cdot \frac{2}{5} = 2$$

이때 받는 총 금액을 Y 라고 하면

$$Y = 100X + 200(5 - X)$$

$$= -100X + 1000$$

$$\therefore E(Y) = E(-100X + 1000)$$

$$= -100E(X) + 1000$$

$$= -100 \times 2 + 1000$$

$$= 800 \text{ (원)}$$

답 800원

304

검은 공이 나오는 횟수 X 는 0부터 n 까지의 정수이고 검은 공이 나올 확률 $p = \frac{x}{x+3}$ 이다.

따라서 X 는 이항분포 $B(n, \frac{x}{x+3})$ 를 따른다.

$$\therefore \text{평균 } E(X) = n \cdot \frac{x}{x+3} = 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\begin{aligned} \text{분산 } V(X) &= n \cdot \frac{x}{x+3} \cdot \left(1 - \frac{x}{x+3}\right) \\ &= 2.4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡} \end{aligned}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에서 $x=2, n=10$

답 $x=2, n=10$

305

(1) 9회의 독립시행 중 어느 사건이 매회 일어날 확률은 $\frac{1}{3}$ 이다. 즉,

$$P(X=r) = {}_9C_r \left(\frac{1}{3}\right)^r \left(\frac{2}{3}\right)^{9-r}$$

여기서 X 의 평균은

$$m = \sum_{r=0}^9 r \cdot {}_9C_r \left(\frac{1}{3}\right)^r \left(\frac{2}{3}\right)^{9-r}$$

따라서 X 는 이항분포 $B(9, \frac{1}{3})$ 을 따르므로

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^9 r \cdot {}_9C_r \left(\frac{1}{3}\right)^r \left(\frac{2}{3}\right)^{9-r} &= \sum_{r=0}^9 r \cdot P(X=r) \\ &= E(X) \\ &= 9 \times \frac{1}{3} = 3 \end{aligned}$$

(2) 100회의 독립시행 중 어느 사건이 매회 일어날 확률은 $\frac{1}{5}$ 이므로 X 는 이항분포 $B(100, \frac{1}{5})$ 을 따른다.

$$\begin{aligned} & \sum_{r=0}^{100} r^2 \cdot {}_{100}C_r \left(\frac{1}{5}\right)^r \left(\frac{4}{5}\right)^{100-r} \\ &= \sum_{r=0}^{100} r^2 \cdot P(X=r) \\ &= E(X^2) = V(X) + \{E(X)\}^2 \\ &= 100 \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} + \left(100 \times \frac{1}{5}\right)^2 = 416 \end{aligned}$$

답 (1) 3 (2) 416

306

표준편차 σ 는

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{10p(1-p)} = \sqrt{-10(p^2-p)} \\ &= \sqrt{-10\left(p-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}} \end{aligned}$$

따라서 $p = \frac{1}{2}$ 일 때, 표준편차가 최대이므로 이 때의 X 의 평균은

$$10p = 10 \times \frac{1}{2} = 5 \quad \text{답 5}$$

307

흰 공이 나올 확률은 $\frac{6}{a+6}$, 검은 공이 나올 확률은 $\frac{a}{a+6}$ 이고, 검은 공이 나오는 횟수 X 는 이항분포 $B\left(b, \frac{a}{a+6}\right)$ 를 따른다.

$$\therefore E(X) = b \times \frac{a}{a+6} = 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$V(X) = b \times \frac{a}{a+6} \times \frac{6}{a+6} = 1.2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } 2 \times \frac{6}{a+6} = 1.2 \quad \therefore a = 4$$

$$\textcircled{1} \text{에 } a = 4 \text{를 대입하면 } b = 5 \quad \text{답 } a = 4, b = 5$$

308

이 공장에서 생산된 1개의 퓨즈가 합격할 확률은 $\frac{9}{10}$ 이고, 불합격할 확률은 $\frac{1}{10}$ 이다. 임의로 뽑은 5개의 퓨즈 중에서 합격한 제품의 개수를 X 라고 하면 X 의 확률분포는 이항분포 $B\left(5, \frac{9}{10}\right)$ 를 따른다.

$$\begin{aligned} \text{즉, } P(X=x) &= {}_5C_x \left(\frac{9}{10}\right)^x \left(\frac{1}{10}\right)^{5-x} \\ &\quad (x=0, 1, 2, 3, 4, 5) \end{aligned}$$

여기서 4개 이상 합격할 확률은

$$\begin{aligned} P(X \geq 4) &= P(X=4) + P(X=5) \\ &= {}_5C_4 \left(\frac{9}{10}\right)^4 \left(\frac{1}{10}\right)^1 + {}_5C_5 \left(\frac{9}{10}\right)^5 \left(\frac{1}{10}\right)^0 \\ &= \frac{14 \cdot 9^4}{10^5} \end{aligned}$$

답 ④

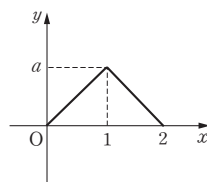
309

$y=f(x)$ 의 그래프를 그리면

$x=1$ 일 때, $f(x)=a$

$x=2$ 일 때, $f(x)=0$

이므로 오른쪽 그림과 같고 구간 $[0, 2]$ 에서의 전체의 넓이는 1이므로



$$2 \times a \times \frac{1}{2} = 1 \quad \therefore a = 1 \quad \text{답 1}$$

310

$f(x)$ 는 확률밀도함수이므로 $\int_2^4 f(x)dx = 1$

$$\text{즉, } \int_2^4 (kx-1)dx = 1 \text{이므로}$$

$$\left[\frac{k}{2}x^2 - x \right]_2^4 = 1$$

$$6k - 2 = 1 \quad \therefore k = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore P\left(2 \leq X \leq \frac{5}{2}\right) &= \int_2^{\frac{5}{2}} \left(\frac{1}{2}x - 1\right)dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^2 - x \right]_2^{\frac{5}{2}} \\ &= \frac{1}{16} \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{16}$

311

$E(X) = 6, E(X^2) = 100$ 이므로

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 \\ &= 100 - 36 = 64 \end{aligned}$$

$$\therefore \sigma(X) = \sqrt{64} = 8 \quad \text{답 8}$$

312

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 kx^2 dx = \left[\frac{1}{3} kx^3 \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3} k = 1 \quad \therefore k = 3$$

$$\therefore P(X \leq a) = \int_0^a 3x^2 dx = [x^3]_0^a$$

$$= a^3 = \frac{27}{64}$$

$$\therefore a = \frac{3}{4}$$

답 $\frac{3}{4}$

313

$$\int_0^1 f(x) dx = 1 \text{ 이므로}$$

$$\int_0^1 a(x - x^2) dx = a \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1$$

$$= \frac{a}{6} = 1$$

$$\therefore a = 6$$

$$\therefore E(X) = \int_0^1 xf(x) dx$$

$$= \int_0^1 6x(x - x^2) dx$$

$$= \left[2x^3 - \frac{3}{2}x^4 \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

314

$$E(X) = \int_0^2 xf(x) dx$$

$$= \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 x(2-x) dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_1^2 = 1$$

$$\therefore E(4X+3) = 4E(X) + 3$$

$$= 4 \cdot 1 + 3 = 7$$

답 7

315

$$P(0 \leq X \leq a) = \frac{1}{2} \text{ 이므로}$$

$$\frac{1}{2} \times a \times 1 = \frac{1}{2} \quad \therefore a = 1$$

확률밀도함수의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로 $P(0 \leq X \leq b) = 1$ 이고

$$P(a \leq X \leq b) = P(1 \leq X \leq b) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times (b-1) \times 1 = \frac{1}{2} \quad \therefore b = 2$$

$$\therefore a+b = 1+2 = 3$$

답 3

316

(1) 구간 $[0, 4]$ 에서의 전체 넓이는 1이므로

$$\frac{1}{2} \times 1 \times k + 1 \times k + \frac{1}{2} \times 2 \times k = 1$$

$$\therefore k = \frac{2}{5}$$

(2) $k = \frac{2}{5}$ 이므로 $[2, 4]$ 에서의 확률밀도함수는 두

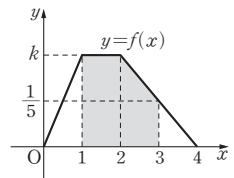
점 $(2, \frac{2}{5})$, $(4, 0)$ 을 지나는 직선이므로

$$y = \frac{\frac{2}{5} - 0}{2 - 4}(x - 4) \quad \therefore y = -\frac{1}{5}x + \frac{4}{5}$$

따라서 $x=3$ 일 때, y 의 값은 $\frac{1}{5}$ 이고

$P(1 \leq X \leq 3)$ 은

오른쪽 그림의 어두운 부분의 넓이이므로



$$P(1 \leq X \leq 3)$$

$$= 1 \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5} \right) \times 1 = \frac{7}{10}$$

$$\text{답 (1) } \frac{2}{5} \quad (2) \frac{7}{10}$$

317

$[-1, 1]$ 에서 정의된 함수 $y=f(x)$ 가 확률밀도함수가 되려면

(i) $f(x) \geq 0$ ($-1 \leq x \leq 1$)

(ii) 구간 $[-1, 1]$ 에서의 넓이가 1이어야 한다.

$$\textcircled{1} f(x) \geq 0, \text{ 넓이 : } \frac{1}{2} \times 1 \times 1 + \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = 1$$

$$\textcircled{2} f(x) \leq 0$$

③ $0 \leq x \leq 1$ 에서 $f(x) \leq 0$

④ 넓이 : 2

⑤ $-1 \leq x \leq 0$ 에서 $f(x) \leq 0$

답 ①

318

$$\int_0^b ax dx = 1 \text{에서 } \left[\frac{a}{2} x^2 \right]_0^b = 1$$

$$\therefore ab^2 = 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^b x \cdot ax dx = \left[\frac{1}{3} ax^3 \right]_0^b \\ &= \frac{ab^3}{3} = \frac{2}{3}b \quad (\because \textcircled{1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= \int_0^b x^2 \cdot ax dx - \left(\frac{2}{3}b \right)^2 \\ &= \left[\frac{a}{4} x^4 \right]_0^b - \frac{4}{9}b^2 = \frac{1}{18}b^2 = 2 \end{aligned}$$

그런데 $b > 0$ 이므로 $b = 6$, $a = \frac{1}{18}$

$$\begin{aligned} \therefore P(0 \leq X \leq 3) &= \int_0^3 \frac{1}{18} x dx \\ &= \left[\frac{x^2}{36} \right]_0^3 = \frac{1}{4} \end{aligned} \quad \text{답 } \frac{1}{4}$$

319

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{2}x + a & (-2 \leq x \leq 0) \\ -\frac{a}{2}x + a & (0 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

$y = f(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$$\int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot a = 1$$

$$\therefore a = \frac{1}{2}$$

또한, $y = f(x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이므로

$$E(X) = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore V(X) &= \int_{-2}^2 x^2 f(x) dx - 0^2 \\ &= \int_{-2}^0 \left(\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right) dx \\ &\quad + \int_0^2 \left(-\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{6}x^3 \right]_{-2}^0 \\ &\quad + \left[-\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{6}x^3 \right]_0^2 \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned} \quad \text{답 } \frac{2}{3}$$

320

$$\begin{aligned} (1) \int_{-a}^a f(x) dx &= \int_{-a}^a \left(1 - \frac{|x|}{a} \right) dx \\ &= 2 \int_0^a \left(1 - \frac{x}{a} \right) dx \\ &= 2 \left[x - \frac{x^2}{2a} \right]_0^a \\ &= a = 1 \end{aligned}$$

(2) $f(x) = 1 - |x|$ 이므로

$$\begin{aligned} E(X) &= m = \int_{-1}^1 xf(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 x(1 - |x|) dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= \int_{-1}^1 x^2 f(x) dx - m^2 \\ &= \int_{-1}^1 x^2(1 - |x|) dx \\ &= 2 \int_0^1 x^2(1 - x) dx \\ &= 2 \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) P\left(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2}\right) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) dx \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1 - |x|) dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - x) dx \\ &= 2 \left[x - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

답 (1) 1 (2) 평균 : 0, 분산 : $\frac{1}{6}$ (3) $\frac{3}{4}$

321

명중할 확률의 개수 X 는 이항분포 $B(100, \frac{4}{5})$ 를 따른다.

$$m = 100 \times \frac{4}{5} = 80, \sigma^2 = 100 \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} = 16$$

따라서 X 는 정규분포 $N(80, 4^2)$ 을 따른다.

$$X=70 \text{ 일 때, } Z = \frac{70-80}{4} = -2.5$$

$$\begin{aligned} \therefore P(X \geq 70) &= P(Z \geq -2.5) \\ &= 0.5 + P(0 \leq Z \leq 2.5) \\ &= 0.5 + 0.4938 \\ &= 0.9938 \end{aligned} \quad \text{답 } 0.9938$$

322

$Z = \frac{X-m}{\sigma}$ 의 값이 클수록 성적이 좋은 편이다.

$$\text{국어 : } \frac{65-50}{13} = \frac{15}{13}$$

$$\text{영어 : } \frac{82-64}{17} = \frac{18}{17}$$

$$\text{수학 : } \frac{75-62}{14} = \frac{13}{14}$$

$$\therefore \frac{15}{13} > \frac{18}{17} > \frac{13}{14}$$

따라서 가장 성적이 좋은 과목은 국어이다. 답 국어

323

주어진 식은 이항분포 $B(100, \frac{1}{5})$ 을 따르는 확률변수 X 의 $X=16$ 에서 $X=100$ 까지의 확률의 합이다.

$$E(X) = 100 \times \frac{1}{5} = 20$$

$$V(X) = 100 \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} = 4^2$$

$n=100$ 은 충분히 크므로 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(20, 4^2)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned} \therefore P(X \geq 16) &= P\left(Z \geq \frac{16-20}{4}\right) \\ &= P(Z \geq -1) \\ &= P(0 \leq Z \leq 1) + P(Z \geq 0) \\ &= 0.3413 + 0.5 \\ &= 0.8413 \end{aligned} \quad \text{답 } 0.8413$$

324

확률밀도함수 $f(x)$ 는

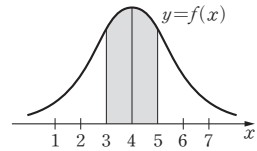
오른쪽 그림과 같이

직선 $x=4$ 에 대하여

대칭이므로

$$\int_3^5 f(x) dx \text{가 가장 크다.}$$

답 ③



325

ㄱ. A고등학교의 표준편차가 B고등학교보다 크므로 A고등학교에 성적이 우수한 학생이 더 많다.

(참)

ㄴ. A, B 두 고등학교의 평균은 같다. (거짓)

ㄷ. B고등학교의 표준편차가 C고등학교보다 작으므로 성적이 더 고른 편이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

326

주사위를 1회 던져서 1의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$ 이고

1의 눈이 나오는 횟수를 X 라고 하면 X 는 이항분

포 $B(720, \frac{1}{6})$ 을 따르므로

$$m = 720 \times \frac{1}{6} = 120$$

$$\sigma^2 = 720 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = 10^2$$

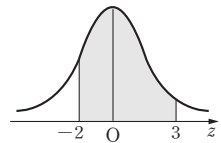
그런데 n 은 720으로 충분히 크다고 볼 수 있으므로 확률변수 X 는 정규분포 $N(120, 10^2)$ 을 따른다.

$$\therefore Z = \frac{100-120}{10} = -2$$

$$Z = \frac{150-120}{10} = 3 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} P(100 \leq X \leq 150) &= P(-2 \leq Z \leq 3) \\ &= P(-2 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 3) \\ &= P(0 \leq Z \leq 2) + P(0 \leq Z \leq 3) \\ &= 0.4772 + 0.4987 \\ &= 0.9759 \end{aligned}$$

답 0.9759



327

이차방정식 $x^2+ax+1=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지므로

$$D=a^2-4>0 \quad \therefore a>2 \text{ 또는 } a<-2$$

그런데 a 는 표준정규분포 $N(0, 1^2)$ 을 따르므로

$$\begin{aligned} P(a>2 \text{ 또는 } a<-2) &= P(|a|>2) \\ &= 1-P(|a|\leq 2) \\ &= 1-2\times 0.4772 \\ &= 0.0456 \end{aligned}$$

답 0.0456

328

(1) 확률변수 X 는 정규분포 $N(10, 5^2)$ 을 따르므로

$$X \text{를 } Z = \frac{X-10}{5} \text{으로 표준화하면}$$

$$\begin{aligned} P(20 \leq X \leq 25) \\ &= P\left(\frac{20-10}{5} \leq Z \leq \frac{25-10}{5}\right) \\ &= P(2 \leq Z \leq 3) \end{aligned}$$

또, 확률변수 Y 는 정규분포 $N(20, 7^2)$ 을 따르

므로 Y 를 $Z = \frac{Y-20}{7}$ 으로 표준화하면

$$\begin{aligned} P(34 \leq Y \leq k) \\ &= P\left(\frac{34-20}{7} \leq Z \leq \frac{k-20}{7}\right) \\ &= P\left(2 \leq Z \leq \frac{k-20}{7}\right) \end{aligned}$$

$$\text{즉, } P(2 \leq Z \leq 3) = P\left(2 \leq Z \leq \frac{k-20}{7}\right) \text{이므로}$$

$$\frac{k-20}{7} = 3 \quad \therefore k = 41$$

(2) 확률변수 X 는 정규분포 $N(5, 3^2)$ 을 따르므로

$$X \text{를 } Z = \frac{X-5}{3} \text{로 표준화하면}$$

$$P(X \geq k) = P\left(Z \geq \frac{k-5}{3}\right)$$

또, 확률변수 Y 는 정규분포 $N(16, 4^2)$ 을 따르

므로 Y 를 $Z = \frac{Y-16}{4}$ 으로 표준화하면

$$P(Y \leq -k) = P\left(Z \leq \frac{-k-16}{4}\right)$$

$$= P\left(Z \geq -\frac{-k-16}{4}\right)$$

$$\text{즉, } P\left(Z \geq \frac{k-5}{3}\right) = P\left(Z \geq -\frac{-k-16}{4}\right) \text{이므로}$$

$$\frac{k-5}{3} = -\frac{-k-16}{4}$$

$$4k-20=3k+48 \quad \therefore k=68$$

답 (1) 41 (2) 68

329

C회사 제품을 선택할 확률은 $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ 이므로 C회사

제품을 선택하는 고객의 수를 확률변수 X 라고 하면

X 는 이항분포 $B\left(192, \frac{1}{4}\right)$ 을 따른다.

따라서 평균과 분산은

$$m = 192 \times \frac{1}{4} = 48, \quad \sigma^2 = 192 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = 36$$

이때 192는 충분히 큰 수이므로 X 는 정규분포 $N(48, 6^2)$ 을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$P(X \geq 42) = P\left(Z \geq \frac{42-48}{6}\right) = P(Z \geq -1)$$

$$= 0.5 + P(0 \leq Z \leq 1)$$

$$= 0.5 + 0.3413$$

$$= 0.8413$$

답 0.8413

330

1600번의 시행 중 10점을 얻는 횟수를 X , 2점을 얻는 횟수를 Y 라고 하면

$$X+Y=1600 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

점수가 832점인 경우는

$$10X-2Y=832 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에서 $X=336, Y=1264$

10점을 얻는 횟수 X 는 이항분포 $B\left(1600, \frac{1}{5}\right)$ 을 따르므로

$$\text{평균 } m = 1600 \times \frac{1}{5} = 320$$

$$\text{분산 } \sigma^2 = 1600 \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} = 256$$

따라서 X 는 정규분포 $N(320, 16^2)$ 을 따른다.

$X=336$ 일 때, $Z = \frac{336-320}{16} = 1$ 이므로

$$\begin{aligned} P(X \geq 336) &= P(Z \geq 1) \\ &= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 0.5 - 0.34 \\ &= 0.16 \end{aligned}$$

답 0.16

331

$Z = \frac{X-30}{2}$ 으로 놓으면 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로 $P(27 \leq X \leq a) = 0.7745$ 에서

$$\begin{aligned} P\left(\frac{27-30}{2} \leq Z \leq \frac{a-30}{2}\right) &= P\left(-1.5 \leq Z \leq \frac{a-30}{2}\right) \\ &= P(-1.5 \leq Z \leq 0) + P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-30}{2}\right) \\ &= P(0 \leq Z \leq 1.5) + P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-30}{2}\right) \\ &= 0.4332 + P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-30}{2}\right) \\ &= 0.7745 \\ \therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-30}{2}\right) &= 0.3413 \end{aligned}$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413$ 이므로

$$\frac{a-30}{2} = 1 \quad \therefore a = 32 \quad \text{답 32}$$

332

X 가 확률변수이면 \bar{X} 도 확률변수이므로

$$E(\bar{X}) = 20, V(\bar{X}) = E(\bar{X}^2) - \{E(\bar{X})\}^2$$

이때 $V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{4^2}{8} = 2$ 이므로

$$E(\bar{X}^2) = 400 + 2 = 402 \quad \text{답 402}$$

333

신뢰구간의 길이 $2k \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 에서 $\sigma = 1$ 이므로

$2k \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$ 이 된다.

문제의 조건에 따라 $2k \cdot \frac{1}{\sqrt{4}} = 2$ 에서 $k = 2$

그러므로 신뢰구간의 길이가 1이 되려면

$$4 \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 \quad \therefore n = 16$$

따라서 필요한 표본의 크기는 16이다. 답 16

334

$m=30, \sigma=6, n=9$ 이므로 표본평균 \bar{X} 는 정규분포 $N(30, 2^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{\bar{X}-30}{2}$ 에서

$\bar{X}=26.08$ 일 때, $Z = -1.96$

$\bar{X}=33.3$ 일 때, $Z = 1.65$

$$\begin{aligned} \therefore P(26.08 \leq \bar{X} \leq 33.3) &= P(-1.96 \leq Z \leq 1.65) \\ &= P(0 \leq Z \leq 1.96) + P(0 \leq Z \leq 1.65) \\ &= 0.475 + 0.450 \\ &= 0.925 \end{aligned}$$

답 0.925

335

찬성자의 수를 X 라고 하면 X 는 $B(300, 0.75)$ 를 따르므로

$$\begin{aligned} m &= 300 \times 0.75 = 225 \\ \sigma &= \sqrt{300 \times 0.75 \times 0.25} = 7.5 \end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned} P(300 \times 0.7 \leq X \leq 300 \times 0.8) &= P(210 \leq X \leq 240) \end{aligned}$$

$X=210$ 일 때, $Z = \frac{210-225}{7.5} = -2$

$X=240$ 일 때, $Z = \frac{240-225}{7.5} = 2$

$$\therefore P(-2 \leq Z \leq 2) = 0.9544 \quad \text{답 0.9544}$$

336

모집단은 $N(67, 18^2)$ 을 따르고 $n=81$ 이므로

$$E(\bar{X}) = 67, \sigma(\bar{X}) = \frac{18}{\sqrt{81}} = 2$$

$$\therefore P(64 \leq \bar{X} \leq 71)$$

$$= P\left(\frac{64-67}{2} \leq Z \leq \frac{71-67}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
 &= P(-1.5 \leq Z \leq 2) \\
 &= P(0 \leq Z \leq 1.5) + P(0 \leq Z \leq 2) \\
 &= 0.43 + 0.48 \\
 &= 0.91
 \end{aligned}$$

답 0.91

337

신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는

$$\begin{aligned}
 &2 \times 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{에서} \\
 &2 \times 1.96 \times \frac{100}{\sqrt{n}} \leq 50 \\
 &\therefore n \geq 61.4656
 \end{aligned}$$

따라서 n 의 최소값은 62이다.

답 ④

338

X 는 이항분포 $B\left(5, \frac{2}{5}\right)$ 를 따르므로

$$\begin{aligned}
 E(X) &= 5 \times \frac{2}{5} = 2 \\
 V(X) &= 5 \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{5} \\
 V(X) &= E(X^2) - 2^2 \text{에서} \\
 E(X^2) &= \frac{26}{5} \\
 \therefore E(X^2 - 2X) &= E(X^2) - 2E(X) \\
 &= \frac{26}{5} - 4 \\
 &= \frac{6}{5}
 \end{aligned}$$

답 $\frac{6}{5}$

339

신뢰도 95 %일 때, 모평균의 신뢰구간의 길이는

$$2 \times 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

신뢰도 99 %일 때, 모평균의 신뢰구간의 길이는

$$2 \times 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

따라서 신뢰구간의 길이가 길어지려면 신뢰도는 커지고 표본의 크기 n 은 작아져야 한다.

답 ②

340

\bar{X} 는 $N\left(9.27, \left(\frac{4}{\sqrt{64}}\right)^2\right)$, 즉 $N\left(9.27, \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$ 을 따르므로

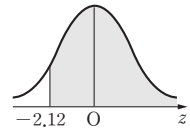
$$\begin{aligned}
 P(\bar{X} \geq c) &= P\left(Z \geq \frac{c-9.27}{\frac{1}{2}}\right) \\
 &\leq 0.9830
 \end{aligned}$$

$$\frac{c-9.27}{\frac{1}{2}} \geq -2.12$$

$$c-9.27 \geq -1.06$$

$$\therefore c \geq 8.21$$

따라서 c 의 최소값은 8.21이다.



답 8.21

341

$V(X) = 4$ 에서 $\sigma = 2$

$|\bar{X} - m| \leq \frac{1}{2}$ 에서 $Z = \frac{\bar{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ 이라고 하면

$$\left|Z \cdot \frac{2}{\sqrt{n}}\right| \leq \frac{1}{2}$$

$$\therefore |Z| \leq \frac{\sqrt{n}}{4}$$

그런데 $P(|Z| \leq 1.96) = 0.95$ 이므로

$|\bar{X} - m| \leq \frac{1}{2}$ 일 확률이 95 % 이상이 되게 하려면

$$\frac{\sqrt{n}}{4} \geq 1.96$$

$$\therefore n \geq 61.4656$$

따라서 n 을 62 이상으로 하여야 한다.

답 62 이상

342

신뢰구간의 길이가 200 이하이므로

$$2 \times 1.96 \times \frac{350}{\sqrt{n}} \leq 200$$

$$\sqrt{n} \geq 6.86$$

$$\therefore n \geq 47. \times \times \times$$

따라서 표본의 크기를 48 이상으로 하면 된다.

답 48 이상

343

모집단은 정규분포 $N(1400, 100^2)$ 을 따르므로

표본평균 \bar{X} 의 분포는 $N\left(1400, \left(\frac{100}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$ 을 따른다.

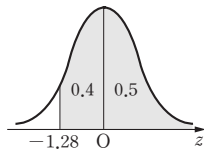
$$\begin{aligned} P\left(\bar{X} \geq 1350 + \frac{165}{\sqrt{n}}\right) &= P\left(Z \geq \frac{-50 + \frac{165}{\sqrt{n}}}{\frac{100}{\sqrt{n}}}\right) \\ &= P\left(Z \geq 1.65 - \frac{\sqrt{n}}{2}\right) \\ &\geq 0.90 \end{aligned}$$

$$1.65 - \frac{\sqrt{n}}{2} \leq -1.28$$

$$\sqrt{n} \geq 5.86$$

$$\therefore n \geq 5.86^2 = 34.3396$$

따라서 n 의 최솟값은 35이다.



답 35

I. 함수의 극한과 연속

1

$x \rightarrow 2$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\begin{aligned} \text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - b) &= 0, \quad 4 - b = 0 \quad \therefore b = 4 \\ \therefore (\text{주어진 식}) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - (a+2)x + 2a}{x^2 - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-a)}{(x-2)(x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-a}{x+2} \\ &= \frac{2-a}{2+2} = 3 \\ \therefore a &= -10 \quad \therefore a+b = -6 \end{aligned}$$

답 ①

2

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x+3} - 2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)(\sqrt{x+3} + 2)}{(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+3} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)(\sqrt{x+3} + 2)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x+1)(\sqrt{x+3} + 2) \\ &= 8 \end{aligned}$$

답 ②

3

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{8(x^4 - 1)}{(x^2 - 1)f(x)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{8(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)f(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{8(x^2 + 1)}{f(x)} \\ &= \frac{16}{f(1)} = 1 \\ \therefore f(1) &= 16 \end{aligned}$$

답 16

4

함수 $f(x)$ 가 $x=3$ 에서 연속이어야 하므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} f(x) &= f(3) \\ \lim_{x \rightarrow 3} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+4)}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} (x+4) = 7 \\ \therefore a &= f(3) = 7 \end{aligned}$$

답 ②

5

점 P의 x 좌표를 t 라고 하면 $-1 < t < 0$ 이고
점 P의 좌표는 $(t, t^2 + t)$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{AP} &= \sqrt{(t+1)^2 + t^2(t+1)^2} \\ &= (t+1)\sqrt{t^2 + 1} \\ \overline{PO} &= \sqrt{t^2 + t^2(t+1)^2} \\ &= -t\sqrt{t^2 + 2t + 2} \end{aligned}$$

한편, $\angle APO = \theta$ 라고 하면 $\overline{AO} = 1$ 이므로
제이 코사인법칙의 변형 공식에 의하여

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\overline{AP}^2 + \overline{PO}^2 - \overline{AO}^2}{2\overline{AP} \cdot \overline{PO}} \\ &= \frac{2t(t^3 + 2t^2 + 2t + 1)}{-2t(t+1)\sqrt{t^2 + 1}\sqrt{t^2 + 2t + 2}} \end{aligned}$$

P \rightarrow O일 때 $t \rightarrow -0$ 이므로

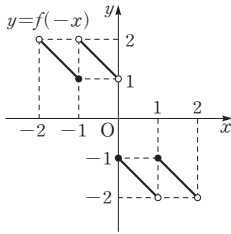
$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -0} \cos \theta &= \lim_{t \rightarrow -0} \frac{t^3 + 2t^2 + 2t + 1}{-(t+1)\sqrt{t^2 + 1}\sqrt{t^2 + 2t + 2}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \therefore \theta &= 135^\circ \end{aligned}$$

답 ③

6

\neg , $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 1$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 는 존재하지 않는다. (거짓)

ㄴ. $y=f(-x)$ 의 그래프는 $y=f(x)$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



$$\therefore \lim_{x \rightarrow +0} g(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \{f(x) + f(-x)\} = 1 + (-1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} g(x) = \lim_{x \rightarrow -0} \{f(x) + f(-x)\} = -1 + 1 = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0 \quad (\text{참})$$

ㄷ. $g(1) = f(1) + f(-1) = 1 + (-1) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \{f(x) + f(-x)\} = 1 + (-1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \{f(x) + f(-x)\} = 2 + (-2) = 0$$

$g(1) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0$ 이므로 함수 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

7

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2|x-b|^{n+1} + 1}{|x-b|^{n+1}} \text{에서}$$

(i) $|x-b| < 1$, 즉 $b-1 < x < b+1$ 일 때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x-b|^n = 0 \text{이므로}$$

$$g(x) = \frac{0+1}{0+1} = 1$$

(ii) $|x-b| > 1$, 즉 $x < b-1$ 또는 $x > b+1$ 일 때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x-b|^n = \infty \text{이므로}$$

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{|x-b|^n}}{1 + \frac{1}{|x-b|^n}} = 2$$

(iii) $|x-b| = 1$, 즉 $x = b \pm 1$ 일 때

$$g(x) = \frac{2+1}{1+1} = \frac{3}{2}$$

(i), (ii), (iii)에서

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & (b-1 < x < b+1) \\ \frac{3}{2}f(x) & (x = b \pm 1) \\ 2f(x) & (x < b-1, x > b+1) \end{cases}$$

그런데 $h(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow b+1-0} h(x) = \lim_{x \rightarrow b+1+0} h(x) = h(b+1)$$

$$\lim_{x \rightarrow b-1-0} h(x) = \lim_{x \rightarrow b-1+0} h(x) = h(b-1)$$

이 성립해야 한다. 즉,

$$f(b+1) = 2f(b+1) = \frac{3}{2}f(b+1)$$

$$2f(b-1) = f(b-1) = \frac{3}{2}f(b-1)$$

이때 $f(b+1) = f(b-1) = 0$ 이므로 $b+1$, $b-1$ 은 $f(x) = 0$ 의 두 근이다.

$f(x) = x^2 - 4x + a$ 에서

$$(b+1) + (b-1) = 4, (b+1)(b-1) = a$$

따라서 $a = 3$, $b = 2$ 이므로 $a + b = 5$

답 ③

8

함수 $f(x)$ 는 $0 \leq x \leq 3$ 에서 연속이므로 함수 $g(x)$ 가 구간 $[0, 5]$ 에서 연속이려면 $x=3$ 과 $3 < x \leq 5$ 에서 연속이어야 한다.

$$\neg. \lim_{x \rightarrow 3-0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3-0} \{f(x)\}^2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3+0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3+0} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 1-0} f(t) = 2$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$ 가 존재하지 않으므로 함수 $g(x)$ 는 $x=3$ 에서 불연속이다.

$$\neg. \lim_{x \rightarrow 3-0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3-0} \{f(x)\}^2 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 3+0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3+0} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 2-0} f(t) = 4$$

$$g(3) = \{f(3)\}^2 = 4$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = g(3)$ 이므로 함수 $g(x)$ 는 $x=3$ 에서 연속이다.

$$\lim_{x \rightarrow 4-0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 4-0} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow +0} f(t) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 4+0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 4+0} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 1+0} f(t) = 3$$

$$\text{또, } g(4) = f(f(4)) = f(0) = 3$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 4} g(x) = g(4)$ 이므로 함수 $g(x)$ 는 $x=4$

에서 연속이고 연속함수 성질에 의하여 구간 $[0, 5]$ 에서 연속이다.

$$\begin{aligned} \text{ㄷ. } \lim_{x \rightarrow 4-0} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 4-0} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow +0} f(t) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 4+0} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 4+0} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow -1+0} f(t) = 3 \end{aligned}$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 4} g(x)$ 가 존재하지 않으므로 함수 $g(x)$ 는 $x=4$ 에서 불연속이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

9

$x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\begin{aligned} \text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x^2+a}-b) &= 0 \text{이므로} \\ \sqrt{4+a}-b &= 0 \quad \therefore b = \sqrt{4+a} \quad \dots\dots \textcircled{㉠} \\ \therefore (\text{주어진 식}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+a}-\sqrt{4+a}}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{4+a})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+a}+\sqrt{4+a}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{4+a}+\sqrt{4+a}} = \frac{2}{\sqrt{4+a}+5} \\ \sqrt{4+a} &= 5 \\ \therefore a &= 21, b = 5 \quad (\because \textcircled{㉠}) \\ \therefore a+b &= 21+5=26 \end{aligned}$$

답 26

10

함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속일 조건은

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

(i) $F(x) = xg_1(x)$ 라고 하면

$$F(x) = \begin{cases} |x| & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = F(0) = 0$ 이므로 $F(x) = xg_1(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

$$\therefore a_1 = N(g_1) = 1$$

(ii) $G(x) = xg_2(x)$ 라고 하면

$$G(x) = \begin{cases} -x^3+x & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} G(x) = G(0) = 0$ 이므로 $G(x) = xg_2(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

$$\therefore a_2 = N(g_2) = 1$$

(iii) $H(x) = xg_3(x)$ 라고 하면

$$H(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} H(x)$ 는 존재하지 않으므로 $H(x) = xg_3(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다.

$H(x) = x^2g_3(x)$ 라고 하면

$$H(x) = \begin{cases} 1 & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} H(x) = 1 \neq 0 = H(0)$ 이므로

$H(x) = x^2g_3(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다.

$H(x) = x^3g_3(x)$ 라고 하면

$$H(x) = \begin{cases} x & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} H(x) = H(0) = 0$ 이므로 $H(x) = x^3g_3(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

$$\therefore a_3 = N(g_3) = 3$$

(i), (ii), (iii)에서 $a_1 = a_2 < a_3$ 답 ①

11

$x = -t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x-x}} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-t+1}{\sqrt{t^2-t+t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-1+\frac{1}{t}}{\sqrt{1-\frac{1}{t}+1}} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

답 ②

12

$f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이라면 $x=1$ 과

$x=-1$ 에서 연속이어야 한다.

$\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-0} f(x)$ 이므로

$$0 = -1 + a + b \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

또, $\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-0} f(x)$ 이므로

$$-1 - a + b = 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

①, ②에서 $a = -1, b = 2$

$$\therefore a - b = -3$$

답 ①

13

$f(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이려면

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = f(2)$$

가 되어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+0} (x^2 + x + a) = 6 + a$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-0} (x + b) = 2 + b$$

즉, $6 + a = 2 + b$

$$\therefore a - b = -4$$

답 -4

14

$x \rightarrow -3$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow -3} (\sqrt{x^2 - x - 3} + ax) = 0$ 이므로

$$3 - 3a = 0 \quad \therefore a = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x^2 - x - 3} + ax}{x + 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x^2 - x - 3} + x}{x + 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x^2 - x - 3) - x^2}{(x + 3)(\sqrt{x^2 - x - 3} - x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{-1}{\sqrt{x^2 - x - 3} - x}$$

$$= -\frac{1}{6}$$

$$\therefore b = -\frac{1}{6} \quad \therefore a + b = \frac{5}{6}$$

답 ⑤

15

$f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \quad (a, b, c \text{는 상수})$$

라고 하면

$$f(0) = 0 \text{이므로 } c = 0$$

$$f(-1) = 2 \text{이므로}$$

$$-1 + a - b = 2$$

$$\therefore a - b = 3 \quad \dots\dots ㉠$$

$$f(1) = -2 \text{이므로}$$

$$1 + a + b = -2$$

$$\therefore a + b = -3 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $a = 0, b = -3$

$$\therefore f(x) = x^3 - 3x$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 3x}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 3) = -3 \quad \text{답 ③}$$

16

$f(x) + x - 1 = (x - 1)g(x)$ 에서

$$f(x) = (x - 1)\{g(x) - 1\} \quad \dots\dots ㉠$$

한편, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - 2x}{x - 1}$ 에서 극한값이 존재하고

$x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} \{g(x) - 2x\} = 0$ 이므로 $g(1) = 2 \quad \dots\dots ㉡$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)g(x)}{x^2 - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)\{g(x) - 1\}g(x)}{(x - 1)(x + 1)} \quad (\because ㉠)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)\{g(x) - 1\}}{x + 1}$$

$$= \frac{g(1)\{g(1) - 1\}}{2} = 1 \quad (\because ㉡) \quad \text{답 1}$$

17

$\triangle OAB$ 에서 내접원의 중심을 I 라고 하면 내접원의 반지름의 길이가 r 이므로

$$\triangle OAB = \triangle AIO + \triangle OIB + \triangle BIA$$

에서

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}xr + \frac{1}{2}r\sqrt{1+x^2}$$

$$\frac{r}{x} = \frac{1}{1+x+\sqrt{1+x^2}}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{r}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2} \quad \text{답 ⑤}$$

18

$-\log_5 x = \log_{\frac{1}{5}} x$ 이므로 정수 n 에 대하여

$\log_{\frac{1}{5}} x = n$ 인 x 에서 $f(x)$ 는 불연속이다.

$$\log_{\frac{1}{5}} x = 1 \text{ 일 때, } x = \frac{1}{5}$$

$$\log_{\frac{1}{5}} x = 2 \text{ 일 때, } x = \left(\frac{1}{5}\right)^2$$

⋮

이므로 불연속인 점의 x 좌표의 합은

$$\begin{aligned} & \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^3 + \cdots \\ &= \frac{\frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

답 ①

19

$f(x+4)=f(x)$ 에서 $f(4)=f(0)$ 이므로

$$16 + 4a + b = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

또, $x=1$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = f(1)$$

$$\therefore 1 + a + b = 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

①, ②에서

$$a = -6, b = 8$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} 3x & (0 \leq x < 1) \\ x^2 - 6x + 8 & (1 \leq x \leq 4) \end{cases}$$

$$\therefore f(10) = f(2) = 0$$

답 0

20

$$\neg. f(-3) = \frac{(-3)^2}{2 \cdot (-3) - |-3|} = -1 \text{ (거짓)}$$

$$\neg. x > 0 \text{ 일 때, } f(x) = \frac{x^2}{2x - x} = x \text{ (참)}$$

$$\neg. f(x) = \begin{cases} x & (x > 0) \\ a & (x = 0) \\ \frac{x}{3} & (x < 0) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{x}{3} = 0$$

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \text{ 이고 } f(0) = a \text{ 이므로}$$

$x=0$ 에서 연속하려면 $a=0$ 이면 된다. (참)

따라서 옳은 것은 \neg, \neg 이다.

답 ⑤

21

$$\begin{aligned} \neg. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\{f(x)\}^2}{f(x^2)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(4|x|)^2}{4|x^2|} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{16x^2}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 4 = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\{f(x)\}^2}{f(x^2)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x^2 + 2x)^2}{2x^4 + 2x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2(x+1)^2}{2x^2(x^2+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(x+1)^2}{x^2+1} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\{f(x)\}^2}{f(x^2)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(x + \frac{4}{x}\right)^2}{x^2 + \frac{4}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 8x^2 + 16}{x^4 + 4} = 4 \end{aligned}$$

따라서 극한값이 4인 것은 \neg, \neg 이다.

답 ③

22

$$\neg. \lim_{x \rightarrow +0} g(x) = -1 \text{ (거짓)}$$

$\neg. f(0) = a (a > 3)$ 라고 하면 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이므로

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = a$$

가 성립한다.

$g(x)$ 는 $a > 3$ 인 $x=a$ 에서 연속이므로 함수 $g(f(x))$ 는 $x=0$ 에서 연속이다. (참)

$\neg. \text{ 닫힌 구간 } [-3, 0] \text{에서 } 1 \leq f(x) \leq c (c > 3) \text{이고 구간 } 1 \leq x \leq c \text{에서 } g(x) \text{는 연속이므로 } g(f(x)) \text{는 구간 } [-3, 0] \text{에서 연속이다.}$

$$g(f(-3)) = g(1) = -\frac{1}{2} < 0$$

$$g(f(0)) = g(a) > 0$$

이므로 중간값의 정리에 의하여 구간 $[-3, 0]$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

즉, 방정식 $g(f(x)) = 0$ 은 닫힌 구간 $[-3, 3]$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. (참)

따라서 옳은 것은 \neg, \neg 이다.

답 ④

II. 다항함수의 미분법

23

$f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 4$ 에서

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 12x$$

그런데 $x=a$ 에서의 접선의 기울기가 4이므로

$$f'(a) = 4$$

$$4a^3 - 12a^2 + 12a = 4$$

$$a^3 - 3a^2 + 3a - 1 = 0, (a-1)^3 = 0$$

$$\therefore a = 1$$

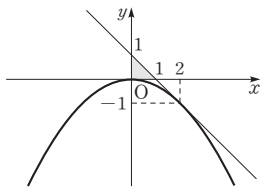
$$\therefore b = f(1) = 7$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 1^2 + 7^2 = 50$$

답 50

24

$f(x) = -\frac{1}{4}x^2$ 으로 놓으면 $f'(x) = -\frac{1}{2}x$



점 $(2, -1)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(2) = -1$

따라서 접선의 방정식은

$$y + 1 = -(x - 2) \quad \therefore y = -x + 1$$

또, 접선이 x 축과 만나는 점의 좌표는 $(1, 0)$, y 축과 만나는 점의 좌표는 $(0, 1)$ 이므로 구하는 삼각형의 넓이 S 는

$$S = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$$

답 ①

25

$f(x) = x^3 - 12x$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x+2)(x-2)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = -2$ 또는 $x = 2$

따라서 $x = -2$ 일 때, 극대이고 극댓값은

$$f(-2) = -8 + 24 = 16$$

$$\therefore a = -2, b = 16$$

$$\therefore a + b = 14$$

답 14

26

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{h} &= 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{2h} \\ &= 2f'(1) \end{aligned}$$

이때 $f'(x) = 4x^3 + 8x$ 이므로

$$2f'(1) = 2 \cdot 12 = 24$$

답 24

27

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x+1) - 8}{x^2 - 4} = 5$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때,

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$

즉, $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x+1) - 8] = 0 \quad \therefore f(3) = 8$

$x+1=t$ 라고 하면 $x \rightarrow 2$ 일 때, $t \rightarrow 3$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x+1) - 8}{x^2 - 4}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 3} \frac{f(t) - f(3)}{t^2 - 2t - 3} \quad \leftarrow f(3) = 8$$

$$= \lim_{t \rightarrow 3} \frac{f(t) - f(3)}{t - 3} \cdot \lim_{t \rightarrow 3} \frac{1}{t + 1}$$

$$= \frac{1}{4} f'(3) = 5$$

$$\therefore f'(3) = 20$$

$$\therefore f(3) + f'(3) = 8 + 20 = 28$$

답 28

28

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 2}{x - 3} = 1$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 3} \{f(x) - 2\} = 0$

즉, $f(3) - 2 = 0 \quad \therefore f(3) = 2$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 2}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} \\ &= f'(3) = 1 \end{aligned}$$

또, $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x) - 1}{x - 3} = 2$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 3} \{g(x) - 1\} = 0$

즉, $g(3) - 1 = 0 \quad \therefore g(3) = 1$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x) - 1}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x) - g(3)}{x - 3} \\ &= g'(3) = 2 \end{aligned}$$

$y = f(x)g(x)$ 에서 $y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

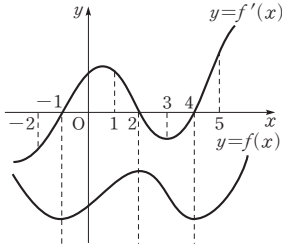
$$\therefore y'_{x=3} = f'(3)g(3) + f(3)g'(3)$$

$$= 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 5$$

답 5

29

미분가능한 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 $f'(x)>0$ 인 구간에서 증가하고 $f'(x)<0$ 인 구간에서 감소한다. 따라서 이러한 성질을 이용하여 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형을 그리면 다음 그림과 같다.



$y=f(x)$ 는 구간 $(-\infty, -1)$, $(2, 4)$ 에서 감소하고 구간 $(-1, 2)$, $(4, \infty)$ 에서 증가한다.

또한, $x=-1, 4$ 에서 극소이고 $x=2$ 에서 극대이다.

답 ③

30

$$f(x) = \log_9(5-x) + \log_3(x+4)$$

여기서 밑을 같게 정리하면

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \log_3(5-x) + \log_3(x+4) \\ &= \frac{1}{2} \{\log_3(5-x) + 2\log_3(x+4)\} \\ &= \frac{1}{2} \log_3(5-x)(x+4)^2 \end{aligned}$$

이때 진수 조건에 의하여

$$5-x>0, x+4>0 \quad \therefore -4<x<5$$

여기서 $g(x)=(5-x)(x+4)^2$ 으로 놓으면 $g(x)$ 가 최댓값을 가질 때, 함수 $f(x)$ 도 최댓값을 가지므로

$$\begin{aligned} g'(x) &= -(x+4)^2 + (5-x) \cdot 2(x+4) \\ &= (x+4)(-x-4+10-2x) \\ &= -3(x-2)(x+4) \end{aligned}$$

$g'(x)=0$ 에서 $x=-4$ 또는 $x=2$

x	-4	...	2	...	5
$g'(x)$	0	+	0	-	
$g(x)$		↗	108	↘	

$-4<x<5$ 에서 $g(x)$ 는 $x=2$ 에서 극대이며 최대이다.

$$g(2) = 3 \cdot 6^2 = 108$$

따라서 $f(x)$ 의 최댓값은

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \log_3 108 &= \frac{1}{2} \log_3 (3^3 \cdot 2^2) \\ &= \frac{1}{2} (3 + 2\log_3 2) \\ &= \frac{3}{2} + \log_3 2 \end{aligned}$$

답 ④

31

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 - 6(a+1)x + 6a \\ &= 6\{x^2 - (a+1)x + a\} \\ &= 6(x-a)(x-1) \end{aligned}$$

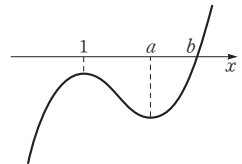
$f'(x)=0$ 에서 $x=a$ 또는 $x=1$

x	...	1	...	a	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	$f(1)$	↘	$f(a)$	↗

$f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극댓값, $x=a$ 에서 극솟값을 갖는다.

그런데 $f(1)=1-a<0$, $f(a)<0$ 이고 $f(b)=0$ 이므로 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.

$$\therefore a \leq b$$



답 ④

32

ㄱ. $x=1$ 에서 미분계수를 구해보면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2-1}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-0} (x+1) = 2 \end{aligned}$$

또한,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{2}{3} \cdot \frac{x^3-1}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{2}{3} (x^2+x+1) \\ &= 2 \end{aligned}$$

따라서 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하다. (참)

ㄴ. $x=0$ 에서 미분계수를 구해보면

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{|f(x)| - |f(0)|}{x-0} = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{(1-x)-1}{x} = -1$$

또한,

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{|f(x)| - |f(0)|}{x-0} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(1-x^2)-1}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} (-x) = 0$$

따라서 좌미분계수와 우미분계수가 다르므로 미분가능하지 않다. (거짓)

$$\begin{aligned} \text{ㄷ. } \lim_{x \rightarrow -0} \frac{x^k f(x) - 0 \cdot f(0)}{x-0} &= \lim_{x \rightarrow -0} \frac{x^k - x^{k+1}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -0} (x^{k-1} - x^k) \end{aligned}$$

이때 $k=1$ 이면 1, $k \geq 2$ 이면 0

또한,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^k f(x) - 0 \cdot f(0)}{x-0} &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^{k+2} - x^k}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} (x^{k+1} - x^{k-1}) \end{aligned}$$

이때 $k=1$ 이면 -1 , $k \geq 2$ 이면 0

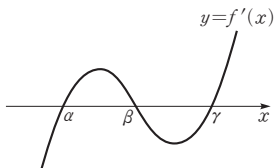
따라서 $x^k f(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하도록 하는 최소의 자연수 k 는 2이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

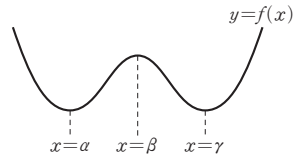
33

ㄱ. $f'(x)=0$ 은 최고차항의 계수가 양수인 삼차방정식이고, 서로 다른 세 실근 α, β, γ ($\alpha < \beta < \gamma$)를 가지므로 $y=f'(x)$ 의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



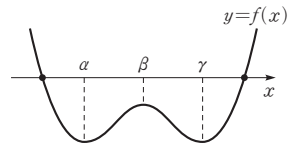
이때 $x=\beta$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $f(x)$ 는 $x=\beta$ 에서 극댓값을 갖는다. (참)

ㄴ. 사차함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.

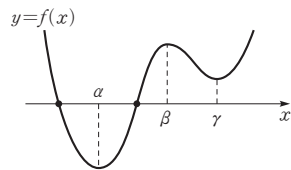


이때 $f(\alpha)f(\beta)f(\gamma) < 0$ 인 경우는 다음과 같이 3가지 경우가 있다.

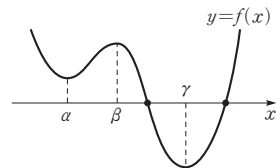
(i) $f(\alpha) < 0, f(\beta) < 0, f(\gamma) < 0$ 인 경우



(ii) $f(\alpha) < 0, f(\beta) > 0, f(\gamma) > 0$ 인 경우



(iii) $f(\alpha) > 0, f(\beta) > 0, f(\gamma) < 0$ 인 경우



3가지 경우 모두 x 축과 두 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)

ㄷ. ㄴ의 (iii)의 경우에서 $f(\alpha) > 0$ 이면 방정식

$f(x)=0$ 은 β 보다 큰 실근을 갖는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

34

$\frac{1}{3}x^3 - x = k$ 에서 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ 로 놓으면

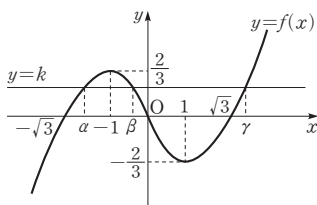
$$f'(x) = x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

$x=-1$ 에서 극댓값 $f(-1) = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$

$x=1$ 에서 극솟값 $f(1) = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$

따라서 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



방정식 $\frac{1}{3}x^3 - x = k$ 가 서로 다른 세 실근을 가지므로 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 의 교점의 개수가 3개 이어야 하므로 $-\frac{2}{3} < k < \frac{2}{3}$ 이다.

그런데 $y=f(x)$ 의 그래프는 원점에 대칭이므로 $-\frac{2}{3} < k \leq 0$ 인 경우와 $0 \leq k < \frac{2}{3}$ 인 경우가 같다.

따라서 $0 \leq k < \frac{2}{3}$ 인 경우만 생각하자.

이때 $0 \leq k < \frac{2}{3}$ 에서 세 실근을 $\alpha < \beta < \gamma$ 라고 하면

$$\alpha < \beta < 0, \gamma > 0$$

이고 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \text{이므로 } \gamma = -\alpha - \beta$$

$$\therefore |\alpha| + |\beta| + |\gamma| = -\alpha - \beta + \gamma = 2\gamma$$

한편, $0 \leq k < \frac{2}{3}$ 에서 $\gamma \geq \sqrt{3}$ 이므로

$$|\alpha| + |\beta| + |\gamma| = 2\gamma \geq 2\sqrt{3}$$

따라서 최솟값 m 은 $m = 2\sqrt{3}$ $\therefore m^2 = 12$

답 12

35

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^m} = 1$ 에서 $f(x)$ 의 최고차항은 x^m 이고,

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{x^{m-1}} = a$ 에서 $m = a$ 이다.

또, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = b$ 에서 $f(x)$ 의 가장 낮은 항은 bx^n 이고

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x^{n-1}} = 9$ 에서 $bn = 9$ 이다.

ㄱ. $f(x)$ 의 최고차항이 x^m 이고 차수가 가장 낮은 항이 bx^n 이므로 $m \geq n$ (참)

ㄴ. $m = a$, $bn = 9$ 이므로

$$ab = m \times \frac{9}{n} \geq 9 \text{ (참)}$$

ㄷ. $f(x)$ 가 삼차함수이면 $m = a = 3$, $bn = 9$ 이므로

$$am = bn \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

36

$$f(x) = x^3 + ax^2 + 9x + b \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + 9$$

$x = 1$ 에서 극댓값 0을 가지므로

$$f(1) = 0, f'(1) = 0$$

$$f(1) = 1 + a + 9 + b = 0$$

$$\therefore a + b = -10$$

$$f'(1) = 3 + 2a + 9 = 0, 2a = -12$$

$$\therefore a = -6, b = -4$$

$$\therefore ab = 24$$

답 24

37

$f(x+2) - f(2) = x^3 + 6x^2 + 14x$ 에서 양변을 x 로 나누면

$$\frac{f(x+2) - f(2)}{x} = x^2 + 6x + 14$$

이때 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+2) - f(2)}{x} = f'(2)$ 이므로

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 6x + 14) = 14$$

답 14

38

$F(x) = f(x)g(x)$ 로 놓으면

$$F'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

(가)에서

$$F(0) = f(0)g(0) = 1 \cdot 4 = 4$$

(나)에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x) - 4}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x}$$

$$= F'(0)$$

$$= f'(0)g(0) + f(0)g'(0)$$

$$0 = -6 \cdot 4 + 1 \cdot g'(0)$$

$$\therefore g'(0) = 24$$

답 24

39

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{(x-2)^2}$ 가 수렴하므로 삼차함수 $f(x)$ 는

$f(x) = a(x-b)(x-2)^2$ 의 꼴이고

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{(x-2)^2} = a(2-b) = 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$f(3) = 5 \text{이므로 } a(3-b) = 5 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } a=2, b=\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= (2x-1)(x-2)^2 \\ &= 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4 \end{aligned}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$$

$$\therefore f'(3) = 54 - 54 + 12 = 12 \quad \text{답 12}$$

40

두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 그래프가 오직 한 점에서 만나므로

$$x^4 - 4x + a = -x^2 + 2x - a$$

즉, $x^4 + x^2 - 6x + 2a = 0$ 의 근이 하나만 존재해야 한다.

$h(x) = x^4 + x^2 - 6x + 2a$ 로 놓으면

$$h'(x) = 4x^3 + 2x - 6 = 2(x-1)(2x^2 + 2x + 3)$$

$h(x)$ 는 $x=1$ 에서 극솟값을 갖는다.

$h(1)=0$ 이면 근이 1개만 존재하므로

$$h(1) = -4 + 2a = 0 \quad \therefore a = 2 \quad \text{답 ②}$$

41

시각 t 일 때의 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q 라고 하면

$$v_P = P'(t) = t^2 + 4, \quad v_Q = Q'(t) = 4t$$

두 점 P, Q의 속도가 같으므로

$$v_P = v_Q \text{에서 } t^2 + 4 = 4t$$

$$t^2 - 4t + 4 = 0 \quad \therefore t = 2$$

$t=2$ 일 때, 두 점 P, Q의 위치는 각각

$$P(2) = \frac{8}{3} + 8 - \frac{2}{3} = 10$$

$$Q(2) = 8 - 10 = -2$$

따라서 두 점 P, Q 사이의 거리는

$$10 - (-2) = 12 \quad \text{답 12}$$

42

$$f'(x) = 1 + 3x^2 + 5x^4, \quad g'(x) = 2x + 4x^3 + 6x^5$$

$$f'(1) = 9, \quad g'(1) = 12$$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - g(1-h)}{3h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1) - g(1-h) + g(1)}{3h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{2h} \cdot \frac{2}{3}$$

$$+ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1-h) - g(1)}{-h} \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \frac{2}{3} f'(1) + \frac{1}{3} g'(1)$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 9 + \frac{1}{3} \cdot 12 = 10 \quad \text{답 ⑤}$$

43

$0 < x < 1$ 일 때, $f(x) = 2x - 1$

$$x=1 \text{일 때, } f(x) = \frac{a+1}{2}$$

$$x > 1 \text{일 때, } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ax^b + \frac{2}{x^{n-1}} - \frac{1}{x^n}}{1 + \frac{1}{x^n}} = ax^b$$

$x=1$ 에서 미분가능하므로 $x=1$ 에서 연속이다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = f(1)$$

$$1 = a = \frac{a+1}{2} \quad \therefore a = 1$$

$0 < x < 1$ 일 때, $f'(x) = 2$

$x > 1$ 일 때, $f'(x) = abx^{b-1}$

$x=1$ 에서 미분가능하므로 $2 = ab$

이때 $a=1$ 이므로 $b=2$

$$\therefore a + 10b = 1 + 10 \cdot 2 = 21 \quad \text{답 21}$$

44

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x \text{에서}$$

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$$

$x=3$ 에서 극솟값을 가지므로

$$\text{극솟값은 } f(3) = -9$$

$$\therefore a=3, b=-9$$

점 $(2, f(2))$ 에서의 접선 l 의 방정식은

$$y=f'(2)(x-2)+f(2)$$

$$y=-3(x-2)-\frac{22}{3}$$

$$\therefore y=-3x-\frac{4}{3}$$

따라서 점 $(3, -9)$ 에서 직선 $9x+3y+4=0$ 사이의 거리 d 는

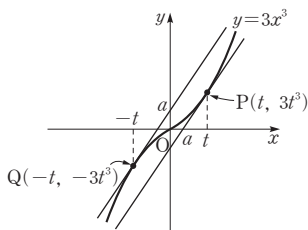
$$d=\frac{|9\cdot 3+3\cdot(-9)+4|}{\sqrt{9^2+3^2}}=\frac{4}{\sqrt{90}}$$

$$\therefore 90d^2=16$$

답 16

45

$f(x)=3x^3$ 으로 놓으면 $f'(x)=9x^2$



접점을 $(t, 3t^3)$ 이라고 하면 접점 $P(t, 3t^3)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y-3t^3=9t^2(x-t)$$

$$\therefore y=9t^2x-6t^3$$

이 직선이 점 $(a, 0)$ 을 지나므로

$$9t^2a-6t^3=0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

한편, $y=3x^3$ 은 기함수이므로 한 접선이 점 $P(t, 3t^3)$ 을 지난다면 이 접선에 평행한 다른 접선은 점 $Q(-t, -3t^3)$ 을 지나야 한다.

접점 $Q(-t, -3t^3)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y+3t^3=9t^2(x+t)$$

$$\therefore y=9t^2x+6t^3$$

이 직선이 점 $(0, a)$ 를 지나므로

$$a=6t^3 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{에서 } t=\frac{1}{3}, a=\frac{2}{9} (\because a>0)$$

$$\therefore 90a=90\cdot\frac{2}{9}=20$$

답 20

46

(가)에서 우함수 $f(-x)=f(x)$ 이므로

$$a=c=0$$

$$\text{즉, } f(x)=x^4+bx^2+6$$

$$\therefore f'(x)=4x^3+2bx=2x(2x^2+b)$$

(i) $b>0$ 일 때, $x=0$ 에서 극솟값을 갖고 $f(0)=6$ 이므로 (나)조건을 만족시키지 못한다.

(ii) $b<0$ 일 때, $f'(x)=0$ 에서

$$x=0 \text{ 또는 } x=\pm\sqrt{\frac{-b}{2}}$$

이때 $f(x)$ 는 $x=\sqrt{-\frac{b}{2}}$ 또는 $x=-\sqrt{-\frac{b}{2}}$ 에

서 극솟값을 가지므로

$$f\left(\pm\sqrt{-\frac{b}{2}}\right)=\frac{b^2}{4}-\frac{b^2}{2}+6=-10$$

$$\frac{b^2}{4}=16, b^2=64 \quad \therefore b=-8 (\because b<0)$$

따라서 $f(x)=x^4-8x^2+6$ 이므로

$$f(3)=81-8\cdot 9+6=15$$

답 15

47

두 정사각형이 겹치는

넓이를 $f(t)$ 라고 하면

오른쪽 그림에서

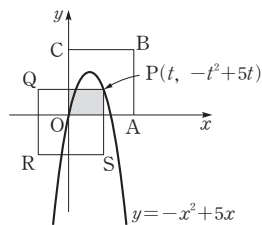
$$f(t)=t(-t^2+5t)$$

$$=-t^3+5t^2$$

$$(0<t<5)$$

$$f'(t)=-3t^2+10t=-3t\left(t-\frac{10}{3}\right)$$

$$f'(t)=0 \text{에서 } t=0 \text{ 또는 } t=\frac{10}{3}$$



t	(0)	...	$\frac{10}{3}$...
$f'(t)$	0	+	0	-
$f(t)$	0	\nearrow	$\frac{500}{27}$	\searrow

$f(t)$ 는 $t=\frac{10}{3}$ 에서 최댓값 $\frac{500}{27}$ 을 가지므로

$$p=27, q=500$$

$$\therefore p+q=527$$

답 527

48

$$\neg. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 0 \text{에서 } f'(1) = 0$$

$x=1$ 에서 미분가능하므로 $x=1$ 에서 연속이다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \text{ (참)}$$

$$\begin{aligned} \sqcup. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)+f(1)-f(1-h)}{h} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(1+h)-f(1)}{h} + \frac{f(1)-f(1-h)}{-h} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \\ &\quad + \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h)-f(1)}{-h} \end{aligned}$$

$= 0$ (참)

$\sqsubset. f(x) = |x-1|$ 일 때,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|1+h-1| - |1-h-1|}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h| - |-h|}{2h} = 0 \text{ (참)} \end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 \neg, \sqcup, \sqsubset 이다.

답 ⑤

49

공을 자유낙하시켜 공이 빗면과 충돌할 때를 그려보면 오른쪽 그림과 같다.

공의 중심과 바닥 사이의 거리를 h 라고 하면

$$h \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \text{에서 } h = 1$$

즉, 공의 중심과 바닥 사이의 거리는 1 m이므로

$$21 - 5t^2 = 1$$

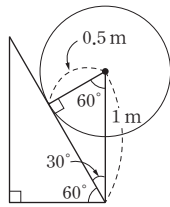
$$\therefore t = 2 (\because t > 0)$$

따라서 t 초 후의 공의 중심의 속도는 $h'(t) = -10t$

이므로 충돌하는 순간, 공의 속도는 $h'(2)$ 이므로

$$h'(2) = -20 \text{ (m/초)}$$

답 ①



III. 다항함수의 적분법

50

$f(x) = 6x^2 + 2ax$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 (6x^2 + 2ax) dx \\ &= \left[2x^3 + ax^2 \right]_0^1 \\ &= 2 + a \end{aligned}$$

$$f(1) = 6 + 2a$$

$$\int_0^1 f(x) dx = f(1) \text{에서}$$

$$2 + a = 6 + 2a$$

$$\therefore a = -4$$

답 ①

51

$$\int_1^x f(t) dt = x^3 - 2ax^2 + ax \quad \dots\dots \text{㉠}$$

㉠의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$0 = 1 - 2a + a$$

$$\therefore a = 1$$

㉠의 양변을 x 에 관하여 미분하면

$$f(x) = 3x^2 - 4ax + a$$

$$= 3x^2 - 4x + 1 (\because a = 1)$$

$$\therefore f(3) = 27 - 12 + 1 = 16$$

답 16

52

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(1 + \frac{2k}{n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(1 + \frac{2k}{n}\right) \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \int_1^3 f(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_1^3 (x^3 + x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{2} x^2 \right]_1^3 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{81}{4} + \frac{9}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 24 = 12 \end{aligned}$$

답 12

53

$f(x)=x^3$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동시키면

$$g(x)=(x-a)^3+b$$

또, $g(0)=-a^3+b=0$ 에서 $b=a^3$

$$\begin{aligned}\int_a^{3a} g(x)dx &= \int_a^{3a} \{(x-a)^3+b\}dx \\ &= \int_0^{2a} (x^3+b)dx \\ &= \int_0^{2a} f(x)dx + \int_0^{2a} bdx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_a^{3a} g(x)dx - \int_0^{2a} f(x)dx \\ &= \int_0^{2a} bdx = \left[bx \right]_0^{2a} \\ &= 2ab = 32\end{aligned}$$

$$\therefore ab = a^4 = 16$$

답 16

KEY point

그래프의 평행이동에 의하여

$$\int_a^b g(x)dx = \int_{a-c}^{b-c} g(x+c)dx$$

54

$n \rightarrow \infty$ 일 때 곡선

$$y = -x^2 + \frac{2}{n^2}$$

$y = -x^2$ 에 가까워진다.

따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은 두 곡선 $y = x^2 - 2$ 와 $y = -x^2$ 으

로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.

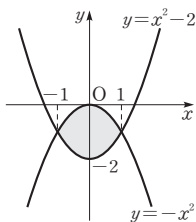
두 곡선의 교점의 x 좌표는

$$x^2 - 2 = -x^2 \text{에서 } x = \pm 1$$

이므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}& \int_{-1}^1 \{-x^2 - (x^2 - 2)\}dx \\ &= \int_{-1}^1 (-2x^2 + 2)dx \\ &= 2 \int_0^1 (-2x^2 + 2)dx \\ &= 2 \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2x \right]_0^1 = \frac{8}{3}\end{aligned}$$

답 ⑤



55

$$\begin{aligned}(\text{구하는 높이}) &= \int_0^{35} v(t)dt \\ &= \int_0^{20} tdt + \int_{20}^{35} (60 - 2t)dt \\ &= \left[\frac{1}{2}t^2 \right]_0^{20} + \left[60t - t^2 \right]_{20}^{35} \\ &= 200 + 60 \times 15 - (1225 - 400) \\ &= 275(\text{m})\end{aligned}$$

답 ③

56

3 km를 달리는 시간을 t (분)라고 하면

$$\begin{aligned}3 &= \int_0^t \left(\frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{2}t \right) dt \\ &= \left[\frac{t^3}{4} + \frac{t^2}{4} \right]_0^t \\ &= \frac{t^3}{4} + \frac{t^2}{4}\end{aligned}$$

$$t^3 + t^2 = 12, t^3 + t^2 - 12 = 0$$

$$(t-2)(t^2+3t+6)=0$$

$$\therefore t=2 (\because t>0)$$

즉, 처음 2분 동안 3 km를 가고 2분 후의 속력은

$$\begin{aligned}v(2) &= \frac{3}{4} \times 2^2 + \frac{1}{2} \times 2 \\ &= 3 + 1 = 4\end{aligned}$$

로 일정하다.

따라서 5분까지는 3분을 더 가야 하므로

$$3 + 4 \times 3 = 15(\text{km})$$

답 ③

57

$$\begin{aligned}& \sum_{k=1}^n \left\{ g\left(\frac{k}{n}\right) - g\left(\frac{k-1}{n}\right) \right\} \frac{k}{n} \\ &= \left\{ g\left(\frac{1}{n}\right) - g(0) \right\} \frac{1}{n} + \left\{ g\left(\frac{2}{n}\right) - g\left(\frac{1}{n}\right) \right\} \frac{2}{n} \\ &+ \left\{ g\left(\frac{3}{n}\right) - g\left(\frac{2}{n}\right) \right\} \frac{3}{n} + \cdots + \left\{ g\left(\frac{n}{n}\right) - g\left(\frac{n-1}{n}\right) \right\} \frac{n}{n} \\ &= g(1) - \left\{ g(0) + g\left(\frac{1}{n}\right) + g\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + g\left(\frac{n-1}{n}\right) \right\} \frac{1}{n} \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n}\end{aligned}$$

여기서 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 서로 역함수 관계이므로

(주어진 식)

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 - \sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n} \right\}$$

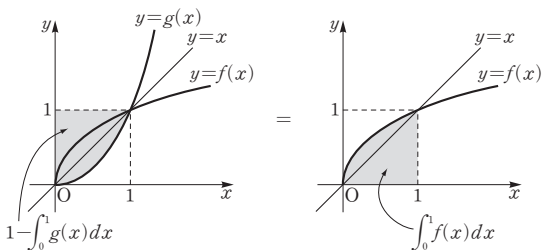
$$= 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n}$$

$$= 1 - \int_0^1 g(x) dx$$

$$= \int_0^1 f(x) dx$$

답 ③

참고 $1 - \int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 f(x) dx$ 인 이유



58

ㄱ. $\int_0^a |v(t)| dt = \int_a^d |v(t)| dt$ 이므로 $0 \leq t \leq a$ 일 때 점 P가 움직인 거리와 $a \leq t \leq d$ 일 때 점 P가 움직인 거리는 같다.

이때 $0 \leq t \leq a$ 동안은 수직선의 양의 방향으로 움직였다가 $a \leq t \leq c$ 동안은 수직선의 음의 방향으로 움직이고 $c \leq t \leq d$ 동안은 다시 양의 방향으로 움직인다.

따라서 $0 \leq t \leq a$ 동안 양의 방향으로 움직인 거리가 $a \leq t \leq c$ 동안 음의 방향으로 움직인 거리보다 길기 때문에 원점을 다시 지나지 않는다.

(거짓)

ㄴ. $\int_0^a |v(t)| dt = \int_a^d |v(t)| dt$ 이므로

$$\int_0^a v(t) dt = \int_c^d v(t) dt - \int_a^c v(t) dt$$

$$\int_0^a v(t) dt + \int_a^c v(t) dt = \int_c^d v(t) dt$$

$$\therefore \int_0^c v(t) dt = \int_c^d v(t) dt \text{ (참)}$$

ㄷ. $\int_0^c v(t) dt = \int_c^d v(t) dt$ 를 변형하면

$$\int_0^b v(t) dt + \int_b^c v(t) dt = \int_c^d v(t) dt$$

$$\therefore \int_0^b v(t) dt = - \int_b^c v(t) dt + \int_c^d v(t) dt$$

$$= \int_b^d |v(t)| dt \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

59

$f(x)$ 를 n 차 다항식이라고 하면 $f(f(x))$ 는 n^2 차 다항식, $\int_0^x f(t) dt$ 는 $(n+1)$ 차 다항식이 된다.

그런데 $n^2 = n+1$ 을 만족시키는 자연수 n 은 없으므로 $n < 2$ 이다. 즉, $f(x)$ 가 일차식이면 $\int_0^x f(t) dt$ 가 이차식이 되어 좌변은 일차식이고, 우변에서 x^2 을 소거할 수 있으므로 우변도 일차식이 나올 수 있다.

따라서 $f(x) = ax + b$ (a, b 는 상수)로 놓으면

$$f(f(x)) = a(ax+b) + b$$

$$= a^2x + ab + b$$

..... ㉠

$$\int_0^x f(t) dt - x^2 + 3x + 3$$

$$= \left[\frac{1}{2}at^2 + bt \right]_0^x - x^2 + 3x + 3$$

$$= \frac{1}{2}ax^2 + bx - x^2 + 3x + 3$$

$$= \left(\frac{1}{2}a - 1 \right) x^2 + (b+3)x + 3$$

..... ㉡

㉠=㉡에서

$$a^2x + ab + b = \left(\frac{1}{2}a - 1 \right) x^2 + (b+3)x + 3$$

양변의 계수를 비교하면

$$\frac{1}{2}a - 1 = 0, \quad a^2 = b + 3, \quad ab + b = 3$$

$$\therefore a = 2, \quad b = 1 \quad \therefore f(x) = 2x + 1$$

따라서 구하는 $f(x)$ 의 계수들의 합은 $2+1=3$

답 ①

60

$t=a$ 에서 $t=b$ 까지 움직일 때

위치의 변화량은 $\int_a^b v(t) dt$

실제로 움직인 거리는 $\int_a^b |v(t)| dt$

ㄱ. 1초 동안 멈추었다면 $v(t)=0$ 인 구간이 1초 동안 있어야 하므로 옳지 않다. (거짓)

ㄴ. $v(t)=0$ 이 되는 $t=2, 4$ 에서 $v(t)$ 의 부호가 바뀌었으므로 운동 방향이 2번 바뀌었다. (거짓)

ㄷ. 속도를 적분하면 위치를 구할 수 있으므로

$$\int_0^4 v(t)dt = 2 - 2 = 0$$

따라서 $t=4$ 인 순간의 점 P의 위치는 원점이다.

(참)

이상에서 옳은 것은 ㄷ이다.

답 ②

주의 1초가 되는 순간부터 속도가 줄어들 뿐 속도는 여전히 양이므로 방향이 바뀌는 것은 아니다.

61

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a (2x+3)dx \\ &= \int_{-a}^a 3dx = 2 \int_0^a 3dx \\ &= 2 \left[3x \right]_0^a = 6a = 6 \\ \therefore a &= 1 \end{aligned}$$

답 ②

62

(i) $0 \leq x < 1$ 일 때

$$\begin{aligned} y &= |x^2(x-1)| \\ &= -x^2(x-1) \end{aligned}$$

(ii) $1 \leq x < 2$ 일 때

$$\begin{aligned} y &= |x^2(x-1)| \\ &= x^2(x-1) \end{aligned}$$

$$\therefore \int_0^2 |x^2(x-1)| dx$$

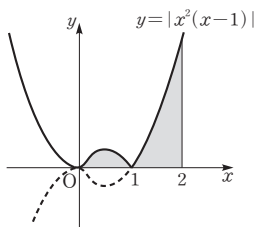
$$= \int_0^1 \{-x^2(x-1)\} dx + \int_1^2 x^2(x-1) dx$$

$$= \int_0^1 (-x^3 + x^2) dx + \int_1^2 (x^3 - x^2) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 + \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 \right]_1^2$$

$$= \frac{1}{12} + \frac{17}{12} = \frac{3}{2}$$

답 ①



63

$$\int_0^1 \{f(x) - 2x\} dx = 3 \text{에서}$$

$$\int_0^1 f(x) dx - \left[x^2 \right]_0^1 = 3$$

$$\therefore \int_0^1 f(x) dx = 4$$

$$\int_0^1 \{g(x) + 2x\} dx = 2 \text{에서}$$

$$\int_0^1 g(x) dx + \left[x^2 \right]_0^1 = 2$$

$$\therefore \int_0^1 g(x) dx = 1$$

$$\therefore \int_0^1 \{2f(x) - 3g(x) + 2x\} dx$$

$$= 2 \int_0^1 f(x) dx - 3 \int_0^1 g(x) dx + \left[x^2 \right]_0^1$$

$$= 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 + 1 = 6$$

답 6

64

$F'(x) = 6x^2 + 1$ 이라고 하면

$$S(h)$$

$$= \int_{1-h}^{1+h} (6x^2 + 1) dx$$

$$= \left[F(x) \right]_{1-h}^{1+h}$$

$$= F(1+h) - F(1-h)$$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(1+h) - F(1-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(1+h) - F(1) - \{F(1-h) - F(1)\}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(1+h) - F(1)}{h}$$

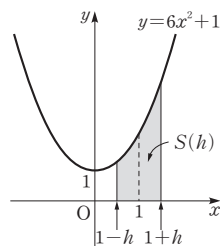
$$+ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(1-h) - F(1)}{-h}$$

$$= F'(1) + F'(1)$$

$$= 2F'(1)$$

$$= 2 \times 7 = 14$$

답 14



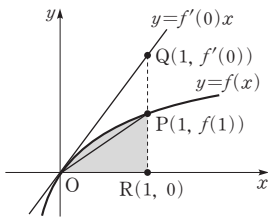
65

(나)에서 $0 < xf(y) < yf(x)$ 의 각 변을 xy 로 나누면

$$0 < \frac{f(y)}{y} < \frac{f(x)}{x}$$

즉, 원점 $(0, 0)$ 과 점 $(x, f(x))$ 를 지나는 직선의 기울기가 원점 $(0, 0)$ 과 점 $(y, f(y))$ 를 지나는 직선의 기울기보다 큰 것을 알 수 있다.

따라서 열린 구간 $(0, 1)$ 에서 함수 $y=f(x)$ 는 위로 볼록한 그래프를 가지고, $f(0)=0$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



위 그래프를 이용하여 세 수 A, B, C 를 식으로 표현해 보면

$$A=f'(0)=2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot f'(0)\right)=2(\triangle OQR \text{의 넓이})$$

$$B=f(1)=2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot f(1)\right)=2(\triangle OPR \text{의 넓이})$$

$$C=2\int_0^1 f(x)dx=2(\text{어두운 부분의 넓이})$$

따라서 세 넓이를 비교해 보면

$$B < C < A$$

답 ④

66

정사각형의 넓이가 1이므로

$$S_1 + S_2 + S_3 = 1 \quad \cdots \text{㉠}$$

또, 세 부분의 넓이가 차례로 등차수열을 이루므로

$$2S_2 = S_1 + S_3 \quad \cdots \text{㉡}$$

이때

$$S_1 = \int_0^1 \frac{1}{2}x^2 dx = \left[\frac{1}{6}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

이므로 ㉠, ㉡에 대입하면

$$S_2 + S_3 = \frac{5}{6}, \quad 2S_2 - S_3 = \frac{1}{6}$$

$$\therefore S_2 = \frac{1}{3}, \quad S_3 = \frac{1}{2}$$

한편, 직선 $y=1$ 과 곡선 $y=ax^2$ 의 교점의 x 좌표는

$$ax^2=1 \text{에서 } x=\frac{1}{\sqrt{a}} (\because x>0)$$

이고, $S_3=\frac{1}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} S_3 &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}} (1-ax^2)dx \\ &= \left[x - \frac{1}{3}ax^3\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{3}a \cdot \frac{1}{a\sqrt{a}} = \frac{2}{3\sqrt{a}} = \frac{1}{2} \\ \therefore a &= \frac{16}{9} \end{aligned}$$

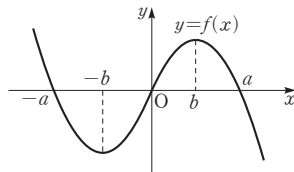
답 ①

67

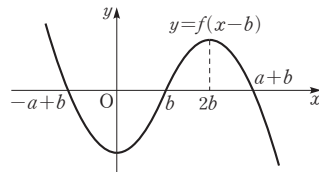
양수 a 에 대하여 삼차함수

$y=f(x)=-x(x+a)(x-a)$ 의 극댓점의 x 좌표가 b

이므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



또, $y=f(x-b)$ 의 그래프는 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



$$\int_{-b}^a f(x)dx = A,$$

$$\int_b^{a+b} f(x-b)dx = \int_0^a f(x)dx = B \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_{-b}^0 f(x)dx &= \int_{-b}^a f(x)dx - \int_0^a f(x)dx \\ &= A - B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-b}^a |f(x)|dx &= \int_{-b}^0 \{-f(x)\}dx + \int_0^a f(x)dx \\ &= -\int_{-b}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx \\ &= -(A-B) + B \\ &= -A + 2B \end{aligned}$$

답 ①

68

$$\begin{aligned}
 \text{ㄱ. } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n S_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{2n} \times f\left(\frac{k}{2n}\right) \right\} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{2n} \times \left(\frac{k}{2n}\right)^2 \right\} \\
 &= \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 dx \quad (\text{참}) \\
 \text{ㄴ. } \sum_{k=1}^n (S_{2k} - S_{2k-1}) \\
 &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{2n} f\left(\frac{2k}{2n}\right) - \frac{1}{2n} f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \right\} \\
 &= \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \left\{ \left(\frac{2k}{2n}\right)^2 - \left(\frac{2k-1}{2n}\right)^2 \right\} \\
 &= \frac{1}{8n^3} \sum_{k=1}^n (4k-1) \\
 &= \frac{1}{8n^3} \left[4 \times \frac{n(n+1)}{2} - n \right] = \frac{2n^2+n}{8n^3} \\
 \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (S_{2k} - S_{2k-1}) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+n}{8n^3} = 0 \quad (\text{참}) \\
 \text{ㄷ. } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n S_{2k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{2n} \times f\left(\frac{2k}{2n}\right) \right\} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{2n} \times \left(\frac{k}{n}\right)^2 \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 \frac{1}{n} \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 dx \quad (\text{참})
 \end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

69

다항함수 $f(x)$ 의 차수를 n 이라고 하면
조건 (가)에서 좌변은 $(n+1)$ 차, 우변은 $2n$ 차이므로

$$n+1=2n \quad \therefore n=1$$

따라서 $f(x)=ax+b$ ($a \neq 0$)라고 하면

조건 (나)에서

$$\int_{-1}^1 (ax+b)dx = 2 \int_0^1 bdx = 2b = 50$$

$$\therefore b=25$$

$$\therefore f(x)=ax+25$$

$$\therefore f(0)=25$$

답 25

70

두 점 $P(a, a^2)$, $Q(b, b^2)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-a^2 = \frac{b^2-a^2}{b-a}(x-a)$$

$$\therefore y=(a+b)x-ab$$

이 직선과 곡선 $y=x^2$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이가
36이므로

$$\begin{aligned}
 &\int_a^b \{(a+b)x-ab-x^2\}dx \\
 &= \left[\frac{a+b}{2}x^2 - abx - \frac{x^3}{3} \right]_a^b \\
 &= \frac{(b-a)^3}{6} \\
 &= 36
 \end{aligned}$$

$$\therefore b-a=6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

즉, $b=a+6$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \overline{PQ} &= \sqrt{(b-a)^2 + (b^2-a^2)^2} \\
 &= (b-a)\sqrt{1+(b+a)^2} \\
 &= 6\sqrt{1+(2a+6)^2} \quad (\because \textcircled{1}) \\
 &= 6\sqrt{4a^2+24a+37} \\
 \therefore \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\overline{PQ}}{a} &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{6\sqrt{4a^2+24a+37}}{a} = 12
 \end{aligned}$$

답 12

71

$$g(x) = \int_{-1}^x (t-1)f(t)dt \text{에서}$$

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= (x-1)f(x) \\
 &= \begin{cases} (x-1)(-1) & (x < 1) \\ (x-1)(-x+2) & (x > 1) \end{cases} \\
 &= \begin{cases} -(x-1) & (x < 1) \\ -(x-1)(x-2) & (x > 1) \end{cases}
 \end{aligned}$$

ㄱ. 구간 $(1, 2)$ 에서 $g'(x) = -(x-1)(x-2) > 0$

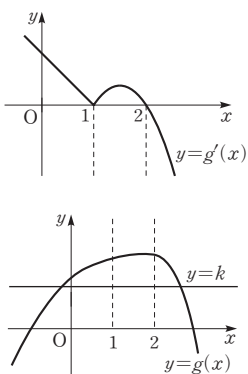
이므로 $g(x)$ 는 구간 $(1, 2)$ 에서 증가한다. (참)

$$\text{ㄴ. } \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \{-(x-1)\} = 0,$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1+0} \{-(x-1)(x-2)\} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

이므로 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하다. (참)

ㄷ. $y=g'(x)$ 의 그래프를 그려 보면 오른쪽 위의 그림과 같고, $g'(x)$ 의 부호에 따라 $y=g(x)$ 의 그래프를 그려 보면 오른쪽 아래의 그림과 같으므로 함수



$y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 는 서로 다른 세 점에서 만날 수 없다. 즉, 방정식 $g(x)=k$ 가 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수 k 는 존재하지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

IV. 확률

72

$$P(A^c) = 1 - P(A) = \frac{1}{3} \text{이므로}$$

$$P(A) = \frac{2}{3}$$

두 사건 A, B 가 서로 독립이므로

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{9} \end{aligned}$$

답 ④

73

$$P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{6} \text{에서}$$

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= \frac{1}{6} P(A) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

$$P(A \cap B) + P(A^c \cap B) = P(B) \text{이므로}$$

$$P(A^c \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \therefore P(A^c|B) &= \frac{P(A^c \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

답 ④

74

$\left(x + \frac{1}{x^3}\right)^4$ 의 전개식에서 일반항은

$${}_4C_r x^{4-r} \left(\frac{1}{x^3}\right)^r = {}_4C_r x^{4-4r} \quad (r=0, 1, 2, 3, 4)$$

$$\frac{1}{x^4} \text{항은 } 4 - 4r = -4$$

$$\therefore r=2$$

$$\text{따라서 } \frac{1}{x^4} \text{의 계수는 } {}_4C_2 = 6$$

답 ②

75

$(x-a)^5$ 의 전개식에서 일반항은

$${}_5C_r x^{5-r} (-a)^r (r=0, 1, 2, 3, 4, 5)$$

이때 x 의 계수는 $r=4$ 일 때이므로 $5a^4$

상수항은 $r=5$ 일 때이므로 $-a^5$

따라서 x 의 계수와 상수항의 합이 0이므로

$$5a^4 - a^5 = 0, a^4(5-a) = 0$$

$$\therefore a = 5 (\because a > 0)$$

답 ⑤

76

재직 연수가 10년 미만일 사건을 A , 조직 개편안에 찬성할 사건을 B 라고 하면

$$P(A) = \frac{120}{360}, P(B) = \frac{150}{360}$$

$$P(A \cap B) = \frac{a}{360}$$

그런데 두 사건 A, B 가 서로 독립이므로

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$\frac{a}{360} = \frac{120}{360} \times \frac{150}{360}$$

$$\therefore a = 50$$

답 50

77

2장의 카드를 꺼내는 방법의 수는 $5 \times 5 = 25$

꺼낸 2장의 카드에 적혀 있는 두 수의 합이 홀수인 경우는 (짝수, 홀수), (홀수, 짝수)일 때이므로 경우의 수는

$$2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 13$$

따라서 2장의 카드에 적혀 있는 두 수의 합이 홀수인 사건을 E , 주머니 A 에서 꺼낸 카드에 적혀 있는 수가 짝수인 사건을 A 라고 하면 구하는 확률은

$$P(A|E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{4}{25}}{\frac{13}{25}} = \frac{4}{13} \quad \text{답 ②}$$

78

네 사람을 키가 작은 순서대로 a, b, c, d 라고 할 때, 네 사람을 일렬로 나열하는 방법의 수는 $4! = 24$

이때 앞에서 세 번째 사람이 자신과 이웃한 두 사람보다 키가 작을 경우는

(i) a 가 세 번째에 있는 경우

나머지 세 명을 일렬로 나열하는 방법의 수와 같

$$\text{으므로 } 3! = 6$$

(ii) b 가 세 번째에 있는 경우

a, d, b, c 또는 a, c, b, d 의 2가지

따라서 구하는 확률은

$$\frac{6+2}{24} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

답 ①

79

3개의 동전을 동시에 던질 때, 나올 수 있는 경우의 수는 $2 \times 2 \times 2 = 8$

이때 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라고 하면

$$A = \{(T, T, T), (T, T, H), (T, H, T), (H, T, T)\}$$

$$B = \{(T, T, T), (H, H, H)\}$$

$$\neg. P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad (\text{참})$$

$$\neg. A \cap B = \{(T, T, T)\} \text{이므로}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{8} \quad (\text{참})$$

$$\neg. P(A \cap B) = \frac{1}{8} \text{이고 } P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{4}$$

이므로

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

따라서 두 사건 A, B 는 서로 독립이다. (참)

이상에서 옳은 것은 \neg, \neg, \neg 이다. 답 ⑤

다른풀이 앞면이 나오는 개수를 X 라 하고 독립시행의 확률을 이용하면

$$\neg. P(A) = P(X=0) + P(X=1)$$

$$= {}_3C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + {}_3C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad (\text{참})$$

$$\neg. A \cap B \text{는 앞면이 0개이므로}$$

$$P(A \cap B) = P(X=0)$$

$$= {}_3C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \quad (\text{참})$$

$$\neg. P(B) = P(X=0) + P(X=3)$$

$$= 2 \cdot {}_3C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}$$

$$\therefore P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

따라서 두 사건 A, B 는 서로 독립이다. (참)
 이상에서 옳은 것은 \neg, \cup, \cap 이다.

80

두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$$6 \times 6 = 36$$

이때 한 주사위의 눈의 수가 다른 주사위 눈의 수의 배수가 되는 경우의 수는

- (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)
 (2, 1), (2, 2), (2, 4), (2, 6)
 (3, 1), (3, 3), (3, 6)
 (4, 1), (4, 2), (4, 4)
 (5, 1), (5, 5)
 (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 6)

의 22가지

따라서 구하는 확률은

$$\frac{22}{36} = \frac{11}{18}$$

답 ③

81

m, n 은 주사위의 눈의 수이므로 m, n 의 순서쌍의 개수는

$$6 \times 6 = 36$$

$i^m \cdot (-i)^n = (-1)^n \cdot i^{m+n}$ 이므로 $i^m \cdot (-i)^n$ 의 값이 1이 되는 경우는 n 이 짝수이고 $m+n=4, 8, 12$ 또는 n 이 홀수이고 $m+n=2, 6, 10$ 일 때이다.

(i) n 이 짝수이고 $m+n=4, 8, 12$ 인 경우

만족시키는 m, n 의 순서쌍은 (2, 2), (6, 2), (4, 4), (2, 6), (6, 6)의 5가지

(ii) n 이 홀수이고 $m+n=2, 6, 10$ 인 경우

만족시키는 m, n 의 순서쌍은 (1, 1), (5, 1), (3, 3) (1, 5), (5, 5)의 5가지

따라서 구하는 확률은 $\frac{5+5}{36} = \frac{5}{18}$

$$\therefore p=18, q=5$$

$$\therefore p+q=23$$

답 23

82

첫 번째 시행에서 철수가 꺼낸 구슬과 영희가 꺼낸 구슬에 적혀 있는 수가 서로 같을 경우의 수는

$$(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)$$

의 5가지이므로 철수와 영희가 같은 공을 뽑을 확률은

$$\frac{5}{25} = \frac{1}{5} \text{이고 서로 다른 공을 뽑을 확률은}$$

$$1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

두 번째 시행에서 뽑은 공을 다시 넣지 않으므로 경우의 수는 16가지이고 첫 번째 시행에서 두 구슬에 적혀 있는 숫자가 서로 달랐으므로 A, B 두 주머니에 각각 남아 있는 4개씩의 공 중 같은 수가 적혀 있는 공은 3쌍이다. (만약 첫 번째 시행에서 철수가 1, 영희가 2를 뽑았다면 남아 있는 공은 4개이고 이 중 같은 공은 3쌍이다.)

따라서 두 번째 시행에서의 확률은

$$\frac{3}{16} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에서 구하는 확률은

$$\frac{4}{5} \times \frac{3}{16} = \frac{3}{20}$$

답 ①

83

다항식 $2(x+a)^n$ 의 전개식에서 일반항은

$${}_nC_r x^{n-r} a^r (r=0, 1, 2, \dots, n)$$

이때 x^{n-1} 항은 $r=1$ 일 때이므로 그 계수는

$${}_nC_1 a^1 = 2an$$

또, 다항식 $(x-1)(x+a)^n = x(x+a)^n - (x+a)^n$ 의 전개식에서 일반항은

$${}_nC_s x^{n-s+1} a^s - {}_nC_t x^{n-t} a^t (s, t=0, 1, 2, \dots, n)$$

이때 x^{n-1} 항은 $s=2, t=1$ 일 때이므로 그 계수는

$${}_nC_2 a^2 - {}_nC_1 a^1 = \frac{n(n-1)}{2} a^2 - an$$

여기서 $2an = \frac{n(n-1)}{2} a^2 - an$ 이어야 하므로

$$3an = \frac{n(n-1)}{2} a^2, 3 = \frac{n-1}{2} a$$

$$\therefore a(n-1) = 6 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

a 와 n 은 자연수이므로 ㉠을 만족시키는 모든 경우는 다음과 같다.

a	$n-1$	n	an
1	6	7	7
2	3	4	8
3	2	3	9
6	1	2	12

따라서 구하는 an 의 최댓값은 12이다.

답 12

84

$(x-1)^n$ 의 전개식에서 일반항은

$${}_nC_r x^r (-1)^{n-r} (r=0, 1, 2, \dots, n)$$

이때 x 항은 $r=1$ 일 때이므로

$${}_nC_1 (-1)^{n-1} = (-1)^{n-1} \cdot n$$

$$(-1)^{n-1} \cdot n = -12$$

$$\therefore n=12$$

답 12

85

$(1+2x)^6(1-x)$ 의 전개식에서 x^4 항이 나오는 경우는 $(1+2x)^6$ 에서 나온 x^4 항에 $1-x$ 의 1을 곱한 것과 $(1+2x)^6$ 에서 나온 x^3 항에 $1-x$ 의 $-x$ 를 곱한 것의 합을 구한다.

$(1+2x)^6$ 의 전개식의 일반항은

$${}_6C_r \cdot 1^{6-r} \cdot (2x)^r = {}_6C_r \cdot 2^r \cdot x^r$$

(i) $(1+2x)^6$ 에서 나온 x^4 항에 $1-x$ 의 1을 곱하는 경우

$(1+2x)^6$ 의 전개식에서 x^4 의 계수는 $r=4$ 일 때

$$\text{이므로 } {}_6C_4 \cdot 2^4 = 240$$

따라서 x^4 의 계수는 240

(ii) $(1+2x)^6$ 에서 나온 x^3 항에 $1-x$ 의 $-x$ 를 곱하는 경우

$(1+2x)^6$ 의 전개식에서 x^3 의 계수는 $r=3$ 일 때

$$\text{이므로 } {}_6C_3 \cdot 2^3 = 160$$

따라서 x^4 의 계수는 -160

$(1+2x)^6(1-x)$ 의 전개식에서 x^4 의 계수는

$$240 + (-160) = 80$$

답 ⑤

86

$${}_{2k}C_1 + {}_{2k}C_3 + {}_{2k}C_5 + \dots + {}_{2k}C_{2k-1}$$

$$= {}_{2k}C_0 + {}_{2k}C_2 + {}_{2k}C_4 + \dots + {}_{2k}C_{2k}$$

$$= \frac{2^{2k}}{2} = 2^{2k-1} = 2 \cdot 4^{k-1}$$

$$\therefore f(5) = \sum_{k=1}^5 2 \cdot 4^{k-1} = \frac{2(4^5 - 1)}{4 - 1}$$

$$= \frac{2 \cdot 1023}{3} = 682$$

답 682

87

$$(\text{구하는 확률}) = \frac{{}_4C_1 \times {}_5C_2}{{}_9C_3}$$

$$= \frac{4 \times 10}{84} = \frac{10}{21}$$

답 ①

88

당첨 제비가 하나도 뽑히지 않을 확률은 $\frac{{}_8C_3}{{}_{10}C_3}$ 이므로

로 적어도 한 개의 당첨 제비가 뽑힐 확률은

$$1 - \frac{{}_8C_3}{{}_{10}C_3} = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}$$

답 ④

89

국사를 선택할 사건을 A , 세계사를 선택할 사건을 B 라고 하면

$$P(A) = \frac{22}{35}, P(B) = \frac{17}{35}$$

$$P((A \cup B)^c) = \frac{4}{35}$$

이때

$$P(A \cup B) = 1 - P((A \cup B)^c)$$

$$= 1 - \frac{4}{35} = \frac{31}{35}$$

$$\therefore P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$$= \frac{22}{35} + \frac{17}{35} - \frac{31}{35}$$

$$= \frac{8}{35}$$

답 ③

90

두 사건 A, B 가 서로 독립이므로 $P(A)=P(A|B)$ 이다. 여기서

$$P(A)=\frac{6+20}{6+20+36+x}$$

$$P(A|B)=\frac{20}{20+x}$$

$$\text{이므로 } \frac{26}{62+x}=\frac{20}{20+x}$$

$$\therefore x=120$$

답 120

91

조사 대상인 1000명 중 혈액형이 B형인 학생의 수는 $150+6+80+4=240$ (명)

이 중 혈액형이 B형이고 RH^+ 형인 남학생의 수는 150명이므로 구하는 확률은

$$\frac{150}{240}=\frac{5}{8}$$

답 ④

92

(i) 영희가 6보다 큰 수가 적혀 있는 공을, 은지가 6보다 작은 수가 적혀 있는 공을 꺼낼 확률은

$$\frac{4}{9} \times \frac{5}{8} = \frac{5}{18}$$

(ii) 영희가 6보다 작은 수가 적혀 있는 공을, 은지가 6보다 큰 수가 적혀 있는 공을 꺼낼 확률은

$$\frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{5}{18}$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{5}{18} + \frac{5}{18} = \frac{5}{9}$$

답 ⑤

93

야구공 한 상자를 구입하여 축구공 1개를 경품으로 받을 확률은

$$\frac{{}_1C_1 \cdot {}_{19}C_4}{{}_{20}C_5} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

이므로 경품을 받지 못할 확률은 $\frac{3}{4}$ 이다.

따라서 3상자를 구입하여 경품을 2개 받을 확률은

$${}_3C_2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \frac{3}{4} = \frac{9}{64}$$

$$\therefore p=64, q=9$$

$$\therefore p+q=64+9$$

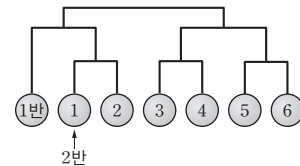
$$=73$$

답 73

94

2반이 배정될 수 있는 자리를 왼쪽에서부터 차례로 1, 2, ..., 6이라고 하자.

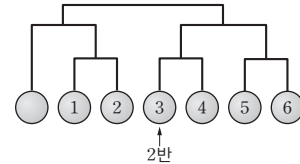
(i) 2반이 1이나 2에 배정되는 경우



2반이 한 번만 승리하면 1반과 축구 시합을 할 수 있으므로 조가 편성될 확률은 $\frac{2}{6}$ 이고 2반이 한 번 승리할 확률은 $\frac{1}{2}$ 이다.

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{2}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

(ii) 2반이 3, 4, 5, 6에 배정되는 경우



1반이 한 번 승리하고 2반이 두 번 승리하면 결승에서 1반과 축구 시합을 할 수 있으므로 조가 편성될 확률은 $\frac{4}{6}$, 2반이 두 번 승리할 확률은

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

1반이 한 번 승리할 확률은 $\frac{1}{2}$ 이다.

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{4}{6} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$$

답 ⑤

V. 통계

95

이차방정식 $6x^2 - 5x + 1 = 0$ 에서

$$(2x-1)(3x-1)=0$$

$$\therefore x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } x = \frac{1}{3}$$

$P(X \leq 1) \leq P(X \leq 2)$ 이므로

$$P(X \leq 1) = \frac{1}{3}, P(X \leq 2) = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore P(1 < X \leq 2) &= P(X \leq 2) - P(X \leq 1) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \end{aligned} \quad \text{답 ②}$$

96

세차 시간을 확률변수 X 라고 하면 X 는 정규분포 $N(30, 2^2)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned} \therefore P(X \geq 33) &= P\left(Z \geq \frac{33-30}{2}\right) \\ &= P(Z \geq 1.5) \\ &= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1.5) \\ &= 0.5 - 0.4332 \\ &= 0.0668 \end{aligned} \quad \text{답 ②}$$

97

$0 \leq X \leq a$ 에서 확률밀도함수의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot b = 1 \quad \therefore ab = 2 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$\text{또, } P\left(0 \leq X \leq \frac{a}{2}\right) = \frac{b}{2} \text{이고}$$

$$P(0 \leq X \leq 2) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot b = b$$

$$\text{에서 } \frac{b}{2} < b \text{이므로 } \frac{a}{2} < 2$$

$0 \leq x \leq 2$ 에서 확률밀도함수가 $y = \frac{b}{2}x$ 이므로

$$\begin{aligned} P\left(0 \leq X \leq \frac{a}{2}\right) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{b}{2} \cdot \frac{a}{2}\right) = \frac{a^2 b}{16} = \frac{b}{2} \\ \therefore a^2 &= 8 \quad \therefore a = 2\sqrt{2} \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

$$\text{㉠에서 } 2\sqrt{2} \cdot b = 2 \quad \therefore b^2 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a^2 + 4b^2 = 8 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 10 \quad \text{답 10}$$

98

표본의 크기 100이 충분히 크므로 모표준편차를 표본표준편차로 대신할 수 있다.

즉, $\sigma = 20$, $n = 100$ 이고 표본평균 $\bar{X} = 245$ 이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$245 - 1.96 \frac{20}{\sqrt{100}} \leq m \leq 245 + 1.96 \frac{20}{\sqrt{100}}$$

$$245 - 1.96 \times 2 \leq m \leq 245 + 1.96 \times 2$$

$$\therefore 241.08 \leq m \leq 248.92$$

따라서 신뢰구간에 속하는 정수는

$$242, 243, 244, 245, 246, 247, 248$$

의 7개이다. 답 ③

99

신입 사원의 키를 확률변수 X 라고 하면 X 는 정규분포 $N(m, 10^2)$ 을 따른다.

$$P(X \geq 177) = P\left(Z \geq \frac{177-m}{10}\right) = 0.242 \text{이므로}$$

$$P\left(0 \leq Z \leq \frac{177-m}{10}\right) = 0.5 - 0.242 = 0.258$$

$$\text{에서 } \frac{177-m}{10} = 0.7$$

$$\therefore m = 170$$

$$\therefore P(X \geq 180) = P\left(Z \geq \frac{180-170}{10}\right)$$

$$= P(Z \geq 1)$$

$$= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1)$$

$$= 0.5 - 0.3413$$

$$= 0.1587$$

답 ①

100

한 개의 주사위를 한 번 던질 때 1의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$ 이므로 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(20, \frac{1}{6}\right)$ 을 따른다.

$$\therefore V(X) = 20 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{9}$$

또, 한 개의 동전을 던질 때 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$

이므로 확률변수 Y 는 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{2}\right)$ 을 따른다.

$$\therefore V(Y) = n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{n}{4}$$

이때 $V(Y) > V(X)$ 이어야 하므로

$$\frac{n}{4} > \frac{25}{9}$$

$$\therefore n > \frac{100}{9} (=11.1 \times \times \times)$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 12이다. 답 12

101

사건 E 가 일어나는 경우의 수는

$m=1$ 일 때, $n^2 \leq 24$ 에서 $n=1, 2, 3, 4$ 의 4가지

$m=2$ 일 때, $n^2 \leq 21$ 에서 $n=1, 2, 3, 4$ 의 4가지

$m=3$ 일 때, $n^2 \leq 16$ 에서 $n=1, 2, 3, 4$ 의 4가지

$m=4$ 일 때, $n^2 \leq 9$ 에서 $n=1, 2, 3$ 의 3가지

이고 일어날 수 있는 모든 경우의 수는

$$6 \times 6 = 36 (\text{가지})$$

이므로 사건 E 가 일어날 확률은

$$P(E) = \frac{4+4+4+3}{36} = \frac{5}{12}$$

따라서 12회의 독립시행에서 사건 E 가 일어나는 횟

수 X 는 이항분포 $B\left(12, \frac{5}{12}\right)$ 를 따르므로

$$V(X) = 12 \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{12} = \frac{35}{12}$$

$$\therefore p=12, q=35$$

$$\therefore p+q=47 \quad \text{답 47}$$

102

$E(\bar{X}) = E(X) = 18$ 이므로

$$E(X) = 10 \cdot \frac{1}{2} + 20a + 30\left(\frac{1}{2} - a\right)$$

$$= 20 - 10a = 18$$

$$\therefore a = \frac{1}{5}$$

따라서 확률변수 X 의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	10	20	30	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	1

이때 크기가 2인 표본을 복원추출하고 표본평균이 20, 즉 $\bar{X}=20$ 일 때의 순서쌍을 구하면

$(10, 30), (20, 20), (30, 10)$

$$\begin{aligned} \therefore P(\bar{X}=20) &= P(X=10) \cdot P(X=30) \\ &\quad + P(X=20) \cdot P(X=20) \\ &\quad + P(X=30) \cdot P(X=10) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{20} + \frac{1}{25} + \frac{3}{20} \\ &= \frac{17}{50} \end{aligned}$$

답 ④

103

회사에서 생산된 핸드볼 공의 무게를 확률변수 X 라고 하면 X 는 정규분포 $N(350, 16^2)$ 을 따른다.

이때 임의로 추출된 핸드볼 공 64개의 무게의 평균을 표본평균 \bar{X} 라고 하면

$$E(\bar{X}) = 350, V(\bar{X}) = \frac{16^2}{64} = 2^2$$

이므로 \bar{X} 는 정규분포 $N(350, 2^2)$ 을 따른다.

따라서 이 회사에서 생산 공정에 문제가 있다고 판단할 확률은

$$\begin{aligned} &P(\bar{X} \leq 346 \text{ 또는 } \bar{X} \geq 355) \\ &= P(\bar{X} \leq 346) + P(\bar{X} \geq 355) \\ &= P\left(Z \leq \frac{346-350}{2}\right) + P\left(Z \geq \frac{355-350}{2}\right) \\ &= P(Z \leq -2) + P(Z \geq 2.5) \\ &= P(Z \geq 2) + P(Z \geq 2.5) \\ &= (0.5 - 0.4772) + (0.5 - 0.4938) \\ &= 0.0228 + 0.0062 \\ &= 0.0290 \end{aligned}$$

답 ①

104

$\neg, P(|Z| \leq c) = 1 - 0.06 = 0.94$ 이므로

$$\begin{aligned} P(0 \leq Z \leq c) &= \frac{1}{2} P(|Z| \leq c) \\ &= 0.47 \quad \dots \dots \text{㉠} \end{aligned}$$

한편, $P(Z > a) = 0.05$ 이므로

$$P(0 \leq Z \leq a) = 0.45$$

따라서 $P(0 \leq Z \leq a) < P(0 \leq Z \leq c)$ 이므로

$$a < c \quad (\text{참})$$

ㄴ. 모집단이 정규분포 $N(75, 5^2)$ 을 따르므로

표본평균 \bar{X} 는 정규분포 $N(75, \frac{5^2}{25})$, 즉

$N(75, 1^2)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned} \therefore P(\bar{X} \leq c + 75) &= P\left(Z \leq \frac{(c+75)-75}{1}\right) \\ &= P(Z \leq c) \\ &= 0.5 + P(0 \leq Z \leq c) \\ &= 0.5 + 0.47 \quad (\because \text{㉠}) \\ &= 0.97 \quad (\text{참}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ㄷ. } P(\bar{X} > b) &= P\left(Z > \frac{b-75}{1}\right) \\ &= P(Z > b-75) = 0.01 \end{aligned}$$

이므로 $P(0 \leq Z \leq b-75) = 0.5 - 0.01 = 0.49$

$$\therefore P(0 \leq Z \leq c) < P(0 \leq Z \leq b-75) \quad (\because \text{㉠})$$

$$\therefore c < b-75 \quad (\text{참})$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

105

확률의 총합은 1이므로

$$\frac{4}{10} + 3p = 1 \quad \therefore p = \frac{1}{5}$$

$$\therefore E(X) = 1 \times \frac{3}{10} + 2p + 3 \times \frac{1}{10} + 4p + 5p$$

$$= \frac{6}{10} + 11p = \frac{14}{5}$$

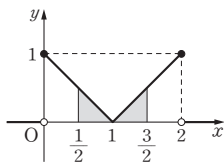
$$\therefore E(5X+3) = 5E(X) + 3$$

$$= 5 \times \frac{14}{5} + 3 = 17 \quad \text{답 ①}$$

106

구하는 확률은 오른쪽 그림의 어두운 부분의 넓이와 같다.

$$\therefore P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}$$



답 ④

$$\text{다른풀이 } P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{2}\right)$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^1 (-x+1)dx + \int_1^{\frac{3}{2}} (x-1)dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}x^2 + x\right]_{\frac{1}{2}}^1 + \left[\frac{1}{2}x^2 - x\right]_1^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

107

평균점수 m 을 95%의 신뢰도로 추정한 신뢰구간은

$$\bar{X} - 1.96 \times \frac{16}{\sqrt{1600}} \leq m \leq \bar{X} + 1.96 \times \frac{16}{\sqrt{1600}}$$

$$\therefore \beta - \alpha = 2 \times 1.96 \times \frac{16}{\sqrt{1600}} = 1.568 \quad \text{답 ②}$$

108

$$\int_0^2 f(x)dx = 1 \text{이므로}$$

$$\int_0^1 a(1-x)dx + \int_1^2 b(x-1)dx = 1$$

$$\left[ax - \frac{a}{2}x^2\right]_0^1 + \left[\frac{b}{2}x^2 - bx\right]_1^2 = 1$$

$$\frac{a}{2} + \frac{b}{2} = 1 \quad \therefore a + b = 2 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$P(1 \leq X \leq 2) = \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 b(x-1)dx$$

$$= \left[\frac{b}{2}x^2 - bx\right]_1^2 = \frac{b}{2}$$

$$\text{이므로 } \frac{b}{2} = \frac{a}{6} \text{에서 } a = 3b \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡에서 } a = \frac{3}{2}, b = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a - b = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1 \quad \text{답 ①}$$

109

직선 $y = ax$ 과 곡선 $y = x^2 - 2x + 4$ 가 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $ax = x^2 - 2x + 4$, 즉

$$x^2 - (a+2)x + 4 = 0$$

이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

$$D = (a+2)^2 - 4 \cdot 4 > 0$$

$$a^2 + 4a - 12 > 0, (a+6)(a-2) > 0$$

$$\therefore a < -6 \text{ 또는 } a > 2$$

$$\therefore a = 3, 4, 5, 6$$

따라서 사건 A가 일어날 확률은 $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ 이므로

확률변수 X는 이항분포 $B\left(300, \frac{2}{3}\right)$ 를 따른다.

$$\therefore E(X) = 300 \times \frac{2}{3} = 200 \quad \text{답 ④}$$

110

확률변수 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	1	2	3	...	10	합계
P(X=x)	$\frac{1}{55}$	$\frac{2}{55}$	$\frac{3}{55}$...	$\frac{10}{55}$	1

$$\begin{aligned} \therefore E(X) &= \frac{1}{55}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2) \\ &= \frac{1}{55} \sum_{k=1}^{10} k^2 = \frac{1}{55} \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} = 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore E(5X+2) &= 5E(X) + 2 = 5 \times 7 + 2 \\ &= 37 \quad \text{답 37} \end{aligned}$$

111

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) \text{ 이고}$$

$$P(X \leq 3) = P(X=2) + P(X=3) \text{ 에서}$$

$$P(X=2) = \frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} = \frac{1}{10}$$

$$P(X=3) = \frac{{}_3C_1 \times {}_2C_1}{{}_5C_2} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{10}$$

$$\therefore P(X > 3) = 1 - \left(\frac{1}{10} + \frac{2}{10}\right) = \frac{7}{10}$$

따라서 $p=10, q=7$ 이므로

$$p+q=17 \quad \text{답 17}$$

112

$$P(0 \leq X \leq 1) = \int_0^1 \frac{1}{2} x dx = \left[\frac{1}{4} x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

따라서 3회의 독립시행에서 사건 A가 2회 이상 일
어날 확률은

$$(2\text{회 일어날 확률}) + (3\text{회 일어날 확률})$$

$$= {}_3C_2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^1 + {}_3C_3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^0$$

$$= 3 \cdot \frac{3}{64} + 1 \cdot \frac{1}{64} = \frac{5}{32}$$

$$\therefore p=32, q=5$$

$$\therefore p+q=37 \quad \text{답 37}$$

113

확률변수 X는 이항분포 $B(n, p)$ 를 따르므로

$$E(X)=1, V(X)=\frac{9}{10} \text{ 에서}$$

$$np=1 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$np(1-p)=\frac{9}{10} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{ 에서 } p=\frac{1}{10}, n=10$$

$$\therefore P(X < 2)$$

$$= P(X=0) + P(X=1)$$

$$= {}_{10}C_0 \left(\frac{1}{10}\right)^0 \left(\frac{9}{10}\right)^{10} + {}_{10}C_1 \left(\frac{1}{10}\right)^1 \left(\frac{9}{10}\right)^9$$

$$= \left(\frac{9}{10}\right)^9 \cdot \left(\frac{9}{10} + 10 \cdot \frac{1}{10}\right)$$

$$= \frac{19}{10} \left(\frac{9}{10}\right)^9 \quad \text{답 ①}$$

114

$$E(\bar{X})=m, \sigma(\bar{X})=\frac{3}{\sqrt{n}} \text{ 이므로 확률변수 } \bar{X} \text{ 는 정}$$

규분포 $N\left(m, \left(\frac{3}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$ 을 따른다.

$$\therefore P(m-0.5 \leq \bar{X} \leq m+0.5)$$

$$= P\left(\frac{(m-0.5)-m}{\frac{3}{\sqrt{n}}} \leq Z \leq \frac{(m+0.5)-m}{\frac{3}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$= P\left(-\frac{\sqrt{n}}{6} \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{6}\right)$$

$$= 2P\left(0 \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{6}\right)$$

$$= 0.8664$$

$$\text{따라서 } P\left(0 \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{6}\right) = 0.4332 \text{ 이므로}$$

$$\frac{\sqrt{n}}{6} = 1.5, \sqrt{n} = 9$$

$$\therefore n=81 \quad \text{답 81}$$

115

학생들의 수학 점수를 확률변수 X 라고 하면 X 는 정규분포 $N(60.2, 20^2)$ 을 따른다.

이때 수학 과목에서 3등급을 받기 위한 최소 점수를 a 라고 하면

$$P(X \geq a) = 0.23$$

$$P\left(Z \geq \frac{a-60.2}{20}\right) = 0.23$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-60.2}{20}\right) = 0.23$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-60.2}{20}\right) = 0.27$$

주어진 표준정규분포표에서

$$P(0 \leq Z \leq 0.74) = 0.27$$

이므로

$$\frac{a-60.2}{20} = 0.74 \quad \therefore a = 75$$

따라서 수학 과목에서 3등급을 받기 위한 최소 점수는 75점이다.

답 ②

