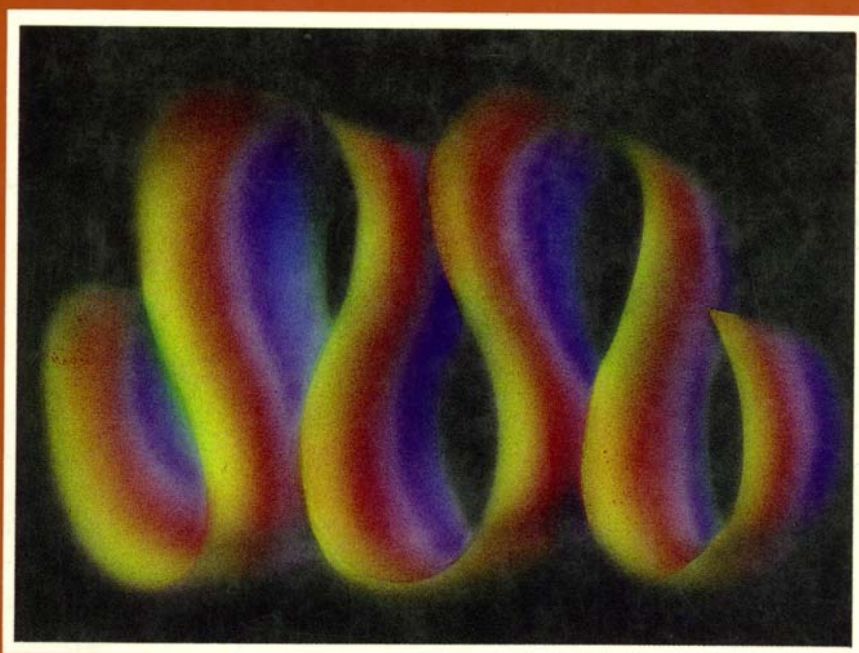


Schaum

# MATEMÁTICAS PARA COMPUTACIÓN

Seymour Lipschutz



Mc  
Graw  
Hill



519.6  
L167.L31

# MATEMATICAS PARA COMPUTACION

Seymour Lipschutz, Ph. D.  
Profesor de Matemáticas  
*Temple University*

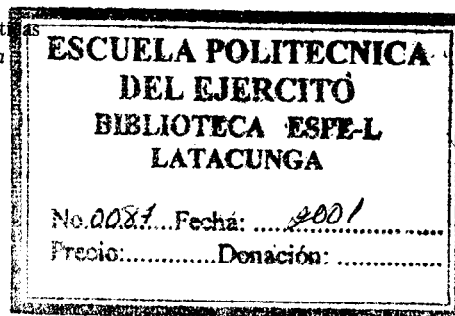
Traducción

Rafael Mariño Castañeda  
Profesor de Matemáticas  
*Universidad Nacional de Colombia*

Revisión

Iván Castro Chadid  
Director Departamento de Matemáticas  
*Pontificia Universidad Javeriana*

**McGRAW-HILL**



MÉXICO • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • LISBOA • MADRID • NUEVA YORK  
PANAMÁ • SAN JUAN • SANTAFÉ DE BOGOTÁ • SANTIAGO • SÃO PAULO  
AUCKLAND • HAMBURGO • LONDRES • MILÁN • MONTREAL • NUEVA DELHI • PARÍS  
SAN FRANCISCO • SINGAPUR • ST. LOUIS • SIDNEY • TOKIO • TORONTO

SEYMOUR LIPSCHUTZ, actualmente profesor de matemáticas en la Universidad de Temple, anteriormente ejerció en el Instituto Politécnico de Brooklyn y estuvo como profesor visitante en el Departamento de Ciencias de la Computación en Brooklyn College. Recibió su Ph. D. en 1960 del Instituto de Ciencias Matemáticas Courant de la Universidad de Nueva York. Sus otros libros de la Serie de Compendios Schaum incluyen Fortran (con Arthur Poe), Matemáticas Discretas y Probabilidad.

## **MATEMÁTICAS PARA COMPUTACIÓN**

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra,  
por cualquier medio, sin autorización escrita del editor.

DERECHOS RESERVADOS © 1992, respecto a la primera edición en español por  
McGRAW-HILL/INTERAMERICANA DE MÉXICO, S.A. DE C.V.  
Atacomulco 499-501, Fracc. Industrial San Andrés Atoto  
53500 Naucalpan de Juárez, Edo. de México  
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial, Reg. Núm. 1890

**ISBN 970-10-0266-0**

Traducido de la primera edición en inglés de  
ESSENTIAL COMPUTER MATHEMATICS  
Copyright © MCMLXXX, by McGraw-Hill, Inc., U.S.A.  
ISBN 0-07-003990-4

4567890123      GA-93      9087651234

Se imprimieron 3.300 ejemplares en el mes de julio de 1995.  
Impreso por: Editorial Presencia Ltda.  
Santafé de Bogotá, Colombia.



## Prefacio

Los computadores aparecen en casi todos los campos de la actividad humana, en los que hay que reunir y analizar datos. Aún más, con el desarrollo de los poco costosos microcomputadores, más y más individuos están comprando y operando sus propios computadores. Por estas razones, ciertos temas matemáticos relacionados con las ciencias de la computación y de la información —en particular, el sistema numérico binario, los circuitos lógicos, la teoría de grafos, los sistemas lineales, la estadística y la probabilidad— se están estudiando muy ampliamente hoy. Este libro ha sido preparado para presentar estos temas y otros afines, de una manera elemental pero completa.

El material ha sido dividido en catorce capítulos, escritos de tal manera que son casi independientes. Por lo tanto, es posible modificar el orden de muchos de los capítulos, o, inclusive es posible omitir algunos de ellos sin dificultad y sin perder la continuidad. El único prerrequisito para la mayoría del libro es el conocimiento de las matemáticas de secundaria.

Cada capítulo comienza con enunciados claros de definiciones pertinentes y demás material descriptivo, seguido por una colección de problemas resueltos y suplementarios de dificultad escalonada. Los problemas resueltos aplican y amplían la teoría, a la vez que suministran la repetición de los principios básicos, tan vital en un aprendizaje efectivo. Los problemas suplementarios sirven como un repaso completo del material de cada capítulo.

Deseo agradecer a muchos de mis amigos y colegas por las invaluable sugerencias y por la revisión crítica del manuscrito. También quiero expresar mi gratitud al personal de la Serie de Compendios Schaum, especialmente a David Beckwith, por su muy útil cooperación.

SEYMOUR LIPSCHUTZ

# Contenido

<b>Capítulo 1</b>	<b>SISTEMA NUMERICO BINARIO</b>	<b>1</b>
1.1	Introducción	1
1.2	Sistema decimal	1
1.3	Sistema binario	3
1.4	Adición y multiplicación binarias	7
1.5	Substracción y división binarias	10
1.6	Complementos	14
<b>Capítulo 2</b>	<b>CODIFICACIONES PARA COMPUTADORES</b>	<b>28</b>
2.1	Introducción	28
2.2	Sistemas numéricos	28
2.3	Sistema octal	31
2.4	Sistema hexadecimal	33
2.5	Codificaciones BCD de 4 bits	37
2.6	Codificaciones BCD de 6 bits	38
2.7	Codificaciones BCD de 8 bits	40
2.8	Formatos decimal zonificado y decimal empacado	42
<b>Capítulo 3</b>	<b>ARITMETICA DEL COMPUTADOR</b>	<b>59</b>
3.1	Conceptos matemáticos básicos	59
3.2	Forma exponencial	61
3.3	Representación interna	63
3.4	Aritmética del computador	65
3.5	Errores	66
<b>Capítulo 4</b>	<b>LOGICA, TABLAS DE VERDAD</b>	<b>76</b>
4.1	Introducción	76
4.2	Conjunción, $p \wedge q$	76
4.3	Disyunción, $p \vee q$	77
4.4	Negación, $\sim p$	77
4.5	Proposiciones y tablas de verdad	78
4.6	Tautologías y contradicciones	79
4.7	Equivalencia lógica: Algebra de proposiciones	80
4.8	Enunciados condicional y bicondicional	80
4.9	Argumentos	82
4.10	Implicación lógica	84
<b>Capítulo 5</b>	<b>ALGORITMOS, DIAGRAMAS DE FLUJO, PROGRAMAS EN SEUDOCODIGO</b>	<b>95</b>
5.1	Introducción	95
5.2	Programas de computador; variables, constantes	96
5.3	Diagramas de flujo y su lenguaje	97
5.4	Ciclos	102
5.5	Inicialización: contadores, acumuladores, ciclos DO	104
5.6	Programas en pseudocódigo	107
<b>Capítulo 6</b>	<b>CONJUNTOS Y RELACIONES</b>	<b>132</b>
6.1	Introducción	132
6.2	Conjuntos y elementos	132

6.3	Conjunto universal, conjunto vacío	133
6.4	Subconjuntos	133
6.5	Diagramas de Venn	134
6.6	Unión e intersección	136
6.7	Complementos	136
6.8	Algebra de conjuntos; dualidad	137
6.9	Conjuntos finitos, principio de conteo	138
6.10	Clases de conjuntos, conjunto potencia, particiones	140
6.11	Parejas ordenadas, conjuntos producto	141
6.12	Relaciones	142
6.13	Representaciones gráficas de relaciones	143
6.14	Relaciones de equivalencia	145
6.15	Funciones	146
<b>Capítulo 7</b>	<b>ALGEBRAS DE BOOLE, COMPUERTAS LOGICAS</b>	<b>169</b>
7.1	Introducción	169
7.2	Algebra de Boole	169
7.3	Dualidad	170
7.4	Teoremas básicos	170
7.5	Orden y Algebra de Boole	171
7.6	Expresiones de Boole: forma suma de productos	173
7.7	Compuertas lógicas	174
7.8	Circuitos lógicos	177
<b>Capítulo 8</b>	<b>SIMPLIFICACION DE CIRCUITOS LOGICOS</b>	<b>193</b>
8.1	Expresiones booleanas minimales	193
8.2	Mapas de Karnaugh	194
8.3	Circuitos minimales AND-OR	198
<b>Capítulo 9</b>	<b>VECTORES, MATRICES, VARIABLES SUBINDIZADAS</b>	<b>209</b>
9.1	Introducción	209
9.2	Vectores	210
9.3	Matrices	211
9.4	Adición matricial y multiplicación escalar	212
9.5	Símbolo de sumatoria	212
9.6	Multiplicación matricial	213
9.7	Matrices cuadradas	215
9.8	Matrices invertibles	216
9.9	Determinantes	216
9.10	Matrices invertibles y determinantes	217
9.11	Variables subindizadas	218
<b>Capítulo 10</b>	<b>ECUACIONES LINEALES</b>	<b>236</b>
10.1	Ecuaciones lineales en una incógnita	236
10.2	Ecuaciones lineales en dos incógnitas	236
10.3	Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas	237
10.4	Sistema de $n$ ecuaciones lineales con $n$ incógnitas	239
10.5	Solución de un sistema triangular	240
10.6	Eliminación gaussiana	242
10.7	Determinantes y sistemas de ecuaciones lineales	244
<b>Capítulo 11</b>	<b>ANALISIS COMBINATORIO</b>	<b>257</b>
11.1	Introducción	257
11.2	Notación factorial	257
11.3	Coefficientes binomiales	258
11.4	Permutaciones	260
11.5	Permutaciones con repetición; particiones	261

	11.6	Combinaciones . . . . .	262
	11.7	Diagramas de árbol . . . . .	263
<b>Capítulo 12</b>		<b>PROBABILIDAD . . . . .</b>	<b>276</b>
	12.1	Introducción . . . . .	276
	12.2	Espacios muestral y eventos . . . . .	276
	12.3	Espacios finitos de probabilidad . . . . .	277
	12.4	Teoremas de espacios finitos de probabilidad . . . . .	278
	12.5	Probabilidad condicional . . . . .	279
	12.6	Independencia . . . . .	280
	12.7	Pruebas repetidas . . . . .	281
<b>Capítulo 13</b>		<b>ESTADISTICA: VARIABLES ALEATORIAS . . . . .</b>	<b>293</b>
	13.1	Introducción . . . . .	293
	13.2	Tablas de frecuencia, histogramas . . . . .	293
	13.3	Media . . . . .	295
	13.4	Varianza, desviación estándar . . . . .	296
	13.5	Mediana, moda . . . . .	299
	13.6	Variables aleatorias . . . . .	300
	13.7	Esperanza y varianza de una variable aleatoria . . . . .	302
<b>Capítulo 14</b>		<b>GRAFOS, GRAFOS DIRIGIDOS, MAQUINAS . . . . .</b>	<b>318</b>
	14.1	Introducción . . . . .	318
	14.2	Grafos y multigrafos . . . . .	318
	14.3	Grado de un nodo . . . . .	319
	14.4	Conexidad . . . . .	319
	14.5	Tipos especiales de grafos . . . . .	320
	14.6	Grafos rotulados . . . . .	323
	14.7	Grafos, árboles . . . . .	323
	14.8	Arboles con raíces . . . . .	325
	14.9	Grafos dirigidos . . . . .	327
	14.10	Digrafos conexos . . . . .	329
	14.11	Máquinas de estado finito . . . . .	330
	14.12	Cadenas, Cintas de entrada y de salida . . . . .	331
	14.13	Autómatas finitos . . . . .	333
<b>INDICE . . . . .</b>			



# Capítulo 1

## Sistema numérico binario

### 1.1 INTRODUCCION

Muchos de los componentes electrónicos de un computador son de naturaleza biestable; es decir, pueden estar en cualquiera de dos estados (tales como encendido/ apagado, o magnetizado en la dirección de las manecillas de reloj/en dirección contraria). Estos dos estados posibles comúnmente se denotan por 0 y 1, que son los símbolos para los dígitos del sistema numérico binario. Aún más, una unidad individual de información se representa en el computador por una secuencia de estos dígitos binarios (llamados *bits*, abreviadamente). Tales sucesiones de bits pueden ser consideradas como números binarios, y muchos computadores usan el sistema numérico binario no sólo para representar cantidades, sino para efectuar cálculos, usando la aritmética binaria.

El sistema numérico binario y el familiar sistema numérico decimal son ejemplos de *sistemas de numeración posicional*. Cualquier sistema de éstos requiere sólo un número finito de símbolos, llamados *dígitos* del sistema, para representar números arbitrariamente grandes. En términos de estos dígitos, la ejecución de cálculos numéricos es relativamente sencilla. El número  $b$  de dígitos se llama *base*. Como veremos, cualquier número puede representarse como una suma de potencias de la base  $b$ , en la cual cada potencia está ponderada por uno de los dígitos.

Aunque este capítulo trata especialmente el sistema numérico binario y su aritmética, comenzamos con un repaso del sistema decimal, ya que tal repaso simplificará los tópicos análogos del sistema binario.

### 1.2 SISTEMA DECIMAL

El sistema decimal tiene diez dígitos denotados por los símbolos

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

y que representan los enteros de cero a nueve, respectivamente. Así, la base del sistema decimal es  $b = 10$ .

Cualquier entero positivo  $N$ , representado en el sistema decimal como una cadena de dígitos decimales, puede expresarse también como una suma de potencias de 10, con cada potencia ponderada por un dígito. Por ejemplo,  $N = 8253$  se puede expresar como sigue:

$$8253 = 8 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 3 \times 10^0 = 8 \times 1000 + 2 \times 100 + 5 \times 10 + 3 \times 1$$

A esto se le llama *notación expandida* para el entero. Observe que

$$8253 = 8000 + 200 + 50 + 3$$

Así, el dígito 3 en el entero representa tres 1s, el 5 representa cinco 10s, el 2 representa dos 100s, y el 8 representa ocho 1000s. Las potencias de diez,

$$10^0 = 1 \quad 10^1 = 10 \quad 10^2 = 100 \quad 10^3 = 1000 \quad \dots$$

que corresponden respectivamente a los dígitos en un entero decimal cuando se leen de derecha a izquierda, se llaman *valores de posición* de los dígitos.

Cualquier valor fraccionario  $M$ , representado en el sistema decimal por una cadena de dígitos decimales junto con un punto decimal intercalado, puede expresarse también en notación

expandida usando potencias negativas de 10. Específicamente, el valor posicional de los dígitos en  $M$  a la derecha del punto decimal son respectivamente

$$10^{-1} = \frac{1}{10} \quad 10^{-2} = \frac{1}{100} \quad 10^{-3} = \frac{1}{1000} \quad \dots$$

Por ejemplo,  $M = 837.526$  se expresa en notación expandida como sigue:

$$\begin{aligned} 837.526 &= 8 \times 10^2 + 3 \times 10 + 7 \times 10^0 + 5 \times 10^{-1} + 2 \times 10^{-2} + 6 \times 10^{-3} \\ &= 800 + 30 + 7 + \frac{5}{10} + \frac{2}{100} + \frac{6}{1000} \end{aligned}$$

Se dice que esta fracción decimal tiene tres *posiciones decimales*, el número de dígitos a la derecha del punto decimal.

La aritmética de las fracciones decimales no es muy complicada, siempre y cuando uno no pierda de vista los puntos decimales.

### Adición

Uno debe alinear verticalmente los puntos decimales cuando suma fracciones decimales. Por ejemplo,  $34.215 + 513.48 + 2.1326$  se obtiene como sigue:

$$\begin{array}{r} 34.2150 \\ 513.4800 \\ + 2.1326 \\ \hline 549.8276 \end{array}$$

Obsérvese que se han introducido 0s adicionales, de tal manera que los números tengan el mismo número de posiciones decimales.

### Substracción

Como en la adición, uno debe alinear verticalmente los puntos decimales. Por ejemplo,  $45.217 - 23.64$  y  $123.45 - 75.168$  se obtienen como sigue:

$$\begin{array}{r} 45.217 \\ - 23.640 \\ \hline 21.577 \end{array} \quad \begin{array}{r} 123.450 \\ - 75.168 \\ \hline 48.282 \end{array}$$

De nuevo, se han introducido 0s adicionales para dar a los números el mismo número de posiciones decimales.

### Multiplicación

El número de posiciones decimales en el producto es la suma de las posiciones decimales en los números que se están multiplicando. Por ejemplo,  $2.35 \times 43.162$  se obtiene como sigue:

$$\begin{array}{r} 43.162 \\ \times 2.35 \\ \hline 215810 \\ 129486 \\ 86324 \\ \hline 101.43070 \end{array}$$

Al producto se le dan 5 posiciones decimales porque 43.162 tiene 3 posiciones decimales y 2.35 tiene 2 posiciones decimales.

### División

Al dividir una fracción decimal por otra, uno mueve el punto decimal en el divisor a la derecha para transformar al divisor en un entero. Esto se compensa moviendo también el punto

decimal en el dividendo hacia la derecha el mismo número de posiciones. Por ejemplo,  $387.167 \div 2.55$  se obtiene como sigue:

$$\begin{array}{r} 387 \times 16.70 \quad | \quad 2 \times 55. \\ 255 \qquad \qquad \quad 1 \ 51.83 \\ 132 \ 1 \\ 127 \ 5 \\ \quad 4 \ 66 \\ \quad 2 \ 55 \\ \quad 2 \ 11 \ 7 \\ \quad 2 \ 04 \ 0 \\ \qquad \quad 7 \ 70 \\ \qquad \quad 7 \ 65 \\ \qquad \qquad \quad 5 \end{array}$$

Observe que uno corre el punto decimal en 2.55 dos posiciones hacia la derecha, de tal manera que el divisor se vuelve 255. En seguida se corre el punto decimal de 387.167 dos posiciones hacia la derecha, de tal manera que el dividendo se vuelve 38 716.7. Después efectuamos la división larga. Podemos agregar ceros al final del dividendo para efectuar la división hasta el número de posiciones que uno quiera. Aquí, adicionamos un cero, y efectuamos la división hasta 2 posiciones decimales.

### 1.3 SISTEMA BINARIO

El sistema binario es el sistema de numeración posicional con base  $b = 2$ . Sus dos dígitos, denotados 0 y 1, se llaman *bits* abreviadamente. Cualquier *número binario* es, por lo tanto, una sucesión de bits, posiblemente con un *punto binario* intercalado. Los números binarios que no tienen parte fraccionaria, es decir, que no tienen un punto binario intercalado, se llaman *enteros binarios*.

Los valores de posición en el sistema binario son las potencias de la base  $b = 2$ , así como los valores de posición en el sistema decimal son las potencias de diez. Específicamente, los valores de posición de la parte entera de un número binario son las potencias no negativas de dos,

$$2^0 \quad 2^1 \quad 2^2 \quad 2^3 \quad \dots$$

y los valores de posición de la parte fraccionaria de un número binario son las potencias negativas de dos,

$$2^{-1} \quad 2^{-2} \quad 2^{-3} \quad \dots$$

La tabla 1-1 da los valores de algunas de las potencias de dos.

## Conversión binaria a decimal

Cualquier número binario se puede escribir en notación expandida como la suma de cada dígito el número de veces el valor de tal dígito. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} 110101 &= 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2 + 1 \times 1 \\ 101.1101 &= 1 \times 2^2 + 0 \times 2 + 1 \times 1 + 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 0 \times 2^{-3} + 1 \times 2^{-4} \end{aligned}$$

Como cada potencia de dos está ponderada por 0 o por 1, el número binario es simplemente la suma de aquellos valores de posición en los cuales aparece el bit 1. Esta suma nos da directamente el equivalente decimal del número binario. (Para otro método, restringido a los enteros binarios, véase el problema 1.12.)

La tabla 1-2 es un listado de las representaciones binarias de los enteros de 0 a 25, mostrándose los valores de posición de los bits en la parte superior de la tabla. Algunas veces se usa un subíndice 2 para distinguir un número binario, mejor dicho, uno puede escribir 101011<sub>2</sub>, si no es claro por el contexto que 101011 es un número binario en lugar de un número decimal.



Además, para facilitar la lectura, a veces se separa un número binario en grupos de 4 bits, hacia la izquierda y hacia la derecha del punto binario; por ejemplo

10110100.011010 se puede escribir como 1011 0100.0110 10

Tabla 1-1

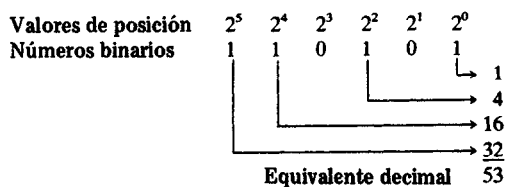
Potencias de dos	Valor decimal
$2^{10}$	1024
$2^9$	512
$2^8$	256
$2^7$	128
$2^6$	64
$2^5$	32
$2^4$	16
$2^3$	8
$2^2$	4
$2^1$	2
$2^0$	1
$2^{-1}$	$1/2 = 0.5$
$2^{-2}$	$1/4 = 0.25$
$2^{-3}$	$1/8 = 0.125$
$2^{-4}$	$1/16 = 0.0625$
$2^{-5}$	$1/32 = 0.03125$
$2^{-6}$	$1/64 = 0.015625$

Tabla 1-2

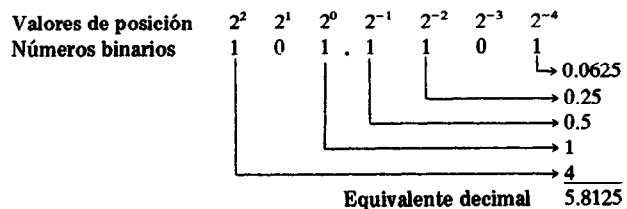
Número decimal	Números binarios				
	16s	8s	4s	2s	1s
0					0
1					1
2				1	0
3				1	1
4			1	0	0
5			1	0	1
6			1	1	0
7			1	1	1
8		1	0	0	0
9		1	0	0	1
10		1	0	1	0
11		1	0	1	1
12		1	1	0	0
13		1	1	0	1
14		1	1	1	0
15		1	1	1	1
16	1	0	0	0	0
17	1	0	0	0	1
18	1	0	0	1	0
19	1	0	0	1	1
20	1	0	1	0	0
21	1	0	1	0	1
22	1	0	1	1	0
23	1	0	1	1	1
24	1	1	0	0	0
25	1	1	0	0	1

## EJEMPLO 1.1

- (a) Para transformar  $110101_2$  a su equivalente decimal, escriba el valor de posición apropiado sobre cada bit, y luego sume aquellas potencias de dos que están ponderadas por 1:



- (b) Para convertir  $101.1101_2$  a su equivalente decimal, use la tabla 1-1 para los valores decimales de las potencias negativas de dos:



**Conversión decimal a binario**

Encontramos la representación binaria de un número decimal  $N$  convirtiendo su parte entera,  $N_I$ , y su parte fraccionaria,  $N_F$ , separadamente. Vamos a ilustrar con el número decimal  $N = 109.781\ 25$ .

**EJEMPLO 1.2**

- (a) Para convertir  $N_I = 109$  a su equivalente binario, dividimos  $N_I$  y cada cociente sucesivo por 2, tomando nota de los residuos, como sigue:

Divisiones	Cocientes	Residuos
$109 \div 2$	54	1
$54 \div 2$	27	0
$27 \div 2$	13	1
$13 \div 2$	6	1
$6 \div 2$	3	0
$3 \div 2$	1	1
$1 \div 2$	0	1

El cociente cero indica el final de los cálculos. Observe que los residuos solamente pueden ser 0 ó 1, ya que las divisiones son por 2. La sucesión de residuos de abajo hacia arriba, como lo indica la flecha, da el equivalente binario requerido. Mejor dicho,  $N_I = 109 = 1101101_2$ .

En la práctica, las discusiones anteriores se pueden condensar como sigue:

	Residuos
<u>109</u>	
54	1
<u>27</u>	0
13	1
<u>6</u>	1
3	0
<u>1</u>	1

Nos detenemos cuando el cociente, 1, es menor que el divisor, 2, ya que este último cociente será el próximo y el último residuo. De nuevo, la flecha indica la sucesión de bits que da el equivalente binario del número. (En el problema 1.4 se da otro método para convertir un entero decimal en su equivalente binario.)

- (b) Para convertir  $N_F = 0.781\ 25$  en su equivalente binario multiplique  $N_F$  y cada parte fraccional sucesiva por 2, observando que la parte entera del producto, como sigue:

Multiplicaciones	Partes enteras
$0.781\ 25 \times 2 = 1.562\ 50$	1
$0.5625 \times 2 = 1.1250$	1
$0.125 \times 2 = 0.250$	0
$0.25 \times 2 = 0.50$	0
$0.50 \times 2 = 1.00$	1

La parte fraccional cero indica el fin de los cálculos. Observe que la parte entera de cualquier producto solamente puede ser 0 ó 1, ya que se están doblando números que son menores que uno. La sucesión de dígitos partes enteras de arriba hacia abajo, como lo indica la flecha, da el equivalente binario requerido. Es decir,  $N_F = 0.781\ 25 = 0.1101_2$ .

En la práctica, las anteriores multiplicaciones se pueden condensar como sigue:

$$\begin{array}{r}
 0.781\,25 \\
 \times 2 \\
 \hline
 1.562\,50 \\
 \times 2 \\
 \hline
 1.125\,00 \\
 \times 2 \\
 \hline
 0.250\,00 \\
 \times 2 \\
 \hline
 0.500\,00 \\
 \times 2 \\
 \hline
 1.000\,00 \\
 \downarrow
 \end{array}$$

Observe que la parte entera de cada producto se ha subrayado, y no aparece en la próxima multiplicación. De nuevo la flecha indica la sucesión de dígitos parte entera que da la representación binaria requerida.

Hemos encontrado los equivalentes binarios de la parte entera y la parte fraccionaria del número decimal  $N = 109.781\,25$ . El equivalente binario de  $N$  es sencillamente la suma de estos dos equivalentes:

$$N = N_I + N_F = 110\,1101.1100\,1$$

**EJEMPLO 1.3** Sea  $N = 13.6875$ . Convertimos la parte entera,  $N_I = 13$  y la parte fraccionaria,  $N_F = 0.6875$ , en forma binaria como antes:

Residuos	↑	Partes enteras
13	1	0.6875
6	0	$\times 2$
3	1	$\hline 1.3750$
1	1	$\times 2$
1	1	$\hline 0.7500$
		$\times 2$
		$\hline 1.5000$
		$\times 2$
		$\hline 1.0000$
		$\downarrow$

Así,  $N = 13.6875 = 1101.1011_2$ .

*Observación:* El equivalente binario de una fracción decimal que termina, no siempre termina. Por ejemplo, convertimos  $N = 0.6$  como antes:

Multiplicaciones	Partes enteras
$0.6 \times 2 = 1.2$	1
$0.2 \times 2 = 0.4$	0
$0.4 \times 2 = 0.8$	0
$0.8 \times 2 = 1.6$	1

En este punto del procedimiento, multiplicamos de nuevo 0.6 por 2. Esto significa que los cuatro primeros pasos se repetirán y, por lo tanto, obtendremos los cuatro primeros bits una y otra vez. Mejor dicho,

$$N = 0.6 = 0.1001\,1001\,1001 \dots_2$$

(Véase problema 1.15. El número de bits que se repite no siempre es cuatro; ni tampoco el bloque que se repite necesariamente comienza en el punto binario: depende del número  $N$  dado.)

#### 1.4 ADICION Y MULTIPLICACION BINARIAS

La ejecución de cálculos numéricos es esencialmente igual en todos los sistemas de numeración posicional. Esta sección investigará la adición y la multiplicación de números binarios; la sustracción y la división se estudiarán en la sec. 1.5.

##### Adición binaria

Primero ilustramos la adición en el familiar sistema decimal. La adición de dos números decimales se logra de acuerdo con el siguiente algoritmo en tres pasos:

PASO 1. Sume la primera columna (la que está más hacia la derecha).

PASO 2. Registre el dígito de las unidades de la suma de la columna. Si la suma pasa de nueve, lleve el dígito de las decenas, 1, a la próxima columna.

PASO 3. Si hay más columnas o si se ha llevado algo del paso 2, sume la próxima columna y repita el paso 2. De lo contrario pare.

(Como solamente estamos sumando dos números decimales, ninguna suma de columna, aunque se esté llevando de la columna anterior, puede pasar de diecinueve; de tal manera que las decenas de la suma de la columna no puede pasar de 1.)

**EJEMPLO 1.4** Considere la siguiente suma decimal:

$$\begin{array}{r} 34\ 573 \\ + 52\ 861 \\ \hline \end{array}$$

Sumando 1  
Sumando 2

Sumamos los números usando el anterior algoritmo.

PASO 1.  $3 + 1 = 4$ .

$$\begin{array}{r} 34\ 573 \\ + 52\ 861 \\ \hline 4 \end{array}$$

Sumando 1  
Sumando 2

PASO 3.  $7 + 6 = 13$ .

$$\begin{array}{r} 1 \\ 34\ 573 \\ + 52\ 861 \\ \hline 34 \end{array}$$

Lo que se lleva  
Sumando 1  
Sumando 2

PASO 3.  $1 + 5 + 8 = 14$ .

$$\begin{array}{r} 1\ 1 \\ 34\ 573 \\ + 52\ 861 \\ \hline 434 \end{array}$$

Lo que se lleva  
Sumando 1  
Sumando 2

PASO 3.  $1 + 4 + 2 = 7$ .

$$\begin{array}{r} 1\ 1 \\ 34\ 573 \\ + 52\ 861 \\ \hline 7\ 434 \end{array}$$

Lo que se lleva  
Sumando 1  
Sumando 2

PASO 3.  $3 + 5 = 8$ .

$$\begin{array}{r} 1\ 1 \\ 34\ 573 \\ + 52\ 861 \\ \hline 87\ 434 \end{array}$$

Lo que se lleva  
Sumando 1  
Sumando 2  
Suma

PASO 3. Pare



En la práctica, los pasos 1 y 3 se hacen mentalmente. Además, a cada paso 2 se le aplica el mismo esquema, para obtener

$$\begin{array}{r} \phantom{0}11 \\ 34\,573 \\ + 52\,861 \\ \hline 87\,434 \end{array}$$

La propiedad básica del algoritmo consiste en que dos números cualesquiera, no importa cuán grandes, se pueden sumar si uno simplemente sabe (i) la adición de dos dígitos (cualesquiera) y (ii) la adición de dos dígitos más 1 que se lleve. Los hechos de la suma que se requieren, se presentan comúnmente en una tabla de la adición de los dígitos decimales, que memorizamos temprano en nuestra educación.

Afortunadamente, el algoritmo en tres pasos para la adición de números decimales también es válido para la adición de los números binarios si, en el paso 2, reemplazamos “nueve” por “uno” y “diez” por “dos”. La tabla de la adición para los dígitos binarios 0 y 1 se muestran en la tabla 1-3; los únicos hechos adicionales que se necesitan para la adición binaria aparecen en la tabla 1-4.

Tabla 1-3 Tabla de adición binaria

+	0	1
0	0	1
1	1	10

Tabla 1-4 Hechos sobre la adición binaria

0 + 0 = 0
0 + 1 = 1
1 + 0 = 1
1 + 1 = 0, Llevando 1
1 + 1 + 1 = 1, Llevando 1

**EJEMPLO 1.5** Evaluamos la suma binaria

$$\begin{array}{r} 111 \\ + 101 \\ \hline \end{array}$$

Sumando 1  
Sumando 2

por medio del algoritmo en tres pasos.

PASO 1.  $1 + 1 = 0$ , con 1 que se lleva.

PASO 2.

$$\begin{array}{r} \phantom{0}1 \\ 111 \\ + 101 \\ \hline 0 \end{array}$$

Lo que se lleva  
Sumando 1  
Sumando 2

PASO 3.  $1 + 1 = 0$ , con 1 que se lleva.

PASO 2.

$$\begin{array}{r} \phantom{0}11 \\ 111 \\ + 101 \\ \hline 00 \end{array}$$

Lo que se lleva  
Sumando 1  
Sumando 2

PASO 3.  $1 + 1 + 1 = 1$ , con 1 que se lleva.

PASO 2.

$$\begin{array}{r} \phantom{0}111 \\ 111 \\ + 101 \\ \hline 100 \end{array}$$

Lo que se lleva  
Sumando 1  
Sumando 2

PASO 3.  $1 + 0 = 1$ .

PASO 2.

$$\begin{array}{r} \phantom{0}111 \\ 111 \\ + 101 \\ \hline 1100 \end{array}$$

Lo que se lleva  
Sumando 1  
Sumando 2

PASO 3. Pare.

De nuevo, en la práctica, realizamos mentalmente los pasos 1 y 3, usando la tabla 1-4. También, cuando sumamos la última columna (la que está más hacia la izquierda), no hay necesidad de llevar el último 1, sino simplemente colocarlo debajo de la línea. Así, la suma aparecería como

$$\begin{array}{r} 11 \\ 111 \\ + 101 \\ \hline 1100 \end{array}$$

En realidad, frecuentemente ni siquiera escribimos los 1s que se llevan.

### EJEMPLO 1.6

(a) Calcule la suma binaria  $110011101 + 10110111$ . Tenemos

$$\begin{array}{r} 1\ 11111 \\ 110011101 \\ + 10110111 \\ \hline 1001010100 \end{array}$$

(b) Calcule la suma  $1001 + 1101 + 110 + 1011$ . Sumamos los primeros dos números y luego sumamos los otros uno a la vez hasta obtener lo siguiente:

1001	Primer número
+ 1101	Segundo número
<u>10110</u>	Suma
+ 110	Tercer número
<u>11100</u>	Suma
+ 1011	Cuarto número
<u>100111</u>	Suma final

(c) Calcule  $11011.01 + 101.1101$ . Como en las fracciones decimales, primero escribimos los números binarios de tal manera que los puntos binarios queden alineados, y luego sumamos:

$$\begin{array}{r} 11011.01 \\ + 101.1101 \\ \hline 10001.0001 \end{array}$$

### Multiplicación binaria

Recuerde que la multiplicación de números decimales se puede reducir a multiplicar números por dígitos y luego sumar.

**EJEMPLO 1.7** Para calcular  $1234 \times 263$ , primero multiplique 1234 por los dígitos 2, 6 y 3, como sigue:

$$\begin{array}{r} 1234 \\ \times 263 \\ \hline 3702 \\ 7404 \\ 2468 \\ \hline \end{array}$$

Después sumamos las tres líneas inferiores de números:

$$\begin{array}{r} 1234 \\ \times 263 \\ \hline 3702 \\ 7404 \\ 2468 \\ \hline 324542 \end{array}$$

La suma de las tres líneas es el producto requerido.

La regla para la multiplicación decimal también es válida para la multiplicación binaria. En efecto, la multiplicación binaria es más sencilla, ya que al multiplicar un número por el bit 0 ó 1 da respectivamente 0 o el número mismo.

**EJEMPLO 1.8** Para calcular el producto binario  $1101011 \times 10110$  multiplique 1101011 por los dígitos 0, 1, 1, 0 y 1, como sigue:

$$\begin{array}{r}
 1101011 \\
 \times 10110 \\
 \hline
 0000000 \\
 1101011 \\
 1101011 \\
 0000000 \\
 1101011 \\
 \hline
 \end{array}$$

Luego sume las cinco filas inferiores de números. En la práctica, no se escriben los productos cero. Bajamos los ceros iniciales, si hay, y formamos un total, agregándole cada fila no-cero después de la otra:

$$\begin{array}{r}
 1101011 \\
 \times 10110 \\
 \hline
 11010110 \\
 1101011 \\
 101000010 \\
 1101011 \\
 \hline
 100100110010
 \end{array}$$

Cero inicial  
 Primer producto no-cero  
 Segundo producto no-cero  
 Suma  
 Tercer producto no-cero  
 Suma final

La suma final es el producto requerido. Destaquemos que *es extremadamente importante alinear los números en las columnas correctas*.

**EJEMPLO 1.9** Calcule el producto binario  $11.01 \times 101.1$ . Tenemos

$$\begin{array}{r}
 11.01 \\
 \times 101.1 \\
 \hline
 1101 \\
 1101 \\
 1101 \\
 100111 \\
 \hline
 1101 \\
 10001.111
 \end{array}$$

El número de posiciones binarias en el producto es tres, que es la suma de las posiciones binarias en los números que se están multiplicando. Esta es la misma regla que se aplica en la multiplicación decimal.

## 1.5 SUBSTRACCION Y DIVISION BINARIAS

Esta sección investiga las otras dos operaciones aritméticas básicas, la substracción y la división. De nuevo, al discutir cada operación, primero mostraremos los pasos análogos en el sistema decimal.

### Substracción decimal

La substracción en el sistema decimal se puede efectuar usando el siguiente algoritmo en dos pasos:

**PASO 1.** Si el dígito inferior (el sustraendo) es mayor que el superior (el minuendo), preste de la siguiente columna hacia la izquierda. (El valor que se presta es igual a diez.)

**PASO 2.** Reste el valor inferior del superior.

En el paso 1 “prestar” significa apropiarse, sin intenciones de devolverlo. Aunque el valor prestado sea diez, la columna de la cual se presta solamente disminuye en uno.

**EJEMPLO 1.10** Considere la siguiente resta decimal:

$$\begin{array}{r}
 548 \quad \text{Minuendo} \\
 - 263 \quad \text{Substraendo} \\
 \hline
 \end{array}$$

Se restan los números usando el anterior algoritmo.

PASOS 1 y 2.

$$\begin{array}{r} 548 \text{ Minuendo} \\ - 263 \text{ Substraendo} \\ \hline 5 \end{array}$$

PASO 1.

$$\begin{array}{r} 414 \text{ Lo que se presta} \\ 548 \text{ Minuendo} \\ - 263 \text{ Substraendo} \\ \hline 5 \end{array}$$

PASO 2.

$$\begin{array}{r} 414 \text{ Lo que se presta} \\ 548 \text{ Minuendo} \\ - 263 \text{ Substraendo} \\ \hline 85 \end{array}$$

PASOS 1 y 2.

$$\begin{array}{r} 414 \text{ Lo que se presta} \\ 548 \text{ Minuendo} \\ - 263 \text{ Substraendo} \\ \hline 285 \text{ Diferencia} \end{array}$$

Observe que solamente hubo un préstamo; diez se le agregó a 4 para obtener 14 y se restó 1 de 5, quedando 4. En la práctica, no borramos el cuatro para escribir 14, simplemente colocamos un 1 en frente del 4:

$$\begin{array}{r} 4 \\ 548 \\ - 263 \\ \hline 285 \end{array}$$

El proceso se hace más complejo cuando uno tiene que prestar de un dígito que sea 0. Específicamente, prestamos del primer dígito no-cero hacia la izquierda, mientras que el 0 se vuelve  $10 - 1 = 9$ .

EJEMPLO 1.11 Considere la resta

$$\begin{array}{r} 84003 \\ - 21625 \\ \hline \end{array}$$

Primero tenemos

$$\begin{array}{r} 399 \\ 84003 \\ - 21625 \\ \hline \end{array}$$

Aquí el 4, el primer dígito no-cero a la izquierda del 3, se vuelve 3; los dos 0s que intervienen se vuelven 9s; y el 3 se vuelve 13. Entonces se obtiene la diferencia requerida como

$$\begin{array}{r} 399 \\ 84003 \\ - 21625 \\ \hline 62378 \end{array}$$

Los hechos de la sustracción que se requieren para el algoritmo en dos pasos consisten en las diferencias de cada dígito de dígitos mayores y de las diferencias de cada dígito de dígitos menores más diez. De nuevo, tales hechos se memorizan en una edad temprana.

La sustracción binaria también usa el algoritmo en dos pasos. Aún más, los únicos hechos de la sustracción que se necesitan para la sustracción binaria son los cuatro que se incluyen en la tabla 1-5. Las primeras tres líneas son traducciones de los hechos de la adición

$$0 + 0 = 0 \quad 1 + 0 = 1 \quad 0 + 1 = 1$$

(Recuerde que la sustracción es la operación inversa de la adición.) La última línea viene de que

$$1 + 1 = 10 \text{ y, por lo tanto, } 10 - 1 = 1$$

Es decir, la diferencia  $0 - 1$  requiere prestar, obteniéndose  $10 - 1 = 1$ .



Tabla 1-5 Hechos de la substracción binaria

0 - 0 = 0
1 - 0 = 1
1 - 1 = 0
0 - 1 = 1, prestando un 1 de la siguiente columna

**EJEMPLO 1.12** Para evaluar la diferencia binaria  $11101 - 1011$ , aplicamos los hechos de la substracción de la tabla 1-5 y obtenemos

$$\begin{array}{r} 0 \\ 11\cancel{1}01 \\ - 1011 \\ \hline 10010 \end{array}$$

Observe que prestamos un 1 de la tercera columna debido a la diferencia  $0 - 1$  en la segunda columna.

Como en la substracción decimal, la substracción binaria se hace más compleja cuando hay que prestar de un dígito que es 0. De nuevo, prestamos del primer dígito no-cero a la izquierda, pero ahora cada 0 que intervenga se vuelve  $10 - 1 = 1$ .

**EJEMPLO 1.13** Considere la diferencia

$$\begin{array}{r} 11000 \\ - 10011 \\ \hline \end{array}$$

Obtenemos

$$\begin{array}{r} 011 \\ 1\cancel{1}\cancel{0}\cancel{0}0 \\ - 10011 \\ \hline 101 \end{array}$$

Aquí ocurre una diferencia  $0 - 1$  en la primera columna; por lo tanto, prestamos de la cuarta columna, en la cual aparece el primer dígito no-cero hacia la izquierda, y los dos 0s que intervienen se vuelven 1s.

**EJEMPLO 1.14**

(a) Calcule la diferencia  $1100101001 - 110110110$ . Tenemos

$$\begin{array}{r} 00110\ 01 \\ \cancel{1}\cancel{1}\cancel{0}\cancel{0}\cancel{1}0\cancel{1}\cancel{0}01 \\ - 110110110 \\ \hline 101110011 \end{array}$$

(b) Calcule la diferencia  $1101.101 - 11.10111$ . Como en las fracciones decimales, primero debemos alinear verticalmente los puntos binarios antes de resta.

$$\begin{array}{r} 010\ 0101 \\ 1\cancel{1}\cancel{0}\cancel{1}\cancel{.}\cancel{1}\cancel{0}\cancel{1}\cancel{1}0 \\ - 11.10111 \\ \hline 1001.11101 \end{array}$$

### División binaria

Recuerda que la división de números decimales se puede reducir a multiplicar el divisor por dígitos individuales del dividendo y luego a una substracción.

**EJEMPLO 1.15** Calcule  $42\,558 \div 123$ . Aquí, 123 es el divisor. Nuestro algoritmo para la división da:

$$\begin{array}{r}
 42558 \overline{) 123} \\
 \underline{369} \phantom{00} \\
 565 \\
 \underline{492} \\
 738 \\
 \underline{738} \\
 0
 \end{array}$$

Es decir, multiplicamos 123 por 3 y substraemos el producto, 369, de 425; luego multiplicamos 123 por 4 y substraemos el producto, 492, de 565; por último, multiplicamos 123 por 6 y substraemos el producto, 738, de 738, para obtener un 0 de residuo. [Debido a la geometría del esquema, lo que estos pasos en realidad lo-gran es primero substraer  $3 \times 10^2$  veces el divisor del dividendo, luego  $4 \times 10$  veces el divisor de lo que queda, y luego 6 veces el divisor de lo que queda. En este momento, no ha quedado nada del dividendo, mostrando que el dividendo originalmente contenía el divisor

$$3 \times 10^2 + 4 \times 10 + 6 = 346$$

veces.]

El anterior algoritmo también funciona para la división binaria. En efecto, multiplicar el divisor por el único dígito no-cero, 1, no cambia el número; por lo tanto, el algoritmo para la división se reduce a subtracciones repetidas del divisor (un número de veces igual a una potencia de 2).

**EJEMPLO 1.16** Evalúe  $1010001 \div 11$ . Tenemos

$$\begin{array}{r}
 1010001 \overline{) 11} \\
 \underline{11} \phantom{00000} \\
 100 \\
 \underline{11} \\
 100 \\
 \underline{11} \\
 11 \\
 \underline{11} \\
 0
 \end{array}$$

Así el cociente es 11011.

Como en la división decimal de enteros, un residuo es posible cuando un entero binario se divide por otro. Además, la división de fracciones binarias se maneja de la misma manera que la división de fracciones decimales; o sea, uno convierte el divisor en un entero moviendo el punto binario tanto en el divisor como en el dividendo el mismo número de veces.

**EJEMPLO 1.17**

(a) Evalúe  $1110111 \div 1001$ . Aplicando el algoritmo usual de la división, obtenemos

$$\begin{array}{r}
 1110111 \overline{) 1001} \\
 \underline{1001} \phantom{000} \\
 1011 \\
 \underline{1001} \\
 1011 \\
 \underline{1001} \\
 10
 \end{array}$$

El cociente es 1101, con un residuo de 10.

- (b) Evalúe  $111.0000 \div 1.01$ . Primero movemos el punto binario en ambos, el divisor y el dividendo, dos lugares para convertir el divisor, 1.01, en un entero, 101; luego se divide de la manera usual:

$$\begin{array}{r}
 111 \cdot 00,000 \quad | \quad 1 \cdot 01 \\
 \underline{101} \phantom{000} \\
 10 \phantom{00} 00 \\
 \underline{101} \phantom{00} \\
 11 \phantom{00} 0 \\
 \underline{101} \phantom{00} \\
 1000 \\
 \underline{101} \phantom{00} \\
 110 \\
 \underline{101} \phantom{00} \\
 1
 \end{array}$$

El cociente es 101.1001 1001 1001...

## 1.6 COMPLEMENTOS

Los complementos aritméticos se presentan en dos situaciones aparte, pero relacionadas. Mientras que los seres humanos usan los signos  $+$  y  $-$  para denotar números positivos y negativos, el computador puede procesar datos solamente en términos de bits. Aunque es posible reservar un bit para denotar el signo de un número (digamos, 0 para  $+$  y 1 para  $-$ ), muchos computadores almacenan números negativos en forma de su complemento aritmético.

Los complementos también aparecen en la operación de sustracción. En efecto, los complementos se pueden usar para reducir la sustracción a una adición. Esto es especialmente útil para evitar la posibilidad de prestar repetidamente de una columna a otra.

Hay dos tipos de complementos, el *complemento a la base-menos-uno* y el *complemento a la base*. (El término *complemento* en sí significa el complemento a la base.) Primero discutimos estos complementos en el familiar sistema decimal, en donde se llaman respectivamente *complemento a nueve* y *complemento a diez*. Después, los discutiremos en el sistema binario, donde se llaman *complemento a unos* y *complemento a dos*, respectivamente.

### Complementos decimales

Sea  $A$  un número decimal. El complemento a nueve de  $A$  se obtiene restando 9 a cada dígito de  $A$ , y el complemento a diez de  $A$  es su complemento a nueve más uno. Por ejemplo,

Número decimal	4308	123 123	9672	751 620
Complemento a nueve	5691	876 876	0327	248 379
Complemento a diez	5692	876 877	0328	248 380

Para ilustrar el uso de los complementos en la resta, sean  $A$  y  $B$  dos enteros decimales con el mismo número de dígitos—digamos, cuatro—y suponga que  $A$  es menor que  $B$ . Podemos escribir de nuevo la diferencia  $Y = A - B$  como

$$\begin{aligned}
 Y &= B - A + (9999 + 1 - 10\,000) \\
 &= B + (9999 - A + 1) - 10\,000 \\
 &= B + [(9999 - A) + 1] - 10\,000
 \end{aligned}$$

En otras palabras, podemos calcular  $Y$  ya sea sumándole los complementos a diez de  $A$  y  $B$ , ya sea sumando el complemento a nueve de  $A$  a  $B$  y luego sumándole 1. En cualquier caso debemos sustraer 10000; pero como  $A$  y  $B$  tienen solamente cuatro dígitos, sustraerle 10000 simplemente suprimirá el 1 de adelante de la suma. Aunque evaluar  $Y$  usando complementos requiere cuatro cálculos, tiene la importante ventaja que no hay necesidad de prestar para encontrar los complementos a nueve.

**EJEMPLO 1.13** Evalúe la diferencia  $Y = B - A$ , donde  $A = 4816$  y  $B = 6142$ .

(a) Primero lo hacemos por subtracción ordinaria:

$$\begin{array}{r} 6142 \\ - 4816 \\ \hline 1326 \end{array}$$

Observe que tuvimos que prestar dos veces.

(b) Ahora sumamos el complemento a nueve de  $A$  que es 5183:

$$\begin{array}{r} 6142 \\ + 5183 \\ \hline \textcircled{1} 1325 \\ \quad \quad \quad \rightarrow 1 \\ \hline 1326 \end{array}$$

Quitamos el primer 1 (equivalente a restar 10000), y luego sumamos 1 a la suma. (A este método se le llama *lleve la punta alrededor*.)

(c) Sumamos el complemento a dieces de  $A$ , que es  $5183 + 1 = 5184$ :

$$\begin{array}{r} 6142 \\ + 5184 \\ \hline \textcircled{1} 1326 \end{array}$$

Ahora simplemente quitamos el primer 1 para obtener la solución.

El requerimiento de que  $A$  y  $B$  tengan el mismo número de dígitos no representa ninguna restricción real, ya que uno puede siempre introducir 0s al principio de un número, si es necesario. En efecto, muchos dispositivos de cálculo, incluyendo muchos computadores, usan registros y lugares de memoria en los cuales la capacidad es un número fijo de dígitos. En tales dispositivos, el primer 1, que se va a quitar, se pierde automáticamente.

**EJEMPLO 1.19** Considere una calculadora mecánica de escritorio cuyos registros pueden tener números decimales de exactamente ocho dígitos. Suponemos que la calculadora resta un número sumándole su complemento a dieces. Aún más, si en una operación de suma resultan más de ocho dígitos, entonces los dígitos más significativos, es decir, los primeros dígitos, se pierden. Dado  $A = 216$  y  $B = 563$ , queremos evaluar la diferencia  $Y = A - B$ . Los números  $A$  y  $B$  aparecerán en registros como sigue:

0	0	0	0	0	5	6	3	<b>B</b>
---	---	---	---	---	---	---	---	----------

0	0	0	0	0	2	1	6	<b>A</b>
---	---	---	---	---	---	---	---	----------

Durante el proceso de subtracción, los contenidos de los registros aparecerán como sigue:

	0	0	0	0	0	5	6	3	<b>B</b>
+	9	9	9	9	9	7	8	4	<b>Complemento de A</b>
=	0	0	0	0	0	3	4	7	<b>Diferencia</b>

El primer 1 se perdió automáticamente.



**EJEMPLO 1.21** Considere la diferencia  $Y = B - A$ , donde  $A = 110011$  y  $B = 101010$ . El complemento (a doses) de  $A$  es  $001101$ . Sumándole esto a  $B$ , obtenemos

$$\begin{array}{r} 101010 \quad B \\ + 001101 \quad \text{Complemento de } A \\ \hline 110111 \quad Z \end{array}$$

Observe que no hay un 1 en el séptimo lugar que haya que quitar. Por lo tanto,  $Z$  no es la diferencia  $Y$ . La razón para esto es que  $A$  es mayor que  $B$ . Para obtener  $Y$  debemos restar  $1000000$  de  $Z$ . En otras palabras, el negativo del complemento a doses de  $Z$ , o  $-001001$ , es la diferencia pedida  $Y$ .

## Problemas resueltos

### SISTEMA DECIMAL

- 1.1 Evalúe: (a)  $10^3$ , (b)  $10^{-2}$ , (c)  $10^0$ , (d)  $2^4$ , (e)  $2^{-1}$ , (f)  $2^0$ .

Para todo entero positivo  $n$ , se tiene que  $a^n = a \times a \times \cdots \times a$  ( $n$  factores);  $a^{-n} = 1/a^n$ ;  $a^0 = 1$ .

$$(a) \quad 10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000 \quad (d) \quad 2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

$$(b) \quad 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0.01 \quad (e) \quad 2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$$

$$(c) \quad 10^0 = 1 \quad (f) \quad 2^0 = 1$$

- 1.2 Encuentre el valor facial y el valor posicional del dígito 4 en (a) 7425, (b) 146 723, (c) 305.54, (d) 0.012 345.

El valor facial de 4 siempre es el mismo 4. Los valores posicionales son:

$$(a) \quad 10^2 = 100 \quad (b) \quad 10^4 = 10\,000 \quad (c) \quad 10^{-2} = 0.01 \quad (d) \quad 10^{-5} = 0.000\,01$$

- 1.3 Escriba de nuevo en notación expandida (a) 2468, (b) 54.321.

Expresa cada número como la suma de cada dígito multiplicado por su valor posicional.

$$(a) \quad 2468 = 2 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 6 \times 10 + 8 \times 1$$

$$(b) \quad 54.321 = 5 \times 10 + 4 \times 1 + 3 \times 10^{-1} + 2 \times 10^{-2} + 1 \times 10^{-3}$$

- 1.4 Evalúe  $7.32 + 33.3 + 24.678$ .

Escriba los números con sus puntos decimales verticalmente alineados, agréguele 0s de tal manera que todos los números tengan el mismo número de posiciones decimales, y luego efectúe la adición.

$$\begin{array}{r} 7.320 \\ 33.300 \\ + 24.678 \\ \hline 65.298 \end{array}$$

- 1.5 Calcule (a)  $62.47 - 35.7$ , (b)  $8 - 3.246$ .

Alinee verticalmente los puntos decimales, y agréguele 0s de tal manera que los números tengan el mismo número de posiciones decimales.

$$\begin{array}{r} (a) \quad \begin{array}{r} 62.47 \\ - 35.70 \\ \hline 26.77 \end{array} \quad (b) \quad \begin{array}{r} 8.000 \\ - 3.246 \\ \hline 4.754 \end{array} \end{array}$$



- 1.6 Calcule (a)  $62.04 \times 2.5$ , (b)  $0.054 \times 0.0023$ .

Multiplique como si fueran enteros. Luego coloque el punto decimal en el producto contando el número de lugares decimales en los factores.

$$(a) \begin{array}{r} 62.04 \quad (2 \text{ lugares}) \\ \times 2.5 \quad (1 \text{ lugar}) \\ \hline 31020 \\ 12408 \\ \hline 155.100 \quad (2 + 1 = 3 \text{ lugares}) \end{array}$$

$$(b) \begin{array}{r} 0.054 \quad (3 \text{ lugares}) \\ \times 0.0023 \quad (4 \text{ lugares}) \\ \hline 162 \\ 108 \\ \hline 0.0001242 \quad (3 + 4 = 7 \text{ lugares}) \end{array}$$

- 1.7 Evalúe  $64.698 \div 1.23$ .

Corra el punto decimal en el divisor, 1.23, a la derecha, haciendo al divisor un entero; luego corra el punto decimal en el dividendo, 64.698; el mismo número de lugares hacia la derecha. (En este caso, tenemos que trasladar el punto decimal 2 lugares hacia la derecha.) Luego efectúe la división.

$$\begin{array}{r} 64 \times 69.8 \quad | \quad 1 \times 23 \\ \hline 61 \quad 5 \quad 52.6 \\ 3 \quad 19 \\ 2 \quad 46 \\ \hline 73 \quad 8 \\ 73 \quad 8 \\ \hline 0 \end{array}$$

Así, el cociente es 52.6 y no hay residuo.

## SISTEMA BINARIO

- 1.8 ¿Cuántos dígitos binarios hay, qué símbolos se usan para ellos, y cómo se llaman normalmente?

Hay dos dígitos binarios, simbolizados 0 y 1. Se llaman bits.

- 1.9 Dé los valores faciales y los valores de posición de cada uno de los bits subrayados:

$$(a) 10\underline{1}10, (b) 10\underline{1}1001, (c) 101.110\underline{1}01, (d) 110.001\underline{0}1.$$

El valor facial es el bit mismo. Los valores de posición son:

$$\begin{array}{ll} (a) \quad 2^2 = 4 & (c) \quad 2^{-4} = 1/16 \\ (b) \quad 2^5 = 32 & (d) \quad 2^0 = 1 \end{array}$$

- 1.10 Escriba de nuevo en notación expandida (a) 110110, (b) 11.01101.

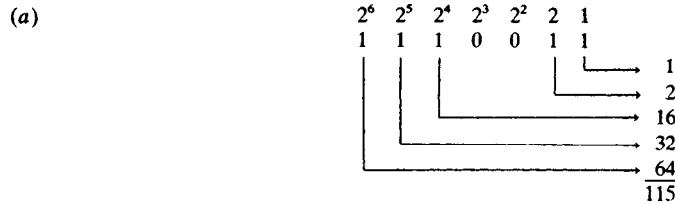
Expresé cada número binario como la suma de cada bit multiplicado por su valor de posición.

$$\begin{array}{ll} (a) & 110110 = 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2 + 0 \times 1 \\ (b) & 11.01101 = 1 \times 2 + 1 \times 1 + 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} + 0 \times 2^{-4} + 1 \times 2^{-5} \end{array}$$

## INTERCONVERSION BINARIA-DECIMAL

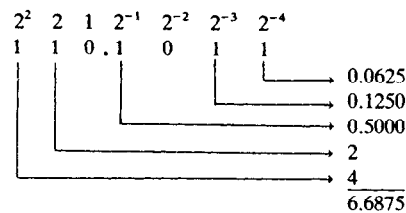
- 1.11 Convierta cada número binario a su forma decimal: (a) 1110011, (b) 110.1011.

Escriba el valor de posición sobre cada bit, y luego sume todos los valores de posición cuyos bits sean 1.



Por lo tanto, 115 es el equivalente decimal.

(b) Use la Tabla 1-1 para los valores decimales de las potencias negativas de 2.



Por lo tanto, 6.6875 es el equivalente decimal.

### 1.12 Convierta el número binario 110101 a su forma decimal.

Como 110101 es un entero, se puede convertir usando el siguiente algoritmo en lugar del método del problema 1.11(a).

**Conversión de enteros binarios:** Doble el primer dígito (el que está más hacia la izquierda) y suméelo al próximo dígito hacia la derecha. Doble la suma y suméela al próximo dígito. Repita este proceso hasta que el último dígito (el que está más hacia la derecha) sea sumado. La suma final es el equivalente decimal pedido.

Aplicando el algoritmo a 110101, doble el primer bit, 1, para obtener 2, escriba 2 bajo el segundo bit, y sume:

1	1	0	1	0	1	1
	2					$\times 2$
						2
	3					$+ 1$
						3

Ahora doble la suma, 3, para obtener 6, escriba 6 debajo del próximo bit, y sume

1	1	0	1	0	1	6
	2	6				$\times 2$
						12
	3	6				$+ 0$
						12

Doble la última suma, 6, para obtener 12, escriba 12 debajo del siguiente bit, 1, y sume para obtener 13:

1	1	0	1	0	1	12
	2	6	12			$\times 2$
						24
	3	6	13			$+ 0$
						26

Doblando la última suma, 13, resulta 26, y sumando 26 al siguiente bit, 0, se obtiene la suma 26:

1	1	0	1	0	1	26
	2	6	12	26		$\times 2$
						52
	3	6	13	26		$+ 1$
						53

Fig. 1-1



Doblando la última suma, 26, se tiene 52, y sumándole 52 al último bit, da 53:

1	1	0	1	0	1
2	6	12	26	52	
3	6	13	26	53	

Hemos encerrado en un círculo la última suma, que es el decimal equivalente pedido.

A este algoritmo se le llama *doblar las sumas o método de Horner*. Los cálculos también se pueden llevar a cabo en el formato de la fig. 1-1. Observe que uno alterna entre multiplicar por la base  $b = 2$  y sumar el siguiente dígito.

### 1.13 Convierta el número decimal $N = 437.406\ 25$ a su equivalente binario.

La parte entera de  $N$  es  $N_I = 437$ , y la parte fraccionaria de  $N$  es  $N_F = 0.406\ 25$ . Convertimos cada parte separadamente.

Divida  $N_I = 437$  y cada cociente sucesivo por 2, tomando nota de los residuos:

	Residuos
437	
218	1 ↑
109	0
54	1
27	0
13	1
6	0
3	1
1	1

Los residuos en orden inverso, como lo indica la flecha, 1 1011 0101, da el equivalente binario de  $N_I = 437$ .

Multiplique  $N_F = 0.406\ 25$  y cada parte fraccionaria sucesiva por 2, tomando nota de la parte entera de cada producto:

0.40625
× 2
0.81250
2
1.6250
2
1.250
2
0.50
2
1.0

La sucesión de partes enteras, en el orden indicado por la flecha, da el equivalente binario pedido, .01101.

Uniendo los equivalentes de  $N_I$  y  $N_F$  tenemos el equivalente binario de  $N$ :

$$N = 1\ 1011\ 0101.0110\ 1_2$$

### 1.14 Convierta el número decimal 91 a su forma binaria.

Para convertir 91 a su forma binaria use el siguiente algoritmo más bien que el método de división del problema 1.13.

**Algoritmo de sustracción:** Comenzando con el número decimal dado, reste la potencia mayor de la base 2. Repita el proceso de restar la potencia mayor de la base 2 de cada diferencia hasta obtener cero. El número binario con bit 1 en aquellos lugares cuyos valores de posición fueron restados, y con bit 0 en los demás sitios, es el equivalente binario requerido.

Usando la tabla 1-1, que es un listado de las potencias de la base 2, obtenemos:

	$2^6$	$2^5$	$2^4$	$2^3$	$2^2$	$2^1$	$2^0$
	1	0	1	1	0	1	1

91							
- 64 = $2^6$							
27							
- 16 = $2^4$							
11							
- 8 = $2^3$							
3							
- 2 = $2^1$							
1							
- 1 = $2^0$							

Así,  $91 = 1011011_2$ .

1.15 Usando la fórmula para la suma de una serie geométrica,

$$1 + r + r^2 + r^3 + \dots = \frac{1}{1-r} \quad (-1 < r < +1)$$

Verifique la conversión  $0.6 = 0.1001\ 1001\ 1001 \dots_2$ .

Tenemos

$$\begin{aligned} 0.1001\ 1001\ 1001 \dots_2 &= (1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-4}) + (1 \times 2^{-5} + 1 \times 2^{-8}) + (1 \times 2^{-9} + 1 \times 2^{-12}) + \dots \\ &= (1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-4})(1 + 2^{-4} + 2^{-8} + \dots) \end{aligned}$$

La expresión dentro de paréntesis cuadrados es una serie geométrica con  $r = 2^{-4}$ , y por lo tanto

$$\begin{aligned} 0.1001\ 1001\ 1001 \dots_2 &= (1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-4}) \left[ \frac{1}{1-2^{-4}} \right] \\ &= \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{16} \right) \left( \frac{16}{15} \right) = \left( \frac{8+1}{16} \right) \left( \frac{16}{15} \right) = \frac{9}{15} = \frac{6}{10} \end{aligned}$$

## ARITMETICA BINARIA

1.16 Evalúe las sumas binarias (a)  $11011 + 1010$ , (b)  $110.1101 + 1011.011$ .

Use la tabla 1-4.

(a)

$$\begin{array}{r} 1\ 1 \\ 11011 \\ +\ 1010 \\ \hline 100101 \end{array}$$

(b) Alinee verticalmente los puntos binarios y agregue 0s de tal manera que ambos números tengan el mismo número de lugares binarios:

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \\ 110.1101 \\ +\ 1011.0110 \\ \hline 10010.0011 \end{array}$$

1.17 Evalúe la suma binaria  $11011 + 111001 + 1001 + 11001$ .

Sume los números uno a la vez hasta un total acumulado, comenzando con el primer número:

$$\begin{array}{r}
 11011 \\
 + 111001 \\
 \hline
 1010100 \\
 + 1001 \\
 \hline
 1011101 \\
 + 11001 \\
 \hline
 1110110
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \text{Primer número} \\
 \text{Primera suma} \\
 \text{Segunda suma} \\
 \text{Suma final}
 \end{array}$$

1.18 Evalúe los siguientes productos binarios: (a)  $110110 \times 101$ , (b)  $111.001 \times 1.11$ .

Es esencial mantener un alineamiento correcto.

$$\begin{array}{r}
 (a) \quad 110110 \\
 \times 101 \\
 \hline
 110110 \\
 110110 \\
 \hline
 100001110
 \end{array}$$

Así, 1 0000 1110 es el producto requerido. Como siempre, se omite el producto por el dígito 0 de un multiplicador.

(b) Omitiendo los puntos binarios, sume los productos por cada dígito uno a la vez hasta un total acumulado, comenzando con el primer producto:

$$\begin{array}{r}
 111001 \\
 \times 111 \\
 \hline
 111001 \\
 + 111001 \\
 \hline
 10101011 \\
 + 111001 \\
 \hline
 110001111
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \text{Primer producto} \\
 \text{Segundo producto} \\
 \text{Tercer producto}
 \end{array}$$

Los factores originales contienen 3 y 2 posiciones binarias, respectivamente. Por lo tanto, el producto debe contener  $3 + 2 = 5$  posiciones binarias. Insertando un punto binario 5 posiciones hacia la derecha, obtenemos el producto requerido, 1100.01111.

1.19 Evalúe las diferencias binarias (a)  $1110001 - 111011$ , (b)  $1101.0011 - 110.11011$ .

Use la tabla 1-5

$$\begin{array}{r}
 (a) \quad 0011 \\
 1110001 \\
 - 111011 \\
 \hline
 110110
 \end{array}$$

Observe que tuvimos que prestar para la segunda diferencia, pero el primer 1 disponible estaba en la quinta columna (a partir de la derecha); por lo tanto, los dos dígitos de columna intermedios se vuelven  $10 - 1 = 1$ .

(b) Alinee verticalmente los puntos binarios, y agregue 0s de tal manera que ambos números tengan el mismo número de posiciones binarias.

$$\begin{array}{r}
 00\ 01\ 00 \\
 1101.0011 \\
 - 110.11011 \\
 \hline
 110.01011
 \end{array}$$

1.20 Evalúe  $111001 \div 1001$  hasta dos posiciones binarias.

La división binaria se reduce a restas repetidas del divisor, ya que el único dígito no-cero es 1.

$$\begin{array}{r}
 111001.00 \overline{) 1001} \\
 \underline{1001} \phantom{00} \\
 1010 \phantom{00} \\
 \underline{1001} \phantom{00} \\
 1100 \phantom{00} \\
 \underline{1001} \phantom{00} \\
 11
 \end{array}$$

El cociente hasta dos posiciones binarias es 110.01.

## COMPLEMENTOS

- 1.21 Determine los complementos a nueve y a diez de los números decimales (a) 3268, (b) 479 200, (c) 99 132 756, (d) 2 233 778 899.

Para cada número, reste cada dígito de 9 para obtener el complemento a nueve. El complemento a nueve más 1 nos da el complemento a diez.

	(a)	(b)	(c)	(d)
Complemento a nueve	6731	520 799	00 867 243	7 766 221 100
Complemento a diez	6732	520 800	00 867 244	7 766 221 101

- 1.22 Considere los números decimales del problema 1.21 como entrada a una calculadora de 8 posiciones. Encuentre los complementos a nueve y a diez de los números en la máquina.

Primero agregue 0s a la izquierda, de tal manera que cada número tenga 8 dígitos; luego encuentre los complementos.

	(a)	(b)	(c)
Número	00 003 268	00 479 200	99 132 756
Complemento a nueve	99 996 731	99 520 799	00 867 243
Complemento a diez	99 996 732	99 520 800	00 867 244

- (d) Si la calculadora ha sido construida para omitir el dígito más significativo (el primero) cuando sea introducido cualquier número con más de 8 dígitos, entonces quedará registrado como 33 778 899. En este caso tenemos

Complemento a nueve	66 221 100
Complemento a diez	66 221 101

- 1.23 Encuentre las siguientes diferencias usando los complementos (a diez):

(a) $\begin{array}{r} 53\ 726 \\ - 14\ 503 \\ \hline \end{array}$	(b) $\begin{array}{r} 215\ 743 \\ - 56\ 100 \\ \hline \end{array}$	(c) $\begin{array}{r} 71\ 566\ 220 \\ - 44\ 332\ 211 \\ \hline \end{array}$	(d) $\begin{array}{r} 2658 \\ - 4321 \\ \hline \end{array}$
---	--	---	---

Súmele el complemento a diez, y luego quite el 1 de desbordamiento (mostrado entre círculos):

(a) $\begin{array}{r} 53\ 726 \\ + 85\ 497 \\ \hline \textcircled{1}39\ 223 \end{array}$	(b) $\begin{array}{r} 215\ 743 \\ + 943\ 900 \\ \hline \textcircled{1}159\ 643 \end{array}$	(c) $\begin{array}{r} 71\ 566\ 220 \\ + 55\ 667\ 789 \\ \hline \textcircled{1}27\ 234\ 009 \end{array}$
--	---	---

- (d) Aquí no hay desbordamiento:

$$\begin{array}{r}
 2658 \\
 + 5679 \\
 \hline
 8337
 \end{array}$$

lo que significa que la diferencia es un número negativo. El complemento a diez de la suma es 1663; y, por lo tanto, la diferencia es -1663, el negativo del complemento a diez.

- 1.24 Encuentre el máximo entero positivo y el mínimo entero negativo que se pueden registrar en una calculadora de escritorio de 6 posiciones, si (a) la primera posición esta reservada para el signo del entero, (b) los números negativos se registran como sus complementos (a dieces). ¿De qué manera se pueden acomodar más números?

(a)	Máximo entero positivo	+99 999
	Mínimo entero negativo	-99 999

- (b) Suponga que el entero almacenado es positivo si su primer dígito está entre 0 y 4, y negativo si su primer dígito está entre 5 y 9. Entonces

Máximo entero positivo	499 999
Mínimo entero negativo	-500 000

en donde -500 000 ha sido registrado como su complemento a dieces, 500 000. Bajo este sistema, se pueden registrar cinco veces más números que en el sistema de la parte (a).

- 1.25 Determine los complementos a unos y a doses de los números binarios (a) 110110, (b) 11100111, (c) 110011001100, (d) 11110000111000.

Reemplace cada bit 0 por 1 y cada bit 1 por 0 para obtener el complemento a nueves. (Esto es lo mismo que restar cada bit de 1.) El complemento a unos más 1 nos da el complemento a doses.

	(a)	(b)	(c)	(d)
Complemento a unos	001001	00011000	001100110011	00001111000111
Complemento a doses	001010	00011001	001100110100	00001111001000

- 1.26 Considere los números binarios del Problema 1.25 como entrada a una calculadora con 12 posiciones binarias. Encuentre los complementos a unos y a doses de los números en la máquina.

Primero agregamos 0s a la izquierda, de tal manera que cada número tenga 12 bits. Luego encontramos los complementos.

	(a)	(b)	(c)
Número	000000110110	000011100111	110011001100
Complemento a unos	111111001001	111100011000	001100110011
Complemento a doses	111111001010	111100011001	001100110100

- (d) Si la calculadora ha sido construida para omitir los primeros bits cuando un número con más de 12 bits haya sido introducido, entonces el número se registra como 110000111000. Por lo tanto

Complemento a unos	001111000111
Complemento a doses	001111001000

- 1.27 Encuentre las siguientes diferencias usando complementos (a doses):

(a)	111000	(b)	11001100	(c)	111100001111	(d)	11000011
-	110011	-	101110	-	110011110011	-	11101000

Suma el complemento a doses y luego quite el 1 de desbordamiento (encerrado en un círculo)

(a)	111000	(b)	11001100	(c)	111100001111
+	001101	+	11010010	+	001100001101
	1000101		10011110		1001000011100

- (d) Aquí no se presenta desbordamiento:

$$\begin{array}{r} 11000011 \\ + 00011000 \\ \hline 11011011 \end{array}$$

Esto significa que la diferencia es un número negativo, el negativo del complemento a doses de la suma, o sea, -00100101.

**1.28** Resuelva el problema 1.24 para una calculadora de 8 posiciones binarias.

(a)	Máximo entero positivo	+1111111
	Mínimo entero negativo	-1111111

(b) Asuma que un número guardado es positivo si el primer bit es 0 y negativo si el primer bit es 1.

	Máximo entero positivo	01111111
	Mínimo entero negativo	-10000000

en donde  $-10000000$  ha sido registrado como su complemento a dos, que es  $10000000$ . Este segundo método puede acomodar solamente un número más de los que se puede acomodar por el primer método.

## Problemas suplementarios

### SISTEMA DECIMAL

**1.29** Evalúe (a)  $10^*$ , (b)  $10^{-3}$ , (c)  $10^{-1}$ , (d)  $2^6$ , (e)  $2^{-3}$ , (f)  $2^0$ , (g)  $2^3$ .

**1.30** Evalúe (a)  $8^3$ , (b)  $8^0$ , (c)  $8^{-2}$ , (d)  $16^2$ , (e)  $16^{-1}$ , (f)  $16^{-3}$ .

**1.31** Dé los valores de posición de cada uno de los dígitos subrayados: (a) 44 333, (b) 22 555.66, (c) 444.555, (d) 22.334 455.

**1.32** Escriba en notación expandida (a) 13 579, (b) 321.789.

**1.33** Encuentre cada suma: (a)  $835.24 + 70.456$ , (b)  $55.5 + 6.66 + 0.777$ .

**1.34** Encuentre cada diferencia: (a)  $456.7 - 35.79$ , (b)  $12 - 4.888$ .

**1.35** Encuentre cada producto: (a)  $38.24 \times 3.7$ , (b)  $0.0345 \times 1.02$ .

**1.36** Evalúe hasta dos posiciones decimales: (a)  $36 \div 11$ , (b)  $83.472 \div 2.4$ .

### SISTEMA BINARIO

**1.37** Dé el valor de posición de cada bit subrayado: (a) 111000, (b) 11001100, (c) 111.000111, (d) 11.00110011.

**1.38** Escriba de nuevo en notación expandida (a) 11001100, (b) 111.000111.

**1.39** Convierta cada número binario a su equivalente decimal: (a) 110110, (b) 111000111.

**1.40** Convierta a su equivalente decimal (a) 110.11, (b) 1010.10101.

**1.41** Convierta cada número decimal a su equivalente binario: (a) 285, (b) 473, (c) 694.

**1.42** Convierta a su equivalente binario (a) 0.390 625, (b) 24.625, (c) 0.8, (d) 0.3.

**1.43** Muestre que el equivalente decimal de una fracción que termina, también termina (en un 5).

### ARITMETICA BINARIA

**1.44** Encuentre las sumas binarias (a)  $1101 + 111$ , (b)  $110011 + 11101$ , (c)  $11100111 + 11000011$ , (d)  $110.1101 + 1011.10$

- 1.45** Encuentre las sumas binarias (a)  $11001 + 11100 + 1011 + 110011$ , (b)  $11.101 + 110.01 + 111.101 + 1101.1$ .
- 1.46** Encuentre los productos binarios (a)  $11100111 \times 11$ , (b)  $111011 \times 1011$ , (c)  $11.101 \times 11.01$ .
- 1.47** Encuentre las diferencias binarias (a)  $1100011 - 110111$ , (b)  $10101010 - 110011$ , (c)  $110.001 - 11.111$ .
- 1.48** Encuentre los cocientes binarios (a)  $1011011 \div 111$ , (b)  $100.0001 \div 10.1$ , (c)  $1011 \div 11$ .

### COMPLEMENTOS

- 1.49** Determine los complementos a nueves y a dieces de los números decimales (a) 3201, (b) 453 800, (c) 78 923 019, (d) 3 334 455 566.
- 1.50** Si los números del problema 1.49 son entrada a una calculadora decimal de 8 posiciones, encuentre sus complementos a nueves y a dieces en la máquina.
- 1.51** Encuentre los complementos a unos y a doses de los números binarios. (a) 110011, (b) 10001000, (c) 10111011101,
- 1.52** Encuentre las siguientes diferencias usando complementos: (a)  $1101 - 110$ , (b)  $11100111 - 11001100$ , (c)  $11000010 - 10111001$ , (d)  $10101 - 11011$ .

### Respuestas a los problemas suplementarios

- 1.29** (a) 10 000, (b) 0.001, (c) 0.1, (d) 64, (e)  $1/8$ , (f) 1, (g) 8
- 1.30** (a) 512, (b) 1, (c)  $1/64$ , (d) 256, (e)  $1/16$ , (f)  $1/4096$
- 1.31** (a)  $10^3 = 1000$ , (b)  $10^2 = 100$ , (c)  $10^{-2} = 0.01$ , (d)  $10^{-4} = 0.0001$
- 1.32** (a)  $1 \times 10^4 + 3 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 9 \times 10^0$   
(b)  $3 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 1 \times 10^0 + 7 \times 10^{-1} + 8 \times 10^{-2} + 9 \times 10^{-3}$
- 1.33** (a) 905.696, (b) 62.937
- 1.34** (a) 420.91, (b) 7.112
- 1.35** (a) 141.488, (b) 0.035 190
- 1.36** (a) 3.27, (b) 34.78
- 1.37** (a)  $2^3$ , (b)  $2^5$ , (c)  $2^{-2}$ , (d)  $2^{-5}$
- 1.38** (a)  $1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0$   
(b)  $1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 0 \times 2^{-3} + 1 \times 2^{-4} + 1 \times 2^{-5} + 1 \times 2^{-6}$
- 1.39** (a) 54, (b) 455
- 1.40** (a) 6.75, (b) 10.656 25
- 1.41** (a) 1 0001 1101, (b) 1 1101 1001, (c) 10 1011 0110

- 1.42** (a) 0.011001, (b) 11000.101, (c) 0.1100 1100 1100  $\dots$ , (d) 0.0 1001 1001 1001  $\dots$
- 1.43** (Ayuda: Considere la representación decimal de una potencia negativa de 2.)
- 1.44** (a) 1 0100, (b) 101 0000, (c) 1 1010 1010, (d) 1 0010.0101
- 1.45** (a) 111 0011, (b) 1 1111.000
- 1.46** (a) 10 1011 0101, (b) 10 1000 1001, (c) 1011.1100 1
- 1.47** (a) 10 1100, (b) 111 0111, (c) 10.010
- 1.48** (a) 1101, (b) 1.101, (c) 11.101010  $\dots$
- 1.49** (a) 6798, 6799 (c) 21 076 980, 21 076 981  
(b) 546 199, 546 200 (d) 6 665 544 433, 6 665 544 434
- 1.50** (a) 99 996 798, 99 996 799 (c) 21 076 980, 21 076 981  
(b) 99 546 199, 99 546 200 (d) 65 544 433, 65 544 434
- 1.51** (a) 001100, 001101 (c) 01000100010, 01000100011  
(b) 01110111, 01111000 (d) 000111111000, 000111111001
- 1.52** (a) 0111, (b) 00011011, (c) 00001001, (d) -00110





# Capítulo 2

## Codificaciones para computadores

### 2.1 INTRODUCCION

Para que puedan ser procesados por un computador, los datos deben ser codificados de alguna manera en sucesiones de bits, es decir, en números binarios. Sin embargo, la gente encuentra cadenas de símbolos, tales como

110100110110      110101100110      110110110110

muy difíciles de recordar y/o distinguirlas entre sí; para nosotros, la notación decimal más compacta —3382, 3430, 3510— es muy superior. Para cerrar la brecha entre los sistemas binario y decimal, se usan otros sistemas numéricos en relación con los computadores —principalmente, los sistemas *octal* (base  $b = 8$ ) y *hexadecimal* (base  $b = 16$ ). Por otra parte, como 8 y 16 son potencias de 2, existe una casi instantánea interconversión entre los sistemas octal y hexadecimal y el sistema binario. Por otra parte, los sistemas octal y hexadecimal son comparables, en cuanto lo compacto, con el sistema decimal.

### 2.2 SISTEMAS NUMERICOS

Cualquier número positivo  $b > 1$  puede ser escogido como base para un sistema numérico posicional similar al sistema decimal ( $b = 10$ ) o al sistema binario ( $b = 2$ ). Tal sistema usa  $b$  símbolos para los enteros

$$0, 1, 2, 3, \dots, b-1$$

Estos símbolos se denominan *dígitos* del sistema.

Todo entero  $N$  se representa en el sistema por una sucesión de dígitos en base  $b$ :

$$N = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$$

Entonces  $b^k$  es el valor posicional de  $a_k$ , y

$$N = a_n \times b^n + a_{n-1} \times b^{n-1} + \dots + a_2 \times b^2 + a_1 \times b^1 + a_0 \times b^0$$

se denomina *forma expandida* o *notación expandida* para  $N$ .

Más generalmente, cualquier número  $M$  se representa en el sistema por una sucesión de dígitos con, posiblemente, un punto para la base  $b$  intercalado. (También incluimos un subíndice  $b$  al final del número, si existe alguna ambigüedad en cuanto la base.) Como en los sistemas decimal y binario, los valores posicionales de los dígitos a la derecha del punto para la base  $b$  son las potencias negativas de  $b$ .

**EJEMPLO 2.1** Considere el sistema de numeración con base  $b = 5$  (*quintal*), cuyos dígitos son 0, 1, 2, 3, 4.

(a) Dado  $N = 41323_5$ , entonces

$$N = 4 \times 5^4 + 1 \times 5^3 + 3 \times 5^2 + 2 \times 5 + 3 \times 1$$

es la forma expandida para  $N$ . Calculando encontramos que

$$N = 4 \times 625 + 1 \times 125 + 3 \times 25 + 2 \times 5 + 3 \times 1 = 2500 + 125 + 75 + 10 + 3 = 2713$$

Es decir, 2713 es la representación decimal de  $N$ .

(b) Dado  $M = 32.304_5$ , entonces

$$M = 3 \times 5 + 2 \times 1 + 3 \times 5^{-1} + 0 \times 5^{-2} + 4 \times 5^{-3}$$

es la forma expandida para  $M$ . Observe que las potencias negativas de 5 corresponden a los dígitos a la derecha del punto quintal. De nuevo calculando, encontramos que

$$M = 3 \times 5 + 2 \times 1 + 3 \times 0.2 + 0 \times 0.04 + 4 \times 0.008 = 15 + 2 + 0.6 + 0 + 0.032 = 17.632$$

En otras palabras, 17.632 es la representación decimal de  $M$ .

### Conversión base $b$ a decimal

Se puede convertir un número en base  $b$ ,  $N_b$ , en su representación decimal escribiendo  $N_b$  en notación expandida y calculando por aritmética decimal, como en el ejemplo 2.1. Esta conversión también se puede lograr con el siguiente algoritmo, que distingue entre la parte entera y la parte fraccionaria del número.

#### Conversión de base $b$ a representación decimal:

- (i) **Parte entera.** Multiplique el dígito que está más hacia la izquierda por la base  $b$  y sume el siguiente dígito a la derecha. Multiplique la suma por la base  $b$  y súmeselo al siguiente dígito. Repita el proceso hasta que el dígito que está más hacia la derecha sea sumado.
- (ii) **Parte fraccionaria.** Multiplique el dígito que está más hacia la derecha por  $1/b$  y sume el siguiente dígito hacia la izquierda. Multiplique la suma por  $1/b$  y sume el siguiente dígito. Repita el proceso hasta que el dígito que está más hacia la izquierda sea sumado y la suma multiplicada por  $1/b$ . El producto final es el equivalente decimal que se quiere.

La parte (ii) presupone que la parte fraccionaria del número en base  $b$  termina. En (i) el proceso termina cuando el último dígito sea sumado, pero en (ii) el proceso termina cuando el último dígito sea sumado y la suma sea multiplicada por  $1/b$ .

**EJEMPLO 2.2** Considere el número quintal  $N = 2401.2314_5$ . Entonces  $N_I = 2401$  es la parte entera del número y  $N_F = 0.2314$  es la parte fraccionaria.

(a) Convertimos  $N_I$  en su forma decimal usando (i) del anterior algoritmo.

$$\begin{array}{r}
 2 \\
 \times 5 \\
 \hline
 10 \\
 + 4 \\
 \hline
 14 \\
 \times 5 \\
 \hline
 70 \\
 + 0 \\
 \hline
 70 \\
 \times 5 \\
 \hline
 350 \\
 + 1 \\
 \hline
 351 \quad \text{Suma final}
 \end{array}$$

Así, 351 es la forma decimal para  $N_I$ .

(b) Convertimos  $N_F$  a su forma decimal usando (ii) del anterior algoritmo. Primero observamos que

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{5} = 0.2$$

Siempre que multipliquemos por  $1/b$ , obtendremos un número menor que uno (véase el problema 2.6). Por lo tanto, podemos sumar el siguiente dígito simplemente escribiendo el dígito en frente del producto. En otras palabras,

$$\begin{array}{r}
 4 \\
 \times .2 \\
 \hline
 \textcircled{1}.8 \\
 \times .2 \\
 \hline
 \textcircled{3}.36 \\
 \times .2 \\
 \hline
 \textcircled{2}.672 \\
 \times .2 \\
 \hline
 .5344 \quad \text{Producto final}
 \end{array}$$

Hemos encerrado en círculos los dígitos que se han sumado. El producto final, 0.5344, es la forma decimal para  $N_F$ .

La representación decimal de  $N$  se obtiene escribiendo las representaciones decimales de  $N_I$  y  $N_F$  juntas:

$$N = N_I + N_F = 351.5344$$

### Conversión decimal a base $b$

Sea  $N$  un número decimal con parte entera  $N_I$  y parte fraccionaria (que termina)  $N_F$ . Podemos convertir  $N$  a su representación en base  $b$  usando el siguiente algoritmo, que también diferencia entre la parte entera y la parte fraccionaria del número.

#### Conversión de decimal a representación en base $b$

- (i) **Parte entera.** Divida  $N_I$  y cada cociente sucesivo por  $b$  hasta obtener un cociente cero. La sucesión de residuos, en orden inverso, da la representación en base  $b$  de  $N_I$ .
- (ii) **Parte fraccionaria.** Multiplique  $N_F$ , y la parte fraccionaria de cada producto sucesivo, por  $b$ , hasta obtener una parte fraccionaria cero o una parte fraccionaria duplicada. Entonces la sucesión finita o la sucesión infinita periódica de partes enteras del producto da la representación en base  $b$  de  $N_F$ .

Es de notar que cada residuo en (i) es menor que  $b$  y, por lo tanto, es un dígito en base  $b$ , y que cada parte entera en (ii) también es menor que  $b$  y, por lo tanto, es un dígito en base  $b$ .

### EJEMPLO 2.3

- (a) Para convertir el número decimal  $A = 684$  a su representación quintal (base 5) dividimos  $A$ , y cada cociente sucesivo, por  $b = 5$ , tomando nota de todos los residuos:

Divisiones	Cocientes	Residuos		Residuos
$684 \div 5$	136	4	o	684
$136 \div 5$	27	1		136
$27 \div 5$	5	2		27
$5 \div 5$	1	0		5
$1 \div 5$	0	1		1
				Residuos
				4
				1
				2
				0

La sucesión de residuos en orden invertido, como indican las flechas, da la forma quintal de  $A$ . En otras palabras,  $A = 102414_5$ .

- (b) Para convertir el número decimal  $B = 0.4704$  a su representación quintal (base 5) multiplicamos  $B$ , y cada parte fraccionaria sucesiva, por  $b = 5$ , tomando nota de la parte entera de cada producto:

Multiplicaciones	Partes enteras		0.4704
$0.4704 \times 5 = 2.3520$	2	o	$\times 5$
$0.352 \times 5 = 1.760$	1		2.3520
$0.76 \times 5 = 3.80$	3		5
$0.8 \times 5 = 4.0$	4		1.760
			5
			3.80
			5
			4.0

La sucesión de partes enteras, como indican las flechas, da la forma quintal requerida para  $B$ . En otras palabras,  $B = 0.2134_5$ .

- (c) Convertimos el número decimal  $N = 684.4704$  a su forma quintal sumando las representaciones quintales encontradas en (a) y en (b):

$$N = A + B = 10214.2134_5$$

- (d) Procediendo como en (b), convertimos el número decimal  $C = 0.4703$  a base 5 como sigue:

$$\begin{array}{r}
 0.4703 \\
 \times 5 \\
 \hline
 2.3515 \\
 \times 5 \\
 \hline
 1.7575 \\
 \times 5 \\
 \hline
 3.7875 \\
 \times 5 \\
 \hline
 3.9375^* \\
 \times 5 \\
 \hline
 4.6875 \\
 \times 5 \\
 \hline
 3.4375 \\
 \times 5 \\
 \hline
 2.1875 \\
 \times 5 \\
 \hline
 0.9375^*
 \end{array}$$

El octavo producto tiene la misma parte fraccionaria del cuarto producto. Por lo tanto, el bloque 4320 de partes enteras se obtendrá una y otra vez, de tal manera que

$$C = 0.2133\ 4320\ 4320\ 4320 \dots_5$$

### 2.3 SISTEMA OCTAL

El sistema numérico octal es el sistema que tiene como base  $b = 8$ . Los dígitos octales son 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7. Como  $8 = 2^3$ , cada dígito octal tiene una única representación binaria de 3 bits, dada en la tabla 2-1. Los valores de posición del sistema octal son potencias de 8; algunas de estas potencias aparecen en la tabla 2-2.

Tabla 2-1

Dígitos octales	Equivalentes binarios
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

Tabla 2-2

Valores de posición octal	Valores decimales
$8^{-3}$	$1/512 = 0.001\ 953\ 125$
$8^{-2}$	$1/64 = 0.015\ 625$
$8^{-1}$	$1/8 = 0.125$
$8^0$	1
$8^1$	8
$8^2$	64
$8^3$	512
$8^4$	4 096
$8^5$	32 768

#### Interconversión octal-decimal

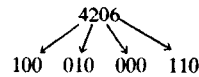
La conversión entre los sistemas octal y decimal se logra por medio de los dos algoritmos de la sección 2.2, con  $b = 8$ . La conversión octal a decimal también se puede efectuar por evaluación decimal de la forma octal expandida.

### Interconversión octal-binaria

Se puede visualizar cada dígito octal simplemente como una notación abreviada para el valor equivalente en 3 bits que aparece en la tabla 2-1. Según esto, convierta un número octal a su forma binaria reemplazando cada dígito octal por su equivalente binario. Recíprocamente, convierta un número binario a su forma octal particionando el número en bloques de 3 bits (comenzando desde el punto binario y agregando ceros si es necesario) y reemplazando cada bloque por su dígito octal equivalente.

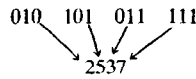
#### EJEMPLO 2.4

- (a) Para convertir  $4206_8$  a su equivalente binario, reemplace cada dígito octal por su equivalente en 3 bits como sigue:



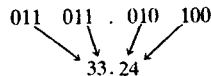
Así,  $100010000110$  es el equivalente binario de  $4206_8$ .

- (b) Para convertir  $1010101111_2$  a su equivalente octal, particione el número binario en bloques de 3 bits, comenzando con el bit que está más hacia la derecha, y reemplazando luego cada bloque por su dígito octal equivalente:



Así,  $2537$  es el equivalente octal de  $1010101111_2$ . (Observe que se antepuso un bit 0 al número binario de tal manera que el número de bits resultará un múltiplo de tres.)

- (c) Para convertir  $11011.0101_2$  a su forma octal, particione el número binario en bloques de 3 bits, comenzando hacia la izquierda y hacia la derecha del punto binario, y luego reemplace cada bloque por su dígito octal equivalente:



Así,  $33.24$  es la forma octal del número binario dado.

### Aritmética octal

Cubriremos solamente la adición y la sustracción octales, esta última usando complementos. (La multiplicación y la división octales están más allá de los objetivos de este libro.)

La suma de dos números octales se puede reducir por el algoritmo común de la adición repetida de dos dígitos octales (posiblemente llevando un 1). Esto conlleva el uso repetido de la tabla 2-3, lo cual sería más bien tedioso.

Tabla 2-3 Adición de dígitos octales

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	12	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	16

Por otra parte tenemos lo siguiente:

**Observación:** La suma de dos dígitos en base  $b$ , o de dos dígitos en base  $b$  más uno, es menor que  $2b$ .

Esto significa que dividiendo tal suma por  $b$ , solamente puede dar un residuo de 0 ó de 1. Según ésto, tenemos el siguiente resultado útil:

**Adición octal:** La suma de dos dígitos octales, o la suma de dos dígitos octales más uno, se puede obtener (i) encontrando su suma decimal y (ii) modificando la suma decimal, si ha pasado de 7, restando 8 y llevando un 1 a la próxima columna.

**EJEMPLO 2.5** Evalúe (a)  $5_8 + 4_8$ , (b)  $6_8 + 7_8$ , (c)  $3_8 + 2_8$ , (d)  $7_8 + 4_8$ , (e)  $1_8 + 4_8 + 2_8$ , (f)  $1_8 + 6_8 + 3_8$ , (g)  $1_8 + 5_8 + 6_8$ .

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)
	5	6	3	7	1	1	1
	+4	+7	+2	+4	4	6	5
<b>Suma decimal</b>	9	13	5	11	7	10	12
<b>Modificación</b>	-8	-8	-0	-8	-0	-8	-8
<b>Suma octal</b>	11	15	5	13	7	12	14

El 1 que se lleva asociado con una resta de 8 se muestra como el octavo dígito, ya que estamos sumando solamente una columna de dígitos.

#### EJEMPLO 2.6

- (a) Para evaluar la suma octal  $7346_8 + 5263_8$ , alinee los dos números en la manera usual y aplique separadamente a cada columna la regla para la adición de dígitos octales. Observe cómo lo que se lleva, que resulta cuando se resta 8 en el paso de modificación, va desde la parte más inferior de la columna hasta la parte más superior de la siguiente columna hacia la izquierda.

1		1		1				
	7	3		4		6		
	+5	2		6		3		
	12	6		11		9		
	-8	-0		-8		-8		
1	4	6		3		1		

Sumas decimales  
Modificaciones  
Suma octal

Así,  $14631_8$  es la suma octal deseada.

- (b) Para evaluar la diferencia octal  $Y = B - A$ , en donde  $A = 3142_8$  y  $B = 7526_8$ , encuentre primero el complemento a la base menos uno (a siete) de  $A$  restando de 7 cada dígito de  $A$ . Luego sume 1 para obtener el complemento (a la base) de  $A$ :

Complemento a siete de A    4635  
Complemento de A            4636

Ahora sumamos los complementos de  $A$  y  $B$ :

1	1		1					
	7	5		2		6		
	+4	6		3		6		
	12	11		6		12		
	-8	-8		-0		-8		
①	4	3		6		4		

B  
Complemento de A  
Sumas decimales  
Modificaciones  
Suma octal

Quitando el 1 entre el círculo, finalmente encontramos la diferencia pedida,  $Y = 4364_8$ .

## 2.4 SISTEMA HEXADECIMAL

El sistema numérico con base  $b = 16$  se llama sistema hexadecimal (a veces abreviado *hex*).

Tabla 2-4

Dígitos hexadecimales	Valores decimales	Equivalentes binarios
0	0	0000
1	1	0001
2	2	0010
3	3	0011
4	4	0100
5	5	0101
6	6	0110
7	7	0111
8	8	1000
9	9	1001
A	10	1010
B	11	1011
C	12	1100
D	13	1101
E	14	1110
F	15	1111

Tabla 2-5

Valores de posición hexadecimal	Valores decimales
$16^{-3}$	$1/4096 = 0.000\ 244\ 140\ 625$
$16^{-2}$	$1/256 = 0.003\ 906\ 25$
$16^{-1}$	$1/16 = 0.062\ 5$
$16^0$	1
$16^1$	16
$16^2$	256
$16^3$	4 096
$16^4$	65 536
$16^5$	1 048 576

El sistema requiere 16 dígitos, para los cuales los símbolos son los 10 dígitos decimales junto con las 6 primeras letras del alfabeto (véase la tabla 2-4). Como  $16 = 2^4$ , cada dígito hexadecimal tiene una única representación de 4 bits, que también se ilustra en la tabla 2-4. Los valores de posición en el sistema hexadecimal son las potencias de 16, algunas de las cuales están, junto con sus valores decimales, en la tabla 2-5.

#### Interconversión hexadecimal-decimal

La conversión entre los sistemas hexadecimal y decimal se logra por medio de los dos algoritmos de la sección 2.2, con  $b = 16$ . Hay una dificultad adicional, ya que tenemos que saber cómo manejar los dígitos A, B, C, D, E, y F. También se puede convertir de hexadecimal a decimal por evaluación decimal de la forma hexadecimal expandida.

#### EJEMPLO 2.7

- (a) Para convertir  $73D5_{16}$  a su equivalente decimal, exprese el número en notación expandida, cambiando la D por 13, y luego calcule usando aritmética decimal.

$$73D5_{16} = 7 \times 16^3 + 3 \times 16^2 + 13 \times 16^1 + 5 \times 16^0 = 7 \times 4096 + 3 \times 256 + 13 \times 16 + 5 \times 1$$

$$= 28\ 672 + 768 + 208 + 5 = 29\ 653$$

Alternativamente, uno puede aplicar el algoritmo de conversión como sigue:

$$\begin{array}{r}
 7 \\
 \times 16 \\
 \hline
 112 \\
 + 3 \\
 \hline
 115 \\
 \times 16 \\
 \hline
 1840 \\
 + 13 \\
 \hline
 1853 \\
 \times 16 \\
 \hline
 29648 \\
 + 5 \\
 \hline
 29653 = 73D5_{16}
 \end{array}$$

- (b) Convierta  $39.B8_{16}$  a su equivalente decimal como sigue:

$$\begin{aligned} 39.B8_{16} &= 3 \times 16^1 + 9 \times 16^0 + 11 \times 16^{-1} + 8 \times 16^{-2} \\ &= 3 \times 16 + 9 \times 1 + 11 \times 0.0625 + 8 \times 0.00390625 \\ &= 48 + 9 + 0.6875 + 0.03125 = 57.71875 \end{aligned}$$

Para convertir el número decimal  $P = 9719$  a su equivalente hexadecimal, divida  $P$ , y cada cociente sucesivo, por la base  $b = 16$ , tomando nota de los residuos, como sigue:

Divisiones	Cocientes	Residuos
$9719 \div 16$	607	7
$607 \div 16$	37	15
$37 \div 16$	2	5
$2 \div 16$	0	2

La sucesión de residuos, en los cuales reemplazamos el residuo decimal 15 por el dígito hexadecimal  $F$ , en orden inverso, da la forma hexadecimal para  $P$ ; o sea,  $P = 25F7_{16}$ . (Como la división por 16 normalmente requiere una división larga, más que una corta, no tenemos la forma compacta para obtener los residuos como los tuvimos para las bases 2, 5 y 8.)

- (d) Para convertir la fracción decimal  $Q = 0.78125$  a su equivalente hexadecimal, aplicamos el algoritmo parte entera, con  $b = 16$ , como sigue:

Multiplicaciones	Partes enteras
$0.78125 \times 16 = 12.50000$	12
$0.50000 \times 16 = 8.00000$	8

En este caso, se ha llegado a una parte fraccionaria cero. La sucesión de partes enteras, en las cuales reemplazamos el 12 decimal por el dígito hexadecimal  $C$ , da la forma hexadecimal requerida para  $Q$ ; es decir  $Q = 0.C8_{16}$ .

- (e) Para convertir el número decimal  $N = 9719.78125$  a su forma hexadecimal, sumamos las representaciones encontradas en (c) y en (d):

$$N = P + Q = 25F7.C8_{16}$$

### Interconversión hexadecimal-binaria

Esta se logra exactamente como en la interconversión octal-binaria, excepto que los equivalentes de 4 bits no intervienen.

Tabla 2-6 Adición de dígitos hexadecimales

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
B	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A
C	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B
D	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C
E	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D
F	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E



### Aritmética hexadecimal

Como en el sistema octal, cubrimos solamente la adición hexadecimal, y la substracción hexadecimal usando complementos.

La suma de dos números hexadecimales se puede reducir al uso repetido de la tabla 2-6, la adición de dígitos hexadecimales. Como en la adición octal, tenemos un método alternativo, basado en el siguiente resultado análogo:

**Adición hexadecimal:** La suma de dos dígitos hexadecimales o la suma de dos dígitos hexadecimales más 1, puede obtenerse (i) encontrando la suma decimal y (ii) modificando la suma decimal, si pasa de 15, restando 16 y llevando un 1 a la siguiente columna.

Como en este caso la base pasa de diez, necesitamos cambiar mentalmente cada dígito hexadecimal letra a su forma decimal cuando encontremos la suma decimal, y cada diferencia decimal mayor que nueve a su forma hexadecimal cuando se modifica la suma decimal. En otras palabras, debemos memorizar las equivalencias.

A = 10      B = 11      C = 12      D = 13      E = 14      F = 15

**EJEMPLO 2.8** Evaluar las sumas hexadecimales (a) 8 + 9, (b) 3 + 5, (c) 6 + 7, (d) A + 9, (e) C + D, (f) 3 + B, (g) F + D, (h) 1 + 4 + 6, (i) 1 + 5 + C, (j) 1 + E + 6.

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)	(i)	(j)
	8	3	6	A	C	3	F	1	1	1
	+ 9	+ 5	+ 7	+ 9	+ D	+ B	+ D	+ 6	+ C	+ 6
Suma decimal	17	8	13	19	25	14	28	11	18	21
Modificación	- 16	- 0	- 0	- 16	- 16	- 0	- 16	- 0	- 16	- 16
Suma hexadecimal	11	8	D	13	19	E	1C	B	12	15

De nuevo, el 1 que se lleva está escrito en la siguiente columna a la suma.

### EJEMPLO 2.9

(a) Para evaluar la suma hexadecimal C868 + 72D9, aplique la regla de la adición columna por columna, llevando, si es necesario, de abajo de la columna a la parte de arriba de la siguiente columna hacia la izquierda.

1	C	8	6	8	
	+ 7	2	D	9	
	19	11	20	17	Sumas decimales
	- 16	- 0	- 16	- 16	Modificaciones
1	3	B	4	1	Suma hexadecimal

Así, 13B41 es la suma hexadecimal deseada.

(b) Para evaluar la diferencia hexadecimal  $Y = L - M$ , en donde  $L = 72A4$  y  $M = 4E86$ , primero encuentre el complemento a la base menos uno (a quince) de  $M$  restando cada dígito de  $M$  de 15, y luego súmalo 1 para obtener el complemento (a la base) de  $M$ .

Complemento a quince de M    B179  
Complemento de M            B17A

Ahora sumamos el complemento de M a L:

1	7	2	A	4	L
	+ B	1	7	A	Complemento de M
	18	4	17	14	Sumas decimales
	- 16	- 0	- 16	- 0	Modificaciones
①	2	4	1	E	Suma hexadecimal

Quitando el 1 entre el círculo, obtenemos finalmente la diferencia requerida,  $Y = 241E$ .

## 2.5 CODIFICACIONES BCD DE 4 BITS

Hay muchas maneras de representar datos numéricos en forma binaria. Uno puede simplemente escribir el número en base 2. A esto se le llama codificación binaria directa y se discute en el capítulo 3. Otra manera es codificar los números decimales dígito por dígito. A esta codificación, que requiere por lo menos 4 bits por cada dígito decimal, se le llama codificación *BCD* (*binary-coded decimal* —decimal codificado en binario—). En esta sección se discutirán dos de las codificaciones con 4 bits más comunes; en la sec. 2.6 se discutirán las codificaciones BCD que usan 6 u 8 bits.

Tabla 2.7

Dígitos decimales	Codificaciones BCD	
	8-4-2-1	XS-3
0	0000	0011
1	0001	0100
2	0010	0101
3	0011	0110
4	0100	0111
5	0101	1000
6	0110	1001
7	0111	1010
8	1000	1011
9	1001	1100

### Codificación BCD ponderada 8-4-2-1

En la tabla 2-7 se muestran dos codificaciones BCD de 4 bits. La primera es una codificación ponderada, en la cual se les dan a los bits, de izquierda a derecha, los pesos 8, 4, 2, y 1, respectivamente. Como estos pesos son precisamente los valores de posición en el sistema binario, un dígito decimal está codificado como su representación binaria.

**EJEMPLO 2.10** La representación BCD 8-4-2-1 de  $N = 469$  es

4	6	9
0100	0110	1001

Por otra parte, la representación binaria directa de  $N$  es

$$N = 111010101_2$$

que usa 3 bits menos

Otras codificaciones ponderadas con 4 bits se usan a veces, y estas son decodificadas de la misma manera. Así, para la codificación ponderada BCD 4-2-2-1,

$$1000 \rightarrow 4$$

$$0111 \rightarrow 2 + 2 + 1 = 5$$

$$1110 \rightarrow 4 + 2 + 2 = 8$$

(Observe que la *codificación* no es única en este sistema; mejor dicho,  $2 \rightarrow 0010$  y  $2 \rightarrow 0100$ . Lo mismo sucede con todas las codificaciones ponderadas con 4 bits diferentes de la 8-4-2-1.) Por una codificación BCD de 4 bits entendemos la 8-4-2-1, a no ser que específicamente se diga lo contrario.

### Codificación BCD XS-3 no ponderada

La segunda codificación BCD en la tabla 2-7 es la codificación BCD *exceso-tres* (XS-3). Esta codificación no ponderada está relacionada con la BCD 8-4-2-1 ponderada como sigue: la codificación XS-3 para un dígito decimal  $d$  se obtiene sumando  $3 = 0011_2$  a la codificación BCD 8-4-2-1 para  $d$ .

**EJEMPLO 2.11** Uno codifica el entero decimal  $N = 469$  en XS-3 como sigue:

4	6	9	Dígitos decimales
0100	0110	1001	Codificación BCD 8-4-2-1
+ 0011	+ 0011	+ 0011	Adición de tres
0111	1001	1100	Codificación BCD XS-3

Para el entero decimal  $L = 530$ , análogamente la codificación es

5	3	0
0101	0011	0000
+ 0011	+ 0011	+ 0011
1000	0110	0011

La XS-3 tiene una propiedad aritmética importante: *codifica un par de complementos a nueve como un par de complementos a unos*. (Esto se verifica en el ejemplo 2,11 para los complementos a nueve 469 y 530.) En virtud de esta característica, la aritmética en la codificación BCD XS-3 es más sencilla en muchos aspectos que la aritmética en la codificación BCD 8-4-2-1.

### Comparación con la codificación binaria directa

Las codificaciones BCD tienen varias ventajas y desventajas al compararlas con la codificación binaria directa. En el aspecto positivo, la conversión entre decimal y BCD es mucho más sencilla que entre decimal y binaria directa. Además, no hay error de redondeo en la codificación BCD, pero puede haberlo en la codificación binaria directa. Por ejemplo, la codificación binaria directa de la fracción decimal 0.6 es (véase el problema 1.15)

0.1001 1001 1001 ...

de tal manera que necesariamente habrá algún error al representar 0.6 en el computador. Por otra parte, la codificación binaria directa comúnmente requiere menos bits para representar un número que las codificaciones BCD; y efectuar operaciones aritméticas con codificación binaria directa es más fácil que con la codificación BCD.

**Observación:** Cualquier codificación de 4 bits permite  $2^4 = 16$  combinaciones. Debido a que las codificaciones BCD de 4 bits necesitan solamente 10 de las combinaciones para representar los dígitos decimales, 6 combinaciones quedan disponibles para otros usos (por ejemplo para codificar los signos más y menos).

## 2.6 CODIFICACION BCD DE 6 BITS

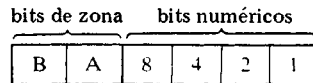
El computador procesa tanto datos numéricos como no numéricos. (Los datos no numéricos pueden incluir números, como el número de una calle, con los cuales sin embargo no se calcula.) Los datos no numéricos se expresan con un conjunto de caracteres compuesto por 10 dígitos, 26 letras, y una docena de *caracteres especiales*. Normalmente, un conjunto de caracteres incluye los 48 caracteres que se muestran en la fig. 2-8 en la cual el carácter — significa un espacio en blanco).

Dígitos	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Caracteres alfabéticos	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
	U	V	W	X	Y	Z				
Caracteres especiales	+	-	*	/	.	,	=	\$	(	)

Figura 2-1

Algunos conjuntos de caracteres contienen otros caracteres especiales, tales como los símbolos de desigualdades (< y >), el signo de interrogación (?), etc. Los datos de naturaleza tanto numérica como no numérica se llaman datos alfanuméricos. Claramente, una codificación de 4 bits, con sus 16 combinaciones, es insuficiente para representar datos alfanuméricos; pero también puede suceder lo mismo con una codificación de 6 bits, con capacidad para  $2^6 - 36 = 28$  caracteres especiales.

La codificación BCD de 6 bits agrega dos bits, llamados *bits de zona* y rotulados *posición B* y *posición A*, a los cuatro *bits numéricos* 8-4-2-1, como se muestra:



Los dígitos se codifican con 0s para ambos bits de zona y su codificación BCD 8-4-2-1 para los bits numéricos (excepto el dígito 0, que se codifica como si fuera diez). Los caracteres alfabéticos y los especiales se codifican combinando tanto los bits de zona como los bits numéricos. La codificación BCD de 6 bits para todas las letras y dígitos, y algunos de los caracteres especiales, aparecen en la tabla 2-8. Aunque una codificación de 6 bits está particionada en dos bits de zona y cuatro numéricos, a veces se especifica en términos de dos dígitos octales. Observe que las letras se dividen en tres grupos: las primeras nueve, de A a I, tienen bits de zona 11; las siguientes nueve, de J a R, tienen bits de zona 10; y las restantes tienen bits de zona 01.

En realidad, una codificación de 6 bits aparece dentro del computador en forma de 7 bits. El séptimo bit, llamado el *bit de verificación o bit de paridad*, se incluye como se muestra:

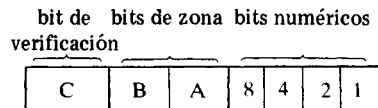


Tabla 2-8 Codificación BCD de 6 bits

Carac.	Zona	Número	Octal	Carac.	Zona	Número	Octal
A	11	0001	61	1	00	0001	01
B	11	0010	62	2	00	0010	02
C	11	0011	63	3	00	0011	03
D	11	0100	64	4	00	0100	04
E	11	0101	65	5	00	0101	05
F	11	0110	66	6	00	0110	06
G	11	0111	67	7	00	0111	07
H	11	1000	70	8	00	1000	10
I	11	1001	71	9	00	1001	11
J	10	0001	41	0	00	1010	12
K	10	0010	42				
L	10	0011	43	Carac.	Zona	Número	Octal
M	10	0100	44	+	11	0000	60
N	10	0101	45	-	10	0000	40
O	10	0110	46	*	10	1100	54
P	10	0111	47	/	01	0001	21
Q	10	1000	50	=	00	1011	13
R	10	1001	51	(	01	1100	34
S	01	0010	22	)	11	1100	74
T	01	0011	23	.	11	1011	73
U	01	0100	24	;	10	1110	56
V	01	0101	25	\$	10	1011	53
W	01	0110	26	blanco	00	0000	00
X	01	0111	27				
Y	01	1000	30				
Z	01	1001	31				

Por cada carácter, el valor del bit de verificación (0 ó 1) es tal que hace a la suma de los bits, incluyendo el bit de verificación, impar o par, según que la máquina funcione con paridad impar o par.

**EJEMPLO 2.12** Si el computador usa paridad impar, los caracteres 7, 9, P y W se almacenan como sigue:

	Verifi- cación	Zona	Número
7	0	0 0	0 1 1 1
9	1	0 0	1 0 0 1
P	1	1 0	0 1 1 1
W	0	0 1	1 1 0 0

Es decir, el bit de verificación para 7 es 0, porque la suma de los bits en la codificación de 6 bits para 7 es tres, que ya es impar. Por otra parte, el bit de verificación para P es 1, porque la suma de los bits en la codificación de 6 bits para P es cuatro, que es par.

El propósito del bit de verificación es asegurarse que ningún bit se pierda o gane cuando los datos se transmiten internamente en un computador. Después de que un carácter ha sido transmitido, el computador suma los bits en el carácter. Si ha ocurrido un solo error, la suma de los bits no tendrá la misma paridad que la paridad del computador. El computador volverá entonces a transmitir los datos. Claramente, el computador no puede usar este tipo de verificación para ver si han ocurrido dos errores, pero tal ocurrencia es muy improbable.

*Observación:* Un bit extra de verificación también se usa en la codificación BCD de 4 bits.

## 2.7 CODIFICACIONES BCD DE 8 BITS

El procesamiento moderno de datos frecuentemente requiere más de los 28 caracteres especiales posibles bajo la codificación BCD de 6 bits. (En efecto, algunos equipos de procesamiento de datos pueden requerir tanto minúsculas como mayúsculas.) Por lo tanto, se han desarrollado varias codificaciones de 8 bits. Cada carácter codificado, o *byte*, se divide normalmente en *cuatro bits* de zona, y cuatro *bits* numéricos 8-4-2-1, como se muestra:

bits de zona				bits numéricos			
Z	Z	Z	Z	8	4	2	1

(Más generalmente, la palabra “byte” se usa para denotar cualquier grupo de ocho bits.) Se ha visto que un byte se puede representar por dos dígitos hexadecimales, el primero correspondiente a los bits de zona y el segundo a los bits numéricos. Como en las codificaciones BCD de 4 y 6 bits, un bit de verificación, extra, se utiliza en el computador.

Hay dos codificaciones BCD de 8 bits que predominan en la industria de los computadores hoy:

**EBCDIC**, que se pronuncia “ib-si-dik” y que es una abreviación de Extended Binary-Coded Decimal Interchange Code (Codificación Extendida de Intercambio Codificado en Binario Decimal). Esta codificación fue desarrollada por la IBM y por los sistemas de computación compatibles con IBM. Véase la tabla 2-9.

**ASCII-8**, pronunciado “as-ki” y que es una abreviación de American Standard Code for Information Interchange (Codificación Estándar Americana para Intercambio de Información). Esta codificación fue originalmente desarrollada como una

Tabla 2-9 EBCDIC

Carac.	Zona	Número	Hex.	Carac.	Zona	Número	Hex.	Carac.	Zona	Número	Hex.
A	1100	0001	C1	S	1110	0010	E2	blanco	0100	0000	40
B	↓	0010	C2	T	↓	0011	E3		↓	1011	4B
C	↓	0011	C3	U	↓	0100	E4	<	↓	1100	4C
D	↓	0100	C4	V	↓	0101	E5	(	↓	1101	4D
E	↓	0101	C5	W	↓	0110	E6	+	0100	1110	4E
F	↓	0110	C6	X	↓	0111	E7	&	0101	0000	50
G	↓	0111	C7	Y	↓	1000	E8	\$	↓	1011	5B
H	↓	1000	C8	Z	↓	1110	E9	*	↓	1100	5C
I	1100	1001	C9					)	↓	1101	5D
J	1101	0001	D1	Carac.	Zona	Número	Hex.	:	0101	1110	5E
K	↓	0010	D2	0	1111	0000	F0	-	0110	0000	60
L	↓	0011	D3	1	↓	0001	F1	/	↓	0001	61
M	↓	0100	D4	2	↓	0010	F2	.	↓	1011	6B
N	↓	0101	D5	3	↓	0011	F3	%	↓	1100	6C
O	↓	0110	D6	4	↓	0100	F4	>	↓	1110	6E
P	↓	0111	D7	5	↓	0101	F5	?	0110	1111	6F
Q	↓	1000	D8	6	↓	0110	F6	:	0111	1010	7A
R	1101	1001	D9	7	↓	0111	F7	#	↓	1011	7B
				8	↓	1000	F8	@	↓	1100	7C
				9	↓	1111	F9	=	0111	1110	7E

Tabla 2-10 ASCII-8

Carac.	Zona	Número	Hex.	Carac.	Zona	Número	Hex.	Carac.	Zona	Número	Hex.
0	0101	0000	50	A	1010	0001	A1	P	1011	0000	B0
1	↓	0001	51	B	↓	0010	A2	Q	↓	0001	B1
2	↓	0010	52	C	↓	0011	A3	R	↓	0010	B2
3	↓	0011	53	D	↓	0100	A4	S	↓	0011	B3
4	↓	0100	54	E	↓	0101	A5	T	↓	0100	B4
5	↓	0101	55	F	↓	0110	A6	U	↓	0101	B5
6	↓	0110	56	G	↓	0111	A7	V	↓	0110	B6
7	↓	0111	57	H	↓	1000	A8	W	↓	0111	B7
8	↓	1000	58	I	↓	1001	A9	X	↓	1000	B8
9	0101	1001	59	J	↓	1010	AA	Y	↓	1001	B9
				K	↓	1011	AB	Z	1011	1010	BA
				L	↓	1100	AC				
				M	↓	1101	AD				
				N	↓	1110	AE				
				O	1010	1111	AF				

estandarización en 7 bits de varias codificaciones especiales, y luego se extendió a una codificación con 8 bits. Se usa especialmente en sistemas de computación que no son IBM. Véase la tabla 2-10.

Observe que en ambos sistemas un dígito tiene su representación binaria como la porción numérica de su código. Para la porción de zona, EBCDIC usa 1111 y ASCII-8 usa 0101.

## 2.8 FORMATOS DECIMAL ZONIFICADO Y DECIMAL EMPACADO

También se usa EBCDIC para representar datos numéricos en el computador. Sin embargo, el signo de un número no se codifica con un grupo de 8 bits al principio del número, sino con un grupo de 4 bits que ocupa la porción de zona del dígito más hacia la derecha. La codificación se da en la tabla 2-11; observe que el código para un número sin signo (positivo) es el código normal de zona de dígito. Por ejemplo, los números 275, +275, y -275 están codificados en la fig. 2-2. Se dice que números codificados de esta manera están en el formato decimal zonificado. Otras codificaciones con 8 bits usan una convención similar.

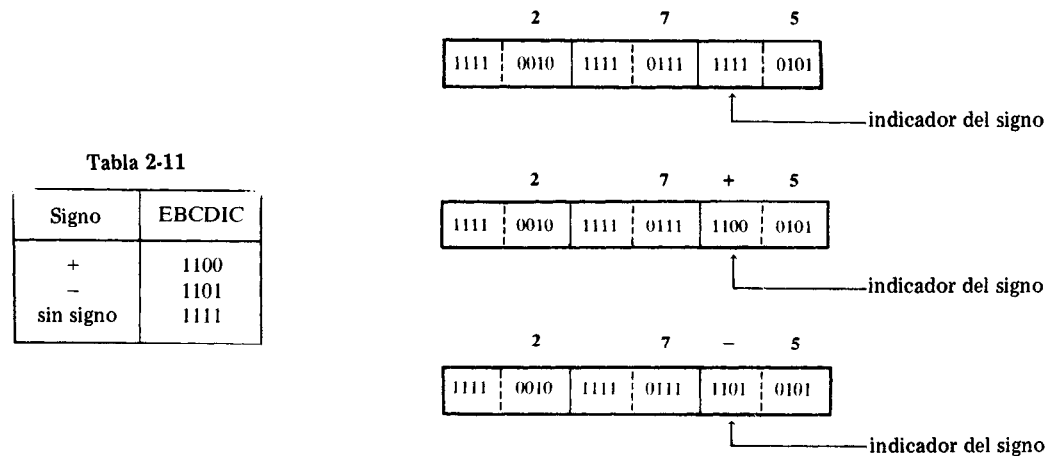


Figura 2-2 Formato decimal zonificado.

Aunque uno puede entrar/sacar datos en formato decimal zonificado, la unidad aritmético/lógica del computador no puede generalmente manejar datos en esta forma, y los datos deben convertirse a otra forma antes de que se puedan hacer los cálculos. Una forma aceptable para los cálculos es el *formato decimal empacado*. En este formato, cada dígito se codifica en BCD de 4 bits, como en el signo, con el código para el signo colocado al final del número. Por ejemplo, 275, +275, y -275 se codifican en formato decimal empacado como se muestra en la fig. 2-3.

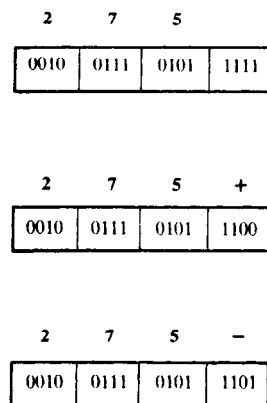


Figura 2-3 Formato decimal empacado.

La conversión del formato decimal zonificado al formato decimal empacado se logra en dos pasos. Primero, las porciones de zona y numérica del byte que está más hacia la derecha se intercambian, llevando el signo del número al final del formato. Luego, se quitan las otras porciones de zona y las porciones numéricas restantes se “empacan” juntas. La conversión para -275 se ilustra en la fig. 2-4.

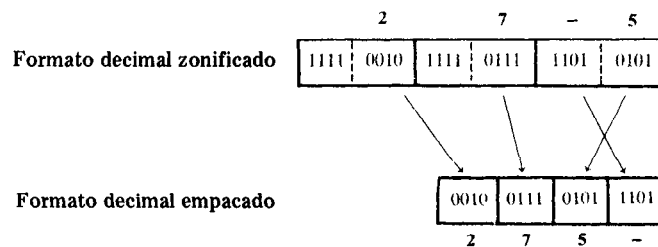


Figura 2-4

## Problemas resueltos

### SISTEMAS NUMERICOS

- 2.1 Enumere y dé los símbolos para los dígitos en el sistema numérico en base (a)  $b = 4$ , (b)  $b = 9$ , (c)  $b = 12$ , (d)  $b = 1$ .

El número de dígitos es el mismo que la base, y los dígitos son  $0, 1, 2, \dots, b - 1$ .

- (a) Cuatro; 0, 1, 2 y 3.  
 (b) Nueve; 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.  
 (c) Doce; 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, en donde A y B simbolizan los números diez y once,  
 (d) La base  $b$  siempre debe ser mayor que uno; por lo tanto, no hay sistema numérico con  $b = 1$ .

- 2.2 Escriba en notación expandida: (a)  $3102_4$ , (b)  $416_9$ , (c)  $5713_6$ .

(a)  $3102_4 = 3 \times 4^3 + 1 \times 4^2 + 0 \times 4 + 2 \times 1$

(b)  $416_9 = 4 \times 9^2 + 1 \times 9 + 6 \times 1$

- (c)  $5713_6$  no es un número en base 6, ya que 7 no es un dígito de ese sistema.

- 2.3 Escriba  $735.426_9$  en notación expandida.

Las potencias negativas de  $b = 9$  aparecen a la derecha del punto:

$$735.426_9 = 7 \times 9^2 + 3 \times 9 + 5 \times 1 + 4 \times 9^{-1} + 2 \times 9^{-2} + 6 \times 9^{-3}$$

- 2.4 Convierta  $2153_6$  a forma decimal.

Método 1.

Escriba en notación expandida y calcule usando aritmética decimal.

$$\begin{aligned} 2153_6 &= 2 \times 6^3 + 1 \times 6^2 + 5 \times 6 + 3 \times 1 = 2 \times 216 + 1 \times 36 + 5 \times 6 + 3 \times 1 \\ &= 432 + 36 + 30 + 3 = 501 \end{aligned}$$



**Método 2.**

Use el algoritmo de conversión

$$\begin{array}{r}
 2 \\
 \times 6 \\
 \hline
 12 \\
 + 1 \\
 \hline
 13 \\
 \times 6 \\
 \hline
 78 \\
 + 5 \\
 \hline
 83 \\
 \times 6 \\
 \hline
 498 \\
 + 3 \\
 \hline
 501 \quad \text{Suma final}
 \end{array}$$

La suma final es la forma decimal deseada.

## 2.5 Convierta $0.3123_4$ a forma decimal.

**Método 1.**

Escriba en notación expandida y calcule usando aritmética decimal.

$$\begin{aligned}
 0.3123_4 &= 3 \times 4^{-1} + 1 \times 4^{-2} + 2 \times 4^{-3} + 3 \times 4^{-4} \\
 &= 3 \times 0.25 + 1 \times 0.0625 + 2 \times 0.015625 + 3 \times 0.00390625 \\
 &= 0.75 + 0.0625 + 0.03125 + 0.01171875 = 0.85546875
 \end{aligned}$$

**Método 2.**

Use el algoritmo de conversión, con  $1/b = 1/4 = 0.25$ .

$$\begin{array}{r}
 3 \\
 \times 0.25 \\
 \hline
 \textcircled{2}.75 \\
 0.25 \\
 \hline
 \textcircled{1}.6875 \\
 0.25 \\
 \hline
 \textcircled{3}.421875 \\
 0.25 \\
 \hline
 0.85546875 \quad \text{Producto final}
 \end{array}$$

El producto final es la forma decimal requerida.

## 2.6 En el algoritmo para convertir una fracción en base $b$ a una fracción decimal, muestre que todo producto (no solamente el producto final) es menor que uno.

El “peor caso” se presenta con la fracción en base  $b$ , cada uno de cuyos dígitos son lo más grande posible, es decir,

$$F = 0.\overline{b-1} \overline{b-1} \dots \overline{b-1}$$

Aplicando el algoritmo a  $F$ ,

$$\text{Primer producto} \quad \frac{1}{b} \times (b-1) = \frac{b-1}{b} < 1$$

$$\text{Segundo producto} \quad \frac{1}{b} \times \left(b-1 + \frac{b-1}{b}\right) = \frac{1}{b} \times \left(\frac{b^2-1}{b}\right) = \frac{b^2-1}{b^2} < 1$$

$$\text{Tercer producto} \quad \frac{1}{b} \times \left(b-1 + \frac{b^2-1}{b^2}\right) = \frac{1}{b} \times \left(\frac{b^3-1}{b^2}\right) = \frac{b^3-1}{b^3} < 1$$

.....

2.7 Convierta el número decimal  $N = 626.4375$  a su forma en base  $b = 4$ .

Primero convierta  $N_I = 626$ , la parte entera de  $N$ , dividiéndola, y cada cociente sucesivo, por  $b = 4$ , tomando nota de los residuos:

	Residuos
626	2
156	0
39	3
9	1
2	

Los residuos en orden inverso dan  $21302_4$ , la forma requerida para  $N$ .

En seguida, convierta  $N_F = 0.4375$ , la parte fraccionaria de  $N$ , multiplicándola, y cada parte fraccionaria sucesiva, por  $b = 4$ , tomando nota de los productos:

$$\begin{array}{r} 0.4375 \\ \times 4 \\ \hline 1.7500 \\ \times 4 \\ \hline 3.0000 \end{array}$$

El proceso termina después de dos pasos, dando  $0.13_4$  como la forma requerida para  $N_F$ .

Finalmente, sumando las dos representaciones nos da  $N = 21302.13_4$ .

## SISTEMA OCTAL

2.8 Convierta el entero decimal  $A = 1476$  a su forma octal.

Divida  $A$ , y cada cociente consecutivo, por la base  $b = 8$ , tomando nota de los residuos:

	Residuos
1476	
184	4
23	0
2	7

La sucesión de residuos en el orden inverso, como lo indica la flecha, da la forma octal requerida,  $A = 2704_8$ .

2.9 Convierta el entero octal  $B = 25146_8$  a su forma decimal.

Aplique el algoritmo de conversión como sigue:

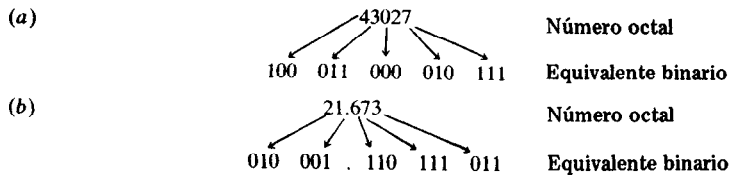
$$\begin{array}{r} 2 \\ \times 8 \\ \hline 16 \\ + 5 \\ \hline 21 \\ \times 8 \\ \hline 168 \\ + 1 \\ \hline 169 \\ \times 8 \\ \hline 1352 \\ + 4 \\ \hline 1356 \\ \times 8 \\ \hline 10848 \\ + 6 \\ \hline 10854 \end{array}$$

Suma final

La suma final es la forma decimal deseada,  $A = 10854$ .

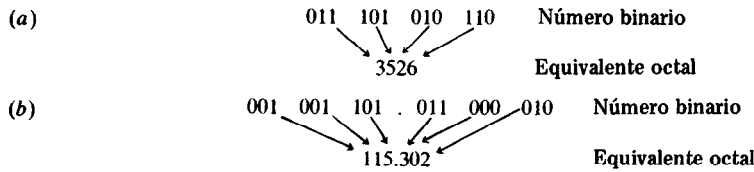
2.10 Convierta a la forma binaria (a)  $43027_8$ , (b)  $21.673_8$ .

Reemplace cada dígito octal por su equivalente binario con 3 bits (tabla 2-1):



2.11 Convierta a la forma octal (a)  $11101010110_2$ , (b)  $1001101.01100001_2$ .

Particione cada número binario en bloques de 3 bits comenzando desde el punto binario, agregando 0s si es necesario. Reemplace luego cada bloque de 3 bits por su equivalente octal (tabla 2-1).



2.12 Sume los siguientes dígitos octales:

3	6	7	1	1	7	3
+2	+4	+5	+4	+6	+7	+5

Encuentre la suma decimal, restando 8 y llevando un 1 (el cual llega a ser el siguiente dígito) siempre y cuando la suma pase de 7:

	3	6	7	1	1	7	3
	+2	+4	+5	+4	+6	+7	+5
Suma decimal	5	10	12	7	12	14	8
Modificación	-0	-8	-8	-0	-8	-8	-8
Suma octal	5	12	14	7	14	16	10

2.13 Evalúe las siguientes sumas octales:

(a) $6254_8$	(b) $36517_8$	(c) $465.37_8 + 31.613_8$
+ $4176_8$	+ $64753_8$	

Proceda como en el ejemplo 2.6.

(a)	(b)																																													
<table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="text-align: center;">6</td> <td style="text-align: center;">2</td> <td style="text-align: center;">5</td> <td style="text-align: center;">4</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">+4</td> <td style="text-align: center;">1</td> <td style="text-align: center;">7</td> <td style="text-align: center;">6</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">10</td> <td style="text-align: center;">4</td> <td style="text-align: center;">13</td> <td style="text-align: center;">10</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">-8</td> <td style="text-align: center;">-0</td> <td style="text-align: center;">-8</td> <td style="text-align: center;">-8</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">1</td> <td style="text-align: center;">2</td> <td style="text-align: center;">4</td> <td style="text-align: center;">5</td> </tr> </table>	6	2	5	4	+4	1	7	6	10	4	13	10	-8	-0	-8	-8	1	2	4	5	<table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="text-align: center;">3</td> <td style="text-align: center;">6</td> <td style="text-align: center;">5</td> <td style="text-align: center;">1</td> <td style="text-align: center;">7</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">+6</td> <td style="text-align: center;">4</td> <td style="text-align: center;">7</td> <td style="text-align: center;">5</td> <td style="text-align: center;">3</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">10</td> <td style="text-align: center;">11</td> <td style="text-align: center;">12</td> <td style="text-align: center;">7</td> <td style="text-align: center;">10</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">-8</td> <td style="text-align: center;">-8</td> <td style="text-align: center;">-8</td> <td style="text-align: center;">-0</td> <td style="text-align: center;">-8</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">1</td> <td style="text-align: center;">2</td> <td style="text-align: center;">3</td> <td style="text-align: center;">4</td> <td style="text-align: center;">7</td> </tr> </table>	3	6	5	1	7	+6	4	7	5	3	10	11	12	7	10	-8	-8	-8	-0	-8	1	2	3	4	7
6	2	5	4																																											
+4	1	7	6																																											
10	4	13	10																																											
-8	-0	-8	-8																																											
1	2	4	5																																											
3	6	5	1	7																																										
+6	4	7	5	3																																										
10	11	12	7	10																																										
-8	-8	-8	-0	-8																																										
1	2	3	4	7																																										

(c) Como siempre, uno tiene que alinear los puntos octales.

4	6	5	.	3	7	0
+	3	1	.	6	1	3
5	9	7	10	8	3	
-0	-8	-0	-8	-8	-0	
5	1	7	.	2	0	3

- 2.14 Encuentre el complemento a la base menos uno (a sietes) y el complemento a la base (a ochos) de los números octales (a)  $40613_8$ , (b)  $716520_8$ , (c)  $335500_8$ .

Reste cada dígito de siete para obtener el complemento a la base menos uno, y luego sume uno para obtener el complemento (a la base).

	(a)	(b)	(c)
Número octal	40613	716520	335500
Complemento a sietes	37164	061257	442277
Complemento	37165	061260	442300

- 2.15 Evalúe cada diferencia octal:

$$\begin{array}{r} (a) \quad 6214_8 \\ - 3527_8 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} (b) \quad 4617263_8 \\ - 1423736_8 \\ \hline \end{array}$$

Efectúe la resta sumando el complemento del substraendo al minuendo:

(a)

	6	2	1	4	Minuendo
+	4	2	5	1	Complemento del substraendo
	10	4	6	5	Sumas decimales
-	8	-0	-0	-0	Modificaciones
①	2	4	6	5	

(b)

	4	6	1	7	2	6	3	Minuendo
+	6	3	5	4	0	4	1	Complemento del substraendo
	11	9	7	11	3	10	4	Sumas decimales
-	8	-8	-0	-8	-0	-8	-0	Modificaciones
①	3	1	7	3	3	2	4	

Quitando el 1 en el círculo se obtiene la diferencia requerida.

- 2.16 Convierta cada fracción decimal a su forma octal: (a)  $0.4375$ , (b)  $0.2$ .

Multiplique la fracción decimal, y la parte fraccionaria de cada producto sucesivo, por la base  $b = 8$ , tomando nota de la parte entera de cada producto.

(a)

$$\begin{array}{r} 0.4375 \\ \times 8 \\ \hline 3.5000 \\ \underline{8} \\ 4.0000 \end{array}$$

La sucesión de partes enteras da la forma octal requerida,  $0.4375 = 0.34_8$ .

(b)

$$\begin{array}{r} 0.2 \\ \times 8 \\ \hline 1.6 \\ \underline{8} \\ 4.8 \\ \underline{8} \\ 6.4 \\ \underline{8} \\ 3.2 \end{array}$$

En el cuarto paso de nuevo obtenemos 2 como la parte fraccionaria; así que los dígitos 1463 se repetirán, dando

$$0.2 = 0.1463\ 1463\ 1463 \dots_8$$



## SISTEMA HEXADECIMAL

2.17 Convierta el número decimal  $X = 15\,321$  a su forma hexadecimal.

Divida  $X$ , y cada cociente sucesivo, por  $b = 16$ , tomando nota de los residuos, como sigue:

15321	16	957	16	59	16
144	957	80	59	48	(3)
92		157		(11)	
80		144			
121		(13)			
112					
(9)					

(Los residuos, incluyendo el último cociente, 3, que viene a ser el último residuo, están entre círculos.) La sucesión de los residuos en orden inverso, como lo indica la flecha, es la forma hexadecimal para  $X$ . Es decir,  $X = 3BD9_{16}$ , en donde hemos reemplazado los residuos 11 y 13 por sus dígitos hexadecimales equivalentes, B y D, respectivamente.

2.18 Convierta el número hexadecimal  $Z = 1A74_{16}$  a su forma decimal.

Método 1.

Escriba  $Z$  en la notación expandida y calcule usando aritmética decimal:

$$\begin{aligned} Z = 1A74_{16} &= 1 \times 16^3 + A \times 16^2 + 7 \times 16 + 4 \times 1 = 1 \times 4096 + 10 \times 256 + 7 \times 16 + 4 \times 1 \\ &= 4096 + 2560 + 112 + 4 = 6772 \end{aligned}$$

Método 2.

Use el siguiente algoritmo de conversión:

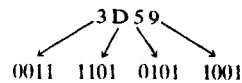
$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 16 \\ \hline 16 \\ + 10 \\ \hline 26 \\ \times 16 \\ \hline 156 \\ + 26 \\ \hline 416 \\ + 7 \\ \hline 423 \\ \times 16 \\ \hline 2538 \\ + 423 \\ \hline 6768 \\ + 4 \\ \hline 6772 \end{array} \quad \text{Suma final}$$

La suma final es la forma decimal requerida:  $Z = 6772$ .

2.19 Convierta en forma binaria (a)  $3D59_{16}$ , (b)  $27.A3C_{16}$ .

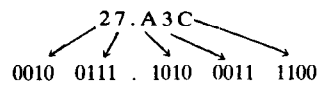
Reemplace cada dígito hexadecimal por su representación de 4 bits (tabla 2-4).

(a)



Así que,  $3D59_{16} = 11110101011001_2$ .

(b)

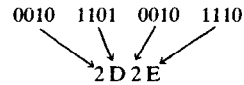


Así que,  $27.A3C_{16} = 100111.1010001111_2$ .

2.20 Convierta a forma hexadecimal (a)  $10110100101110_2$ , (b)  $11100.1011011011_2$ .

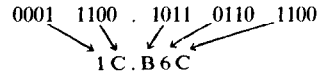
Particione cada número binario en bloques de 4 bits a la izquierda y a la derecha del punto binario, agregando 0s si es necesario. Reemplace luego cada bloque de 4 bits por su dígito hexadecimal equivalente (tabla 2-4).

(a)



Así que,  $2D2E_{16}$  es la forma hexadecimal requerida.

(b)



Así que,  $1C.B6C_{16}$  es la forma hexadecimal requerida.

2.21 Suma los siguientes dígitos hexadecimales:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccccccc}
 4 & 8 & 7 & D & 3 & 5 & 1 \\
 +3 & +9 & +5 & +8 & +B & +1 & +E
 \end{array}
 \end{array}$$

Primero, encuentre la suma decimal ordinaria (usando  $A = 10$ ,  $B = 11$ , ...,  $F = 15$ , cuando sea necesario). Luego, reste 16 y lleve un 1 siempre y cuando la suma decimal sea mayor que 15.

	4	8	7	D	3	5	1
	+3	+9	+5	+8	+B	+1	+E
Suma decimal	7	17	12	21	14	6	30
Modificación	-0	-16	-0	-16	-0	-0	-16
Suma hexadecimal	7	11	C	5	E	6	1E

2.22 Evalúe

$$(a) \ 82C5_{16} + 9D86_{16} \quad (b) \ 83A7F4_{16} + B5B63_{16} \quad (c) \ 4C.3E_{16} + 2.5D8_{16}$$

Proceda como en el ejemplo 2.9.

(a)

1	1	1		
8	2	C	5	
+9	D	8	6	
18	16	20	11	
-16	-16	-16	-0	
1	2	0	4	B

(b)

	1	1	1		
8	3	A	7	F	4
+B	5	B	6	3	
8	15	16	19	21	7
-0	-0	-16	-16	-16	-0
8	F	0	3	5	7

(c) Como siempre, alinee los puntos hexadecimales:

			1		
4	C	.	3	E	0
+ 2	.	5	D	8	
4	14	9	27	8	
-0	-0	-0	-16	-0	
4	E	.	9	B	8



- 2.29 ¿Cuántos caracteres especiales se pueden acomodar por un (a) código de 6 bits? (b) código de 7 bits? (c) código de 8 bits?

De acuerdo con el problema 2.26, un código de  $n$  bits puede acomodar  $2^n - 36$  caracteres especiales. Así que:

$$(a) \quad 2^6 - 36 = 64 - 36 = 28 \quad (b) \quad 2^7 - 36 = 128 - 36 = 92 \quad (c) \quad 2^8 - 36 = 256 - 36 = 220$$

En caso de que el computador use minúsculas y mayúsculas, son posibles 26 caracteres especiales menos.

- 2.30 Determine el número de caracteres en los datos

256 PRIMERA AVENIDA

Hay 19 caracteres, incluyendo dos espacios en blanco.

#### CODIGOS BCD DE 4 BITS

- 2.31 Decodifique cada número, expresado en el código BCD ponderado 8-4-2-1:

$$(a) \quad 0111 \ 0011 \ 0000 \ 1001 \quad (b) \quad 0101 \ 1000 \ 0010 \quad (c) \quad 0100 \ 1010 \ 0110$$

Sume los pesos de los bits 1 (esto es, evalúe la notación binaria expandida).

$$(a) \quad \begin{array}{ll} 0111 \rightarrow 4 + 2 + 1 = 7 & 0000 \rightarrow 0 \\ 0011 \rightarrow 2 + 1 = 3 & 1001 \rightarrow 8 + 1 = 9 \end{array}$$

Así, 7309 es el número codificado.

$$(b) \quad \begin{array}{lll} 0101 \rightarrow 4 + 1 = 5 & 1000 \rightarrow 8 & 0010 \rightarrow 2 \end{array}$$

Así, 582 es el número codificado.

$$(c) \quad \begin{array}{lll} 0100 \rightarrow 4 & 1010 \rightarrow 8 + 2 = 10 & 0110 \rightarrow 4 + 2 = 6 \end{array}$$

Como 10 no es un dígito, debe haber un error en la codificación.

- 2.32 Decodifique cada número, expresado en el código BCD XS-3:

$$(a) \quad 0110 \ 0011 \ 1011 \ 0111 \quad (b) \quad 1010 \ 0101 \ 1100 \ 1000 \ 0100$$

El código BCD para un dígito decimal  $d$  es el código ponderado 8-4-2-1 para  $d + 3$ . Por lo tanto, decodifique cada bloque de 4 bits usando el código ponderado 8-4-2-1, y luego reste 3.

$$(a) \quad \begin{array}{lll} 0110 \rightarrow 4 + 2 = 6 & y & 6 - 3 = 3 \\ 0011 \rightarrow 2 + 1 = 3 & y & 3 - 3 = 0 \\ 1011 \rightarrow 8 + 2 + 1 = 11 & y & 11 - 3 = 8 \\ 0111 \rightarrow 4 + 2 + 1 = 7 & y & 7 - 3 = 4 \end{array}$$

Así, 3084 es el número codificado.

$$(b) \quad \begin{array}{lll} 1010 \rightarrow 8 + 2 = 10 & y & 10 - 3 = 7 \\ 0101 \rightarrow 4 + 1 = 5 & y & 5 - 3 = 2 \\ 1100 \rightarrow 8 + 4 = 12 & y & 12 - 3 = 9 \\ 1000 \rightarrow 8 & y & 8 - 3 = 5 \\ 0100 \rightarrow 4 & y & 4 - 3 = 1 \end{array}$$

Así 72951 es el número codificado.

- 2.33 Decodifique los siguientes números, que están en el código BCD ponderado 5-4-2-1:

$$0100 \ 1100 \ 0010 \ 1010.$$



Aquí, los pesos de los bits son, de izquierda a derecha, 5, 4, 2 y 1.

$$0100 \rightarrow 4$$

$$1100 \rightarrow 5 + 4 = 9$$

$$0010 \rightarrow 2$$

$$1010 \rightarrow 5 + 2 = 7$$

Así, 4927 es el número codificado.

- 2.34** Codifique el número decimal 37 926 usando (a) el código BCD ponderado 8-4-2-1, (b) el código BCD XA-3.

(a) Exprese cada dígito  $d$  en forma binaria de 4 bits (tabla 1-2):

$$3 \rightarrow 0011$$

$$7 \rightarrow 0111$$

$$9 \rightarrow 1001$$

$$2 \rightarrow 0010$$

$$6 \rightarrow 0110$$

De esta manera, el código para 37 926 es 0011 0111 1001 0010 0110.

(b) El código XS-3 para el dígito decimal  $d$  es el código ponderado 8-4-2-1 para  $d + 3$ . Así que, sume 3 a cada dígito y proceda como en (a).

$$3 + 3 = 6 \rightarrow 0110$$

$$7 + 3 = 10 \rightarrow 1010$$

$$9 + 3 = 12 \rightarrow 1100$$

$$2 + 3 = 5 \rightarrow 0101$$

$$6 + 3 = 9 \rightarrow 1001$$

Así, el código XS-3 para 37 926 es 0110 1010 1100 0101 1001.

- 2.35** Dado que el código XS-3 para 2185 es 0101 0100 1011 1000, encuentre el código XS-3 para 7814.

Observe que 7814 es el complemento a 9s de 2185. Así que, el complemento a 1s del código anterior para 2185, 1010 1011 0100 0111, es el código XS-3 para 7814.

- 2.36** ¿Cuántos caracteres especiales se pueden codificar en un código BCD de 4 bits?

No hay caracteres especiales en un código de 4 bits. En realidad, como el código de 4 bits permite sólo 16 combinaciones, ni siquiera puede acomodar las 26 letras.

## CODIGO BCD DE 6 BITS

- 2.37** Considere el código BCD de 6 bits (tabla 2-8). (a) ¿Cuáles son los bits de zona, y cómo se rotulan? (b) ¿Cómo se codifican los dígitos decimales? (c) ¿Cuál es el código para  $A = 6927$ ?

(a) Los primeros dos bits son los bits de zona, y se rotulan B y A, como se muestra:

B	A	8	4	2	1
---	---	---	---	---	---

(b) Para cada dígito  $d$ , ambos bits de zona son 0, y los cuatro bits numéricos son el código ponderado 8-4-2-1 para  $d$ .

- (c)
- |             |             |
|-------------|-------------|
| 6 → 00 0110 | 2 → 00 0010 |
| 9 → 00 1001 | 7 → 00 0111 |

Así que, A se codifica como 000110 001001 000010 000111.

**2.38** Usando el código BCD de 6 bits, ¿cómo se codifican los bits de zona para (a) las 26 letras? (b) los caracteres especiales?

- (a) Los bits de zona son 11 para las letras A a I, 10 para las letras J a R, y 01 para las letras S a Z.  
 (b) No hay un patrón uniforme para los caracteres especiales. Algunos tienen bits de zona 11, otros 01, otros 10, y otros 00.

**2.39** ¿Qué forma abreviada se usa para los códigos de 6 bits?

Cada bloque de 6 bits se representa como dos dígitos octales, cuyas formas binarias son los primeros tres bits y los segundos tres bits, respectivamente.

**2.40** Lo que sigue es el código BCD de 6 bits para el campo de datos AUDREY:

A	U	D	R	E	Y
110001	010100	110100	101001	110101	011000

Supongamos que el computador usa una verificación de paridad impar. ¿Cómo codificaría el computador el bit de verificación para cada carácter?

Los códigos para A, D, y R ya contienen un número impar de 1s, de tal manera que sus bits de verificación serán 1s. Con cada código precedido por su bit de verificación, el campo de datos aparecerá como sigue:

A	U	D	R	E	Y
0110001	1010100	0110100	0101001	1110101	1011000

**2.41** Si un computador cambia de verificación de paridad impar a una verificación de paridad par, ¿qué sucede, si algo sucede, al código del carácter?

El código original de 6 bits de un carácter no cambia. Sin embargo, el bit de verificación para cada carácter cambiará, ya sea de 0 a 1 ó de 1 a 0.

## CODIGOS BCD DE 8 BITS; FORMATO DECIMAL EMPACADO

**2.42** ¿Qué significa el acrónimo (a) EBCDIC? (b) ASCII-8. ¿Cuáles sistemas de computadores los usan?

- (a) Extended Binary-Coded Decimal Interchange Code (Código Extendido de Intercambio Codificado en Binario Decimal). Es usado especialmente por la IBM y por sistemas compatibles con la IBM.  
 (b) American Standard Code for Information Interchange (Código Estándar Americano para Intercambio de Información). Se usa especialmente en sistemas de computador que no son IBM.

**2.43** ¿Cuántas combinaciones diferentes de zona aparecen para los códigos de las 26 letras en (a) EBCDIC? (b) ASCII-8?

- (a) Tres. Los cuatro bits de zona se codifican 1100 para las letras A a I, 1101 para las letras J a R, y 1110 para las letras S a Z.  
 (b) Dos. Los cuatro bits de zona se codifican 1010 para las letras A a O, y 1011 para las letras P a Z.

## 2.44 ¿Cuál es la razón para el 8 en el nombre ASCII-8?

El ASCII original, un código de 7 bits, fue extendido a uno de 8 bits. Como ambos códigos aún se usan, se agrega un 8 para distinguir el código de 8 bits.

## 2.45 ¿Cómo se codifican los dígitos decimales en (a) EBCDIC? (b) ASCII-8?

Ambos codifican un dígito  $d$  con una representación binaria de 4 bits de  $d$  como su porción numérica. La porción de zona de  $d$  se codifica 1111 en EBCDIC, y 0101 en ASCII-8.

## 2.46 ¿En dónde y cómo codifica el EBCDIC el signo de un número? ¿Cuál es el nombre para tal codificación?

EBCDIC codifica el signo de un número en la porción de zona del dígito que está más hacia la derecha (en lugar de al principio del número); usa 1100 para +, 1101 para -, y 1111 para una número sin signo. Esta codificación se llama *formato decimal zonificado*.

## 2.47 Codifique los números + 619, -619, y 619 en formato decimal zonificado EBCDIC.

Los números se codifican como sigue:

6	1	+	9
1111   0110	1111   0001	1100   1001	

6	1	-	9
1111   0110	1111   0001	1101   1001	

6	1	9
1111   0110	1111   0001	1111   1001

Observe que la porción de zona del dígito que está más hacia la derecha, 9, incorpora el signo en el número. Todas las otras porciones de zona contienen 1111.

2.48 Los números almacenados en formato decimal zonificado se procesan normalmente en *formato decimal empacado*. (a) Describa la codificación formato decimal empacado. (b) ¿Cómo se codifican los números + 619, -619, y 619 en el formato decimal empacado EBCDIC? (c) ¿Cómo cambia el computador un número de formato decimal zonificado en formato decimal empacado?

(a) Cada dígito se codifica en su forma binaria de 4 bits, y el código de 4 bits del signo del número aparece al final del número.

6    1    9    +

0110	0001	1001	1100
------	------	------	------

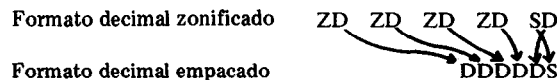
6    1    9    -

0110	0001	1001	1101
------	------	------	------

6    1    9

0110	0001	1001	1111
------	------	------	------

(c) El computador (i) intercambia las porciones de zona y numéricas del dígito que está más hacia la derecha, (ii) suprime las porciones de zona de los otros dígitos, y (iii) empaca juntos todos los bits. Así, si  $Z$  ≡ la zona,  $D$  ≡ el dígito, y  $S$  ≡ el signo,



## Problemas suplementarios

### SISTEMAS NUMERICOS

- 2.49 Escriba en notación expandida: (a)  $2043_6$ , (b)  $435.621_7$ .
- 2.50 Convierta a forma decimal: (a)  $4205_6$ , (b)  $142032_5$ .
- 2.51 Convierta a forma decimal: (a)  $24.042_5$ , (b)  $2.13_4$ .
- 2.52 Escriba de nuevo el número decimal 3263 en la base (a) 5, (b) 4, (c) 12 (usando  $A = 10$  y  $B = 11$ ).
- 2.53 Escriba de nuevo el número decimal 1547 en la base (a) 6, (b) 9, (c) 12 (usando  $A = 10$  y  $B = 11$ ).
- 2.54 Convierta el número decimal 274.824 a su forma en base 5.
- 2.55 Convierta el número decimal 145.6875 a su forma en base 4.
- 2.56 Convierta el número decimal 0.3 a su forma en base 4.

### SISTEMA OCTAL

- 2.57 Convierta cada número decimal a su forma octal: (a) 12 345, (b) 44 444.
- 2.58 Convierta a forma decimal: (a)  $12345_8$ , (b)  $44444_8$ .
- 2.59 Convierta cada número decimal a su forma octal: (a) 0.4375, (b) 0.4.
- 2.60 Convierta a forma binaria: (a)  $617025_8$ , (b)  $43.0276_8$ .
- 2.61 Convierta a forma octal: (a)  $10101111100_2$ , (b)  $1000110111_2$ , (c)  $1011.01011_2$ .
- 2.62 Sume los siguientes números octales:

$$\begin{array}{cccccccc} 4 & 5 & 2 & 6 & 7 & 1 & 3 & 4 & 7 \\ +3 & +6 & +4 & +7 & +4 & +4 & +6 & +6 & +7 \end{array} .$$

- 2.63 Evalúe (a)  $45376_8 + 36274_8$ , (b)  $2573654_8 + 444777_8$ , (c)  $333.567_8 + 47.4747_8$ .
- 2.64 Encuentre el complemento a la base menos uno (a 7s) y el complemento (a 8s) de (a)  $234705_8$ , (b)  $113355_8$ , (c)  $666000_8$ .
- 2.65 Evalúe, usando complementos: (a)  $6157_8 - 4325_8$ , (b)  $671354_8 - 213604_8$ .

### SISTEMA HEXADECIMAL

- 2.66 Convierta cada número decimal a su forma hexadecimal: (a) 967, (b) 2893.
- 2.67 Convierta a forma decimal: (a)  $3E7_{16}$ , (b)  $4A5C_{16}$ .
- 2.68 Convierta la fracción decimal 0.3 a su forma hexadecimal.
- 2.69 Convierta a forma binaria: (a)  $B9E4_{16}$ , (b)  $50C7F6_{16}$ .
- 2.70 Convierta a forma hexadecimal: (a)  $11101101101100_2$ , (b)  $1110001111110_2$ , (c)  $111110.101111_2$ .

**2.71** Sume los siguientes dígitos hexadecimales:

$$\begin{array}{cccccccc} 5 & 9 & B & 7 & 2 & E & 6 & C & 4 \\ +7 & +8 & +2 & +3 & +4 & +E & +A & +6 & +9 \end{array}$$

**2.72** Evalúe (a)  $47B6_{16} + 9C75_{16}$ , (b)  $8D07A5_{16} + 734F6_{16}$ , (c)  $67.E9_{16} + A.BCDE_{16}$ .

**2.73** Encuentre el complemento a la base menos uno (a 15s) y el complemento (a 16s) de (a)  $5D309_{16}$ , (b)  $2A4E61_{16}$ , (c)  $A1B2C300_{16}$ .

**2.74** Evalúe, usando complementos (a)  $76B5_{16} - 432C_{16}$ , (b)  $A57913_{16} - 64EE00_{16}$ .

### CODIGOS BCD DE 4 BITS

**2.75** Decodifique cada número, expresados en el código BCD 8-4-2-1: (a) 0110 1001 0111, (b) 0011 0100 1000 0101.

**2.76** Decodifique cada número, codificado en el código BCD XS-3: (a) 0101 1011 1000, (b) 0111 1100 0011 0100 1010.

**2.77** Decodifique cada número, codificado en el código BCD 5-4-2-1: (a) 1010 0010 1001, (b) 1011 0001 0100 1100.

**2.78** Codifique cada número decimal en el código BCD 8-4-2-1: (a) 395, (b) 70 246.

**2.79** Codifique cada número decimal en el código BCD XS-3: (a) 395, (b) 70 246.

**2.80** Dado que 0110 0011 1001 1011 es el código XS-3 para el número decimal A, encuentre el código XS-3 para el complemento (a 10s), de A, sin decodificar A.

### CODIGO BCD DE 6 BITS

**2.81** Codifique (sin usar una tabla) el número decimal 4839 en el sistema BCD de 6 bits en (a) forma binaria, (b) forma octal.

**2.82** ¿Cuál es el mínimo número de bloques de caracteres necesario para codificar el mensaje AL PRINCIPIO?

**2.83** Suponga que un computador usa el código BCD de 6 bits, con paridad impar. ¿Cómo almacenaría el computador el nombre (a) MARCOS? (b) LUIS?

**2.84** Suponga que un computador usa paridad par y que el campo de datos HAMLET se almacena en el computador de la siguiente manera.

1111000 1110001 0100101 1100011 0110101 1010011

Sin usar una tabla, encuentra cuál letra contiene un error, si es que hay alguno.

### CODIGOS BCD DE 8 BITS

**2.85** Codifique el nombre CLAUDIA en (a) EBCDIC binario, (b) EBCDIC hexadecimal. (c) ¿Cómo aparecería el código binario en el computador, si el computador usa verificación de paridad impar?

**2.86** Repita el problema 2.85 usando ASCII-8 en lugar de EBCDIC.

**2.87** Usando formato decimal zonificado, escriba los códigos EBCDIC para (a) +3750, (b) -3759, (c) 3759.

**2.88** Usando formato decimal empacado, escriba los códigos para (a) +3759, (b) -3759, (c) 3759.

### Respuestas a los problemas suplementarios

**2.49** (a)  $2 \times 6^3 + 0 \times 6^2 + 4 \times 6 + 3 \times 1$ , (b)  $4 \times 7^2 + 3 \times 7 + 5 \times 1 + 6 \times 7^{-1} + 2 \times 7^{-2} + 1 \times 7^{-3}$

**2.50** (a) 941, (b) 5892

**2.51** (a) 14.176, (b) 2.4375

**2.52** (a) 101023<sub>5</sub>, (b) 302333<sub>4</sub>, (c) 1A7B<sub>12</sub>

**2.53** (a) 11055<sub>6</sub>, (b) 2108<sub>6</sub>, (c) A8B<sub>12</sub>

**2.54** 2044.403<sub>5</sub>

**2.55** 2101.23<sub>4</sub>

**2.56** 0.1030303...

**2.57** (a) 30071<sub>8</sub>, (b) 126634<sub>8</sub>

**2.58** (a) 5349, (b) 18 724

**2.59** (a) 0.34<sub>8</sub>, (b) 0.3146 3146...<sub>8</sub>

**2.60** (a) 110001111000010101<sub>2</sub>, (b) 100011.00001011111<sub>2</sub>

**2.61** (a) 2574<sub>8</sub>, (b) 1067<sub>8</sub>, (c) 13.26<sub>8</sub>

**2.62** 7, 13, 6, 15, 13, 5, 11, 12, 16

**2.63** (a) 103672<sub>8</sub>, (b) 3240653<sub>8</sub>, (c) 403.2637<sub>8</sub>

**2.64** (a) 543072<sub>8</sub>, 543073<sub>8</sub>; (b) 664422<sub>8</sub>, 664423<sub>8</sub>; (c) 111777<sub>8</sub>, 112000<sub>8</sub>

**2.65** (a) 1632<sub>8</sub>, (b) 455550<sub>8</sub>

**2.66** (a) 3C7<sub>16</sub>, (b) B4D<sub>16</sub>

**2.67** (a) 999, (b) 19 036

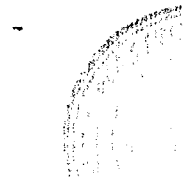
**2.68** 0.4CCCC...

**2.69** (a) 1011100111100100, (b) 1010000110001111110110

**2.70** (a) 3B6C<sub>16</sub>, (b) 1C7E<sub>16</sub>, (c) 3E.BC<sub>16</sub>

**2.71** C, 11, D, A, 6, 1C, 10, 12, D

**2.72** (a) E42B<sub>16</sub>, (b) 943C9B<sub>16</sub>, (c) 72.A5DE<sub>16</sub>



**2.73** (a)  $A2CF6_{16}$ ,  $A2CF7_{16}$ ; (b)  $D5B19E_{16}$ ,  $D5B19F_{16}$ ; (c)  $5E4D3CFF_{16}$ ,  $5E4D3D00_{16}$

**2.74** (a)  $3389_{16}$ , (b)  $408B13_{16}$

**2.75** (a) 697, (b) 3485

**2.76** (a) 285, (b) 49 017

**2.77** (a) 726, (b) 8149

**2.78** (a) 0011 1001 0101, (b) 0111 0000 0010 0100 0110

**2.79** (a) 0110 1100 1000, (b) 1010 0011 0101 0111 1001

**2.80** Cuando un dígito decimal se aumenta en uno, su código XS-3 se aumenta en uno. Así,

$$\begin{array}{r} 1001 \ 1100 \ 0110 \ 0100 \rightarrow 9s \text{ Complemento de } A \\ +0001 = +1 \\ \hline 1001 \ 1100 \ 0110 \ 0101 \rightarrow 10s \text{ Complemento de } A \end{array}$$

**2.81** (a) 000100 001000 000011 001001, (b) 04 10 03 11

**2.82** Doce; hay un carácter en blanco.

**2.83** (a) 1100100 0110001 0101001 1110011 0100110 1010010, (b) 0100011 1010100 1111001 1010010.

**2.84** La  $M$ , ya que 0100101 contiene un número impar de 2s.

**2.85** (a) 11000011 11010011 11000001 11100100 11000100 11001001 11000001, (b) C3 D3 C1 E4 C4 C9 C1, (c) 111000011 011010011 011000001 111100100 011000100 111001001 011000001.

**2.86** (a) 10100011 10101100 10100001 10110101 10100100 10101001 10100001, (b) A3 AC A1 B5 A4 A9 A1, (c) 110100011 110101100 010100001 010110101 010100100 110101001 010100001.

**2.87** (a) 11110011 11110111 11110101 11001001  
(b) 11110011 11110111 11110101 11011001  
(c) 11110011 11110111 11110101 11111001

**2.88** (a) 0011 0111 0101 1001 1100, (b) 0011 0111 0101 1001 1101, (c) 0011 0111 0101 1001 1111

# Capítulo 3

## Aritmética del computador

### 3.1 CONCEPTOS MATEMATICOS BASICOS

En esta sección discutiremos diversos conceptos matemáticos que son necesarios en el estudio de la aritmética del computador.

#### Números aproximados; Dígitos significativos

Un dispositivo para medir o calcular, tal como una calculadora de escritorio, un micrómetro, o aún un computador electrónico moderno, puede manejar solamente un número finito de dígitos en un momento dado. Así, un número registrado puede representar una cantidad sólo aproximadamente. Por ejemplo, la altura de un estudiante puede registrarse como 187 centímetros, siendo que su verdadera altura podría ser media unidad más, o sea 187.5 cm. También resultan números aproximados cuando se usan fracciones decimales que terminan para representar números irracionales, por ejemplo

$$\sqrt{2} \approx 1.414 \quad \pi \approx 3.1416$$

(A veces se usa  $\approx$  para *aproximadamente igual*.)

La exactitud de un número aproximado  $A$  se mide, por lo común, con el número de *dígitos significativos* en  $A$ . Necesitamos el adjetivo “significativo”, ya que algunos números usan 0s tan sólo para colocar el punto decimal. Por ejemplo, una onza se puede aproximar en el sistema métrico como

28 gramos o como 0.028 kilogramos

En ambos casos, la aproximación usa dos dígitos significativos; los 0s en 0.028 no son significativos, sino que simplemente localizan el punto decimal. Las reglas formales para los dígitos significativos son las siguientes:

**Regla 1:** Un dígito no nulo siempre es significativo.

**Regla 2:** El dígito 0 es significativo si se encuentra entre otros dígitos significativos.

**Regla 3:** El dígito 0 nunca es significativo cuando está precedido por dígitos no nulos.

Considere cualquier número aproximado no nulo  $A$ . El dígito más significativo de  $A$  es el primer dígito significativo (el que está más hacia la izquierda); será siempre el primer dígito no nulo de  $A$  (por la Regla 3). El dígito menos significativo de  $A$  es el último dígito significativo (el que está más hacia la derecha). Excepto en un caso ambiguo, discutido en el ejemplo 3.1(d) el dígito menos significativo de  $A$  será el último dígito de  $A$ , cero o no. Los dígitos significativos de  $A$  son todos los dígitos entre e incluyendo el más y el menos significativo.

#### EJEMPLO 3.1

- (a) Considere los números 3.14, 1234, 56.607, 880.077. Todos los dígitos son significativos; así que estos números contienen 3, 4, 5, y 6 dígitos significativos respectivamente.
- (b) Considere el número 0.000 345. Por la Regla 3, el número contiene solamente tres dígitos significativos, el 3, el 4, y el 5.
- (c) Los 0s finales son todos significativos si el número aproximado tiene un punto decimal intercalado. Así, 7.7700, 7770.0, y 0.000 777 00 contiene cada uno cinco dígitos significativos, los tres 7s y los dos 0s finales. Los 0s iniciales en el tercer número no son significativos.



- (d) El número  $A = 56\,700\,000$  tiene 0s finales pero no tiene punto decimal intercalado. El 7 o uno de los 0s finales puede ser el dígito menos significativo; pero sin información adicional sobre  $A$ , no podemos decir cuál es el caso. Tal ambigüedad se evita escribiendo el número en notación científica o en forma exponencial normalizada; estas formas se discuten en la sección 3.2.

**Observación:** De todos los números decimales que se pueden almacenar (en forma codificada) en una sola localización de memoria de un computador, sea  $M$  el mayor número de dígitos significativos. Entonces al número de dígitos significativos de  $M$  se le llama *precisión* del computador.

### Redondeo de números

Frecuentemente queremos aproximar un valor numérico por medio de otro número, que tenga menos dígitos decimales o que tenga un número dado de dígitos significativos. Esto se logra comúnmente quitando uno o más de los dígitos menos significativos y luego *redondeando* el número que queda. Las reglas para redondeo, en donde “dígito de prueba” se refiere al primer dígito (el que está más hacia la izquierda) de los que se quitan, son:

**Aproximación por defecto.** Si el dígito de prueba es menor de 5, los dígitos precedentes no se cambian.

**Aproximación por exceso.** Si el dígito de prueba es mayor que 5 o es un 5 seguido por lo menos de un dígito no nulo, el dígito precedente se aumenta en 1 (llevando un 1 si el dígito precedente es un 9).

**Regla suma si impar.** Si el dígito de prueba es 5 seguido solamente de 0s, el dígito precedente no se cambia si es par, pero se incrementa en 1 si es impar.

Bajo estas reglas, el máximo *error de redondeo* será la mitad del valor de posición del último dígito que quede.

### EJEMPLO 3.2

- (a) Redondee cada número a dos cifras decimales: 1.73482, 3.1416, 0.0037, 0.5677, 258.678, 0.00911. El dígito de verificación (subrayado) es el dígito en el tercer puesto decimal. Los tres primeros números se aproximan por defecto, ya que el dígito de prueba es menor que 5; los tres últimos números se aproximan por exceso, ya que el dígito de prueba pasa de 5. Así los números redondeados son: 1.73, 3.14, 0.00, 0.57, 258.68, 0.01.
- (b) Redondee cada número a una cifra decimal: 1.152, 22.250070, 3.35, 36.6500, 7.85, 9.9500. El dígito de prueba, que aparece en la segunda posición decimal es 5 en todos los números. Los primeros dos números se aproximan por exceso, ya que el dígito de prueba 5 está seguido por dígitos no nulos. La Regla suma si impar se aplica a los cuatro últimos números, ya que cada dígito de prueba 5 está seguido por 0s. El tercero y el último números se aproximan por exceso, ya que los dígitos precedentes, 3 y 9, son impares; pero el cuarto y el quinto números se aproximan por defecto, ya que los dígitos precedentes, 6 y 8, son pares. Así, los números redondeados son 1.2, 22.3, 3.4, 36.6, 7.8, 10.0.
- (c) Redondee cada número a 3 dígitos significativos: 0.77777, 5.4321, 66.6503, 888.5, 333.5, 111500. El dígito de prueba (subrayado) es el cuarto dígito significativo. Los números redondeados son: 0.778, 5.43, 66.7, 888, 334, 112000. La regla suma si impar se aplicó en los últimos tres números.

### Truncamiento

Muchos cálculos aritméticos en el computador resultan con más dígitos de los que se pueden almacenar en las localizaciones de memoria. En lugar de redondear los números, la mayoría de los computadores se programan simplemente para suprimir los dígitos menos significativos. A esta operación se le llama *truncamiento*. Por ejemplo, cada uno de los siguientes números ha sido truncado a 3 dígitos significativos.

Número	88.77	-7.8989	999.111	-0.012 345
Valor truncado	88.7	-7.89	999	-0.012 3

Observe que los números positivos siempre resultan disminuidos en valor cuando son truncados, mientras que los números negativos siempre se aumentan en valor.

El error de truncamiento puede ser casi igual al valor de posición total del último dígito que quede. Por ejemplo, si truncamos \$24.99 a su cantidad en pesos, obtenemos \$24, un error de 99¢. Así, el máximo error de truncamiento es el doble del máximo error de redondeo (relativo a la misma posición decimal). Aún más, si un número grande de números positivos varios se truncan al mismo número de decimales, el error *promedio* debería ser la mitad del error de posición del último dígito que quede, mientras que el error de redondeo promedio sería cero (los errores negativos de las aproximaciones por defecto tienden a cancelar los errores positivos de las aproximaciones por exceso).

### Valor absoluto

El *valor absoluto* de un número puede verse intuitivamente como la magnitud, sin tener en cuenta el signo. Denotamos el valor absoluto de un número  $a$  por  $|a|$ . Formalmente definimos  $|a|$  como el mayor de los números  $a$  y  $-a$ ; o sea,

$$|a| = \begin{cases} a & (a > 0) \\ 0 & (a = 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

Observemos que  $|a| = |-a| \geq 0$  para todo número  $a$ , y que  $|a|$  es positivo siempre que  $a$  no sea cero.

### EJEMPLO 3.3

- (a) Encuentre el valor absoluto de 15, -8, 3.25, 0, -2.22, -0.075. Escriba sencillamente la parte numérica del número:  $|15| = 15$ ,  $|-8| = 8$ ,  $|3.25| = 3.25$ ,  $|0| = 0$ ,  $|-2.22| = 2.22$ ,  $|-0.075| = 0.075$ .
- (b) Evalúe (i)  $|3 - 8|$ , (ii)  $|7 - 2|$ , (iii)  $|3| - |8|$ , (iv)  $-|-5|$ .

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & |3 - 8| = |-5| = 5 \\ \text{(ii)} & |7 - 2| = |5| = 5 \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{(iii)} & |3| - |8| = 3 - 8 = -5 \\ \text{(iv)} & -|-5| = -(5) = -5 \end{array}$$

## 3.2 FORMA EXPONENCIAL

Por razones de brevedad, un número muy grande o un número muy pequeño se puede escribir a veces como un número multiplicado por una potencia de 10. Por ejemplo, 28 000 000 000 se puede escribir 28 miles de millones o  $28 \times 10^9$ , y 0.000 000 033 44 se puede escribir  $3.344 \times 10^{-8}$ . En realidad, todo número se puede escribir en forma de un número veces una potencia de diez, llamada *forma exponencial*. Así,

$$567 = 5.67 \times 10^2 \quad 0.005 = 5.00 \times 10^{-3} \quad 25 = 0.25 \times 10^2$$

Tal forma no es única, por ejemplo

$$567 = 0.0567 \times 10^4 = 0.567 \times 10^3 = 56.7 \times 10^1 = 56\,700 \times 10^{-2}$$

Aún más, se tiene que  $567 = 567 \times 10^0$  (en donde  $10^0 = 1$ ). Observe que la única diferencia entre las formas exponenciales equivalentes es la posición del punto decimal y el exponente de diez. Esto resulta del hecho de que al multiplicar un número decimal por una potencia de 10 sencillamente se traslada el punto decimal en el número.

Considere ahora cualquier número no nulo  $A$ . Podemos escribir  $A$  *unívocamente* como un número  $M$  multiplicado por una potencia de diez,  $A = M \times 10^n$ , en donde el punto decimal aparece directamente en frente del primer dígito no nulo en  $M$ . A esto se le llama *forma exponencial normalizada* de  $A$ . Al número  $M$  se le llama *mantisa* de  $A$ , y al exponente  $n$  se le llama

**exponente** de  $A$ . Observamos que  $.1 \leq M < 1$  para todo  $A$  positivo, y que  $-1 < M \leq -.1$  para todo  $A$  negativo.

**EJEMPLO 3.4** En la tabla 3-1 aparecen varios números escritos en forma exponencial normalizada, con una lista explícita de la mantisa y el exponente de cada número.

Observe primero que tanto la mantisa como el exponente pueden ser positivos negativos. Normalmente escribimos un 0 en frente del punto decimal en la forma normalizada, para lectura más fácil y para prevenir posible pérdida del punto decimal cuando se copia el número.

**Observación 1:** Otra forma exponencial frecuentemente usada es la llamada *notación científica*. En esta forma exponencial, el punto decimal aparece directamente después del primer dígito no nulo. Por ejemplo,

Número decimal	999.111	0.006 66	0.75	22.33
Notación científica	$9.991\,11 \times 10^2$	$6.66 \times 10^{-3}$	$7.5 \times 10^{-1}$	$2.233 \times 10^1$

El mérito principal de la notación científica, fuera de su brevedad, es que no hay ninguna ambigüedad sobre los dígitos significativos de un número; todo dígito en la mantisa es significativo. (Esto también es cierto para números en forma exponencial normalizada.)

Tabla 3-1

Número decimal	Forma exponencial normalizada	Mantisa	Exponente
222.2	$0.2222 \times 10^3$	0.2222	3
0.0033	$0.33 \times 10^{-2}$	0.33	-2
-44.44	$-0.4444 \times 10^2$	-0.4444	2
0.55	$0.55 \times 10^0$	0.55	0
-0.000 06	$-0.6 \times 10^{-4}$	-0.6	-4

**Observación 2:** La entrada numérica al computador debe representarse como una sola línea de caracteres. Así, la letra  $E$  seguida de un entero,  $n$ , se usa comúnmente para denotar multiplicación por  $10^n$ .

#### EJEMPLO 3.5

11.22E3	significa	$11.22 \times 10^3 = 11\,220$
3.456E-5	significa	$3.456 \times 10^{-5} = 0.000\,034\,56$
0.005 566 77E04	significa	$0.005\,566\,77 \times 10^4 = 55.6677$
-0.003 33E+2	significa	$-0.003\,33 \times 10^2 = -0.333$

La mayoría de los computadores restringen el exponente para que sea un entero con signo o sin él, de máximo dos dígitos.

#### Forma exponencial binaria

Los números binarios, como los números decimales, se pueden escribir en forma exponencial, usando potencias de dos en lugar de potencias de diez. Así, cada número binario no nulo tiene una única forma exponencial normalizada, en la cual el punto binario aparece antes del primer bit 1. Esta forma única da una única mantisa  $M$ , y un único entero  $n$  que representa el exponente de dos. Cualquiera de estos números puede ser positivo o negativo, y el exponente  $n$  también puede ser cero. Aún más, el computador comúnmente almacena una mantisa como un número fijo de bits truncando o agregando 0s al número original.

**EJEMPLO 3.6** La tabla 3-2 da algunos números binarios en forma exponencial normalizada, cada mantisa con exactamente 5 bits.

Tabla 3-2

Número binario	Forma exponencial normalizada	Mantisa	Exponente
1010.1	$0.10101 \times 2^4$	0.10101	4
0.001111	$0.11110 \times 2^{-2}$	0.11110	-2
-111	$-0.11100 \times 2^3$	-0.11100	3
0.1	$0.10000 \times 2^0$	0.10000	0
-0.01010101	$-0.10101 \times 2^{-1}$	-0.10101	-1

### 3.3 REPRESENTACION INTERNA

Ahora vamos a discutir cómo se representan números dentro de un computador usando codificación binaria directa, la cual codifica un número completo como un todo. (La codificación BCD, que codifica un número dígito por dígito, se discutió en el capítulo 2.)

La codificación binaria directa requiere que un número se almacene en las localizaciones del computador como un número fijo de bits. Una lista de bits se trata como una unidad llamada *palabra*, y al número de bits se le llama *longitud* de la palabra. Para fijar las ideas, supondremos, a no ser que se diga lo contrario, que nuestros computadores usan palabras de longitud fija 32.

#### Representación entera

Los *enteros*, o *números en punto fijo*, son números que no tienen punto decimal. Un entero  $J$  se representa en la memoria de un computador por medio de su forma binaria si  $J$  es positivo, y por medio de su complemento a 2s (o sea, el complemento a 2s de su valor absoluto) si  $J$  es negativo.

**EJEMPLO 3.7** El computador almacena  $423 = 110100111_2$  en una localización de memoria de 32 bits agregando suficientes 0s al principio de su forma binaria:

423	0	0	0	0	0	...	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1
-----	---	---	---	---	---	-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

El computador almacena  $-423$  en una localización de memoria tomando el complemento a 1s de la anterior representación de 423 y sumándole un 1:

-423	1	1	1	1	1	...	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1
------	---	---	---	---	---	-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

En la primera representación los puntos representan 0s omitidos; en la segunda, 1s omitidos.

El computador puede saber si un entero  $J$  en la memoria es positivo o negativo mirando el primer bit. Si el primer bit es 0, entonces  $J$  es positivo; si el primer bit es 1 entonces  $J$  es negativo. De acuerdo con ésto, el entero más grande (positivo) que se puede almacenar en una localización de memoria de 32 bits es

$$0 \underbrace{11111 \dots 11111}_{31 \text{ unos}}$$

ó  $2^{31} - 1$ , que es aproximadamente dos mil millones. Análogamente, el entero (negativo) más pequeño que se puede almacenar en una localización de memoria de 32 bits es  $-2^{31}$ , o aproximadamente menos dos mil millones.

### Representación punto flotante

Los números en punto flotante (también llamados números reales) tienen puntos decimales intercalados. Tales números se almacenan y procesan en sus formas exponenciales binarias. La localización de memoria se divide comúnmente en tres campos, o bloques de bits. Un campo, el primer bit, se reserva para el signo del número (usualmente 0 para + y 1 para -); un segundo campo, para el exponente del número; y el último campo, para la mantisa del número. La fig. 3-1 muestra los campos usuales de una localización de memoria de 32 bits. Con un campo de mantisa de 24 bits, la precisión del computador (sec. 3.1) es 8 (dígitos decimales significativos).

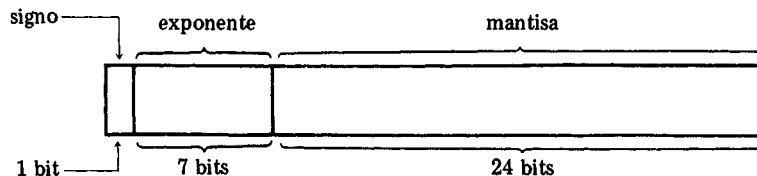


Figura 3-1

Queda por discutir la manera como el exponente entero,  $n$ , de un número en punto flotante se representa en su campo. Unos pocos computadores almacenan  $n$  en su forma binaria cuando  $n$  es positivo o cero, y como su complemento a 2s cuando  $n$  es negativo; o sea, de la misma manera como se guardan en la memoria los enteros en punto fijo. Sin embargo, la mayoría de los computadores representan  $n$  por su característica,  $n + 2^{t-1}$ , en donde  $t$  es el número de bits en el campo del exponente. La tabla 3-3 muestra la relación entre el verdadero exponente de  $n$  y su característica cuando  $t = 7$ . Observe que un campo de exponente de 7 bits puede representar exponentes desde -64 hasta 63, lo cual quiere decir que el computador puede almacenar números en punto flotante entre  $2^{-64}$  y  $2^{63}$ .

Tabla 3-3

Exponente verdadero	-64	-63	-62	-61	...	-1	0	1	...	63
Característica	0	1	2	3	...	63	64	65	...	127

**EJEMPLO 3.8** Dado  $A = -419.8125$ . Convirtiendo  $A$  a forma binaria resulta

$$A = -110100011.1101_2$$

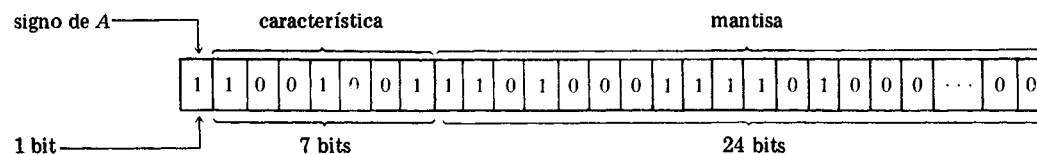
Así, la forma exponencial normalizada de  $A$  es

$$A = -0.1101000111101 \times 2^9$$

Siendo 9 el verdadero exponente de  $A$ , su característica de 7 bits es

$$9 + 64 = 73 = 1001001_2$$

Así,  $A$  será almacenado en la localización de memoria de 32 bits como sigue.



Observe que (i) el primer bit es 1, lo cual indica que  $A$  es negativo; (ii) el primer bit del campo de la característica es 1, lo cual indica que el exponente de  $A$  es no negativo; y (iii) se agregan suficientes 0s al final de la mantisa para completar un campo de mantisa de 24 bits.

### 3.4 ARITMETICA DEL COMPUTADOR

Los computadores normalmente ejecutan cálculos aritméticos con números en forma exponencial; podemos llamar a esto aritmética de punto flotante o *aritmética real*. Sin embargo, algunos lenguajes de programación, tales como el FORTRAN, hacen posible que el computador ejecute un tipo separado de aritmética para números almacenados como enteros en punto fijo. Estudiamos este tipo de aritmética de enteros primero, y luego, con mucho más detalle, estudiaremos la aritmética de punto flotante.

#### Aritmética de enteros

La principal propiedad de la aritmética de enteros es que el resultado de cualquier operación con enteros debe ser un entero. Por medio de la adición, sustracción, y multiplicación de enteros, obtenemos los resultados usuales. Por ejemplo,

$$12 + 5 = 17 \quad 12 - 5 = 7 \quad 12 \times 5 = 60$$

Sin embargo, en la división de enteros, el resultado se obtiene truncando el cociente usual a un entero. Por ejemplo,

$$12 \div 5 = 2 \quad 7 \div 8 = 0 \quad -9 \div 2 = -4$$

Así, la división de enteros es diferente de la división ordinaria, y, en la aritmética de enteros, la regla ordinaria

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

en general no es cierta.

#### Aritmética de punto flotante (Real)

Ahora todos los números se almacenan y procesan en forma exponencial. Sea  $P$  la precisión del computador (sec. 3.1). El principal hecho para recordar es que el resultado de cualquier operación es normalizado y que la mantisa se redondea o se trunca a  $P$  dígitos. Para ilustrar, vamos a suponer en los ejemplos siguientes que todas las mantisas se han truncado (no redondeado) a  $P = 4$  dígitos decimales; representamos los números en forma exponencial decimal más bien que en la forma exponencial binaria que en realidad se usa en el computador.

**Adición real.** Si dos números que se van a sumar tienen el mismo exponente, las mantisas se suman y se usa el mismo exponente.

$$0.2356 \times 10^4 + 0.4123 \times 10^4 = 0.6479 \times 10^4$$

$$0.5544 \times 10^2 + 0.7777 \times 10^2 = 1.3321 \times 10^2 \approx 0.1332 \times 10^3$$

Aquí, el último valor se obtiene normalizando y truncando la suma de las mantisas. Por otra parte, si los dos números tienen exponentes diferentes, entonces uno de los números debe renormalizarse de tal manera que ambos tengan el mismo exponente antes de que se efectúe la adición. Normalmente, el computador ajusta el exponente más pequeño. Por ejemplo,

$$0.1166 \times 10^2 + 0.8811 \times 10^4 = 0.001166 \times 10^4 + 0.8811 \times 10^4 = 0.882266 \times 10^4 \approx 0.8822 \times 10^4$$

El último valor se obtiene de nuevo por truncamiento.

La *substracción real* es similar a la adición real.

$$0.8844 \times 10^{-2} - 0.3322 \times 10^{-2} = 0.5522 \times 10^{-2}$$

$$0.7777 \times 10^3 - 0.7531 \times 10^3 = 0.0246 \times 10^3 = 0.2460 \times 10^2$$

Observe que en la segunda substracción se pierde un dígito significativo, de tal manera que la mantisa final, .2460, contiene un 0 no significativo.

$$0.6666 \times 10^3 - 0.3333 \times 10^2 = 0.6666 \times 10^3 - 0.0333 \times 10^3 = 0.6333 \times 10^3 \approx 0.6332 \times 10^3$$

De nuevo se ha efectuado truncamiento.

**Multiplicación real.** Ahora multiplicamos las mantisas y sumamos los exponentes.

$$(0.3355 \times 10^2) \times (0.4466 \times 10^3) = 0.149\,834\,30 \times 10^5 \approx 0.1498 \times 10^5$$

$$(0.1111 \times 10^2) \times (0.2222 \times 10^4) = 0.024\,686\,42 \times 10^6 \approx 0.2468 \times 10^6$$

$$(0.4444 \times 10^{-5}) \times (0.3579 \times 10^2) = 0.159\,050\,76 \times 10^{-3} \approx 0.1590 \times 10^{-3}$$

Como siempre, los resultados de los cálculos se renormalizan, si es necesario, y se truncan a  $P = 4$  dígitos significativos.

**División real.** Ahora dividimos las mantisas y restamos los exponentes. La división se efectúa solamente hasta  $P$  dígitos significativos.

$$(0.4444 \times 10^7) \div (0.1357 \times 10^4) \approx 3.271 \times 10^3 = 0.3271 \times 10^4$$

$$(0.3333 \times 10^{-4}) \div (0.6543 \times 10^2) \approx 0.5089 \times 10^{-6}$$

$$(0.8877 \times 10^2) \div (0.2121 \times 10^4) \approx 4.185 \times 10^{-2} = 0.4185 \times 10^{-1}$$

### 3.5 ERRORES

Como el computador retiene un número limitado de dígitos significativos, la mayoría de los valores numéricos almacenados y de cálculos son sólo aproximaciones de los valores verdaderos. Así que es ventajoso tener alguna idea de error absoluto y error relativo.

La diferencia entre el verdadero valor y el valor aproximado de una cantidad se llama *error absoluto* (en la aproximación). Esto es, si  $\bar{A}$  es una aproximación del valor de  $A$ , entonces  $e = A - \bar{A}$  es el error absoluto. (Algunos textos definen error absoluto como el valor aproximado menos el valor verdadero.) La razón entre el error absoluto y el valor verdadero.

$$r = \frac{e}{A} = \frac{A - \bar{A}}{A}$$

se llama *error relativo*. Los errores relativos se expresan frecuentemente como porcentajes.

**EJEMPLO 3.9** Si  $A = 1.427$ , encuentre el error absoluto y el error relativo cuando (a)  $A$  es redondeado a 1.43, (b)  $A$  es truncado a 1.42.

(a) El error absoluto  $e$  es la diferencia

$$e = 1.427 - 1.43 = -0.003$$

El error relativo  $r$  es la razón

$$r = \frac{e}{A} = \frac{-0.003}{1.427} = -0.0021$$

Así  $|r| = 0.21$ .

(b)

$$e = 1.427 - 1.42 = 0.007$$

$$r = \frac{e}{A} = \frac{0.007}{1.427} = 0.0049$$

Así  $|r| = 0.49\%$ , que es más de dos veces el error relativo en (a).

Considere cualquier valor numérico  $A$ . Aún sin saber el verdadero valor de  $A$ , podemos colocar una cota en el error relativo,  $r_A$ , cuando  $A$  es redondeado o truncado.

**Teorema 3.1** Cuando  $A$  es redondeado a  $P$  dígitos decimales significativos, entonces,

$$|r_A| < 0.5 \times 10^{-P+1}$$

Cuando  $A$  es truncado a  $P$  dígitos decimales significativos, entonces

$$|r_A| < 10^{-P+1}$$

Para  $P = 4$ , el teorema da  $|r_A| < 0.001$  para redondeo o truncamiento de cualquier número  $A$ .

Fuera del redondeo y del truncamiento, hay otras fuentes de error en el computador. Mencionamos algunas de éstas en los próximos ejemplos.

**EJEMPLO 3.10** (Propagación de errores). Supongamos que un computador trunca todos los valores numéricos a  $P = 4$  dígitos decimales. Entonces  $A = 2/3$  se almacenaría como 0.6666, con un error relativo de

$$r = \frac{(2/3) - 0.6666}{2/3} = 0.0001$$

Sumando  $A$  a sí mismo seis veces da

$$\begin{array}{r} 0.6666 \\ + 0.6666 \\ \hline 1.333 \\ + 0.6666 \\ \hline 1.999 \\ + 0.6666 \\ \hline 2.665 \\ + 0.6666 \\ \hline 3.331 \\ + 0.6666 \\ \hline 3.997 \end{array}$$

Cada vez la suma se trunca a 4 dígitos. La suma verdadera es  $6(2/3) = 4$ . De aquí que el error relativo sea

$$r = \frac{4 - 3.997}{4} = 0.00075$$

que es más de siete veces el error relativo original.

**EJEMPLO 3.11** (Errores de conversión). Una fracción decimal que termina puede convertirse en una fracción binaria que no termina (véase, por ejemplo, el problema 1.15), que necesariamente debe ser truncado para que sea almacenado en el computador. El error que resulta, aunque muy pequeño, puede propagarse a medida que el número se use repetidamente en los cálculos.

**EJEMPLO 3.12** (Cancelación substractiva). Supongamos que queremos encontrar la diferencia,  $D = A - B$ , de dos números casi iguales,  $A$  y  $B$ ; digamos

$$A = 222.88 \quad B = 222.11$$

Si el computador trunca todos los valores numéricos a 4 dígitos decimales,  $A$  y  $B$  se almacenaron como

$$\bar{A} = 0.2228 \times 10^3 \quad \bar{B} = 0.2221 \times 10^3$$

por lo tanto,  $\bar{D} = 0.0007 \times 10^3 = 0.7000$  (un dígito significativo!). El verdadero valor es  $D = 0.77$ . Por lo tanto, el error relativo  $r$  es

$$r = \frac{0.7000}{0.77} = 9.1\%$$

Esto es más de 90 veces la cota 0.1% en errores de truncamiento cuando  $P = 4$ . La cancelación substractiva (pérdida de dígitos significativos cuando dos números casi iguales se restan) es origen de algunos de los errores más serios en cálculos con computadores.

## Problemas resueltos

### CONCEPTOS MATEMATICOS BASICOS

**3.1** Determine el dígito más significativo, el dígito menos significativo, y el número de dígitos significativos en

222.333      8.008      0.0555      0.002 200      440 000





Los dígitos más y menos significativos se han subrayado:

222.333      8.008      0.0555      0.002 200      440 000

Observe que el dígito más significativo es el primer dígito no nulo, y, excepto en el último número, el dígito menos significativo es el último dígito, cero o no cero. En el último número, el dígito menos significativo 0 ya se indicó por medio de una barra superior. Así, los números tienen 6, 4, 3, 4, y 4 dígitos significativos, respectivamente.

### 3.2 Encuentre el número de dígitos significativos de $A = 234\ 000\ 000$ .

Este es el caso ambiguo, en donde se tienen 0s finales pero no hay punto decimal intercalado; A puede tener cualquier número entre 3 y 9 dígitos significativos.

### 3.3 Redondee

555.666      2222.333      333.00      44.665      9.9950      0.005 000

(a) a dos cifras decimales, (b) a 4 dígitos significativos.

(a) El dígito en el tercer puesto decimal es el dígito de prueba. Usando las reglas para redondeo, obtenemos:

555.67      2222.33      333.00      44.66      10.00      0.00

La regla Sume si impar se aplica a los últimos tres números.

(b) El quinto dígito significativo es el dígito de prueba. Así que obtenemos:

555.7      2222      333.0      44.66      9.995      0.005 000

### 3.4 ¿En qué se diferencia la práctica de redondeo común y corriente al procedimiento de este libro?

La mayoría de la gente aproxima por exceso cuando el dígito de prueba es 5, sin aplicar la regla Sume si impar.

### 3.5 Trunque

222.333      5.5555      0.044 44      -7.7777      -0.009 999 99

(a) a un entero, (b) a 4 dígitos significativos.

(a) Sencillamente quite la parte fraccionaria del número, lo que da

222      5      0      -7      0

(b) Quite todos los dígitos después del cuarto dígito significativo, obteniendo

222.3      5.555      0.044 44      -7.777      -0.009 999

### 3.6 Evalúe $|7|$ , $|-7|$ , $|-11|$ , $|0|$ , $|-1|$ , $|13|$ , $|-13|$ ; (b) $|3-5|$ , $|-3+5|$ , $|-3-5|$ .

(a) El valor absoluto es la magnitud del número sin tener en cuenta el signo:

$|7| = 7$        $|-7| = 7$        $|-11| = 11$        $|0| = 0$        $|-1| = 1$        $|13| = 13$        $|-13| = 13$

(b) Evalúe primero dentro de los signos de valor absoluto:

$|3-5| = |-2| = 2$        $|-3+5| = |2| = 2$        $|-3-5| = |-8| = 8$

## FORMA EXPONENCIAL

### 3.7 Escriba de nuevo los siguientes números decimales sin exponentes:

(a)  $2.22 \times 10^4$       (c)  $-444 \times 10^2$       (e)  $0.0666 \times 10^3$   
 (b)  $33.3 \times 10^{-5}$       (d)  $0.005\ 55 \times 10^{-3}$       (f)  $-0.777 \times 10^0$

Multiplicar un número decimal por  $10^n$  es equivalente a correr el punto decimal  $n$  posiciones a la derecha, si  $n$  es positivo, o  $|n|$  posiciones a la izquierda, si  $n$  es negativo. Así que:

- (a) 22 200                      (c) -44 400                      (e) 66.6  
(b) 0.000 333                      (d) 0.000 005 55                      (f) -0.777

- 3.8 Escriba los siguientes números en forma exponencial normalizada: (a) 11.22, (b) -555.666, (c) 0.007 77, (d) -0.000 088, (e) 0.0. Diga la mantisa y el exponente de cada número.

Corra el punto decimal hasta que preceda el primer dígito no nulo, y se obtiene la mantisa. Luego, multiplique la mantisa por aquella potencia de diez que restablezca el punto decimal a su posición original (véase el problema 3.7). El exponente de esa potencia es el exponente de la forma.

	Número	Forma normalizada	Mantisa	Exponente
(a)	11.22	$0.1122 \times 10^2$	0.1122	2
(b)	-555.666	$-0.555\,666 \times 10^3$	-0.555 666	3
(c)	0.007 77	$0.777 \times 10^{-2}$	0.777	-2
(d)	-0.000 088	$-0.88 \times 10^{-4}$	-0.88	-4

- (e) Para el número cero, el exponente es indeterminado y, por lo tanto, no se define una forma exponencial normalizada para este número.

- 3.9 Escriba los números del problema 3.8 en notación científica.

Escriba cada número en forma exponencial, con el punto decimal directamente después del primer dígito no nulo. Así, (a)  $1.122 \times 10^1$ , (b)  $-5.556\,66 \times 10^2$ , (c)  $7.77 \times 10^{-3}$ , (d)  $-8.8 \times 10^{-5}$ . (e) El número cero no tiene notación científica explícita excepto dejando el número tal cual. Por lo tanto, uno supone que 0.0 es un número aproximado de un dígito significativo (el segundo 0).

- 3.10 Encuentre el valor de cada número decimal, escrito en forma E de computador:

- (a) 3.33E+03                      (c) 0.7E6  
(b) 55.5E-4                      (d) -8.8E-02

Aquí E seguido de un entero  $n$  significa multiplicación por  $10^n$ .

- (a)  $3.33\text{E}+03 = 3.33 \times 10^3 = 3330$                       (c)  $0.7\text{E}6 = 0.7 \times 10^6 = 700\,000$   
(b)  $55.5\text{E}-4 = 55.5 \times 10^{-4} = 0.005\,55$                       (d)  $-8.8\text{E}-02 = -8.8 \times 10^{-2} = -0.088$

## REPRESENTACION INTERNA

- 3.11 Encuentre la representación interna de (a) 907, (b) -907, si el computador usa una localización de memoria de 32 bits para almacenar cada número.

- (a) Primero encuentre la forma binaria de 907:

	Residuos
907	
453	1
226	1
113	0
56	1
28	0
14	0
7	0
3	1
1	1

Así que,  $907 = 1110001011_2$ . La forma binaria aparecerá con 0s agregados a la izquierda para llenar el lugar de memoria:

907	0	0	0	0	0	0	0	0	...	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

- (b) Reemplace cada 0 por 1 y cada 1 por 0 en la representación de 907 con 32 bits, y luego súmele 1. Esto nos da la representación de  $-907$ :

-907	1	1	1	1	1	1	1	1	...	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1
------	---	---	---	---	---	---	---	---	-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

En otras palabras,  $-907$  se almacena como el complemento a 2s de 907.

- 3.12 ¿Cómo sabe el computador si un entero  $N$  en la memoria es positivo o negativo?

Si el primer bit es 0, entonces  $N$  es positivo; si el primer bit es 1, entonces  $N$  es negativo.

- 3.13 Encuentre la representación interna de  $A = 93.625$ , suponiendo una localización de memoria de 32 bits.

Primero convierta a  $A$  a forma binaria (véase la sección 1.3).

PARTE ENTERA		PARTE FRACCIONARIA	
	Residuos		
93		0.625	
46	1	$\times 2$	
23	0	1.250	
11	1	$\times 2$	
5	1	0.500	
2	1	$\times 2$	
1	0	1.000	

Así que,  $A = 1011101.101_2$ . Ahora escribimos  $A$  en forma exponencial normalizada:

$$A = 0.1011101101 \times 2^7$$

Así la mantisa de  $A$  es  $M = 0.1011101101$  y el exponente de  $A$  es 7. Súmele  $2^6 = 64$  a 7 para obtener la característica, 71. La forma binaria de 71 es  $1000111_2$ . Por lo tanto,  $A$  aparece en la memoria como sigue:

signo	característica										mantisa															
	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	...	0	0	0

El primer bit es 0, ya que  $A$  es positivo. Observe que se agregan 0s al final de la mantisa para llenar el lugar de memoria.

- 3.14 ¿Cómo sabe el computador si un exponente  $n$  en la memoria es positivo o negativo?

Si el primer bit del campo de la característica es 1, entonces  $n$  es positivo (o cero); si el primer bit es 0, entonces  $n$  es negativo.

## ARITMETICA DEL COMPUTADOR

- 3.15 Supongamos que el computador está programado para efectuar aritmética de enteros en punto fijo. ¿Qué valores se obtienen para (a)  $4 + 9$ ,  $6 - 11$ ,  $4 \times 5$ ,  $-4 + 7$ ,  $-2 - 6$ ,  $-7 \times 3$ ?

(b)  $8/3$ ,  $24/5$ ,  $6/7$ ,  $-30/7$ ,  $-4/9$ ,  $-11/2$ ?

- (a) La adición, sustracción y multiplicación de enteros da los mismos resultados de las operaciones aritméticas usuales. Así que:

$$13 \quad -5 \quad 20 \quad 3 \quad -8 \quad -21$$

- (b) El resultado de la división de enteros es la parte entera del cociente usual. (Por parte entera de un entero negativo, entendemos el entero no positivo  $a$  obtenido al quitar todos los dígitos que siguen al punto decimal. En algunos textos matemáticos, se toma  $a - 1$  como la "parte entera" si el número dado es no entero.) Así que:

$$2 \quad 4 \quad 0 \quad -4 \quad 0 \quad -5$$

- 3.16 Muestre cómo efectúa el computador las siguientes adiciones en punto flotante (en donde las mantisas se han truncado a  $P = 4$  dígitos decimales):

$$(a) \quad 0.5566 \times 10^3 + 0.7777 \times 10^3 \quad (b) \quad 0.3344 \times 10^2 + 0.8877 \times 10^{-1}$$

- (a) Los exponentes son iguales. Así que las mantisas se suman, guardando el exponente común, y luego la suma se renormaliza, si es necesario.

$$0.5566 \times 10^3 + 0.7777 \times 10^3 = 1.3343 \times 10^3 \approx 0.1334 \times 10^4$$

- (b) Los exponentes son diferentes. El punto decimal en la mantisa que corresponde al exponente menor se corre para hacer los dos exponentes iguales. Ahora se sigue el procedimiento de (a).

$$0.3344 \times 10^2 + 0.8877 \times 10^{-1} = 0.3344 \times 10^2 + 0.0008877 \times 10^2 = 0.3352877 \times 10^2 \approx 0.3352 \times 10^2$$

- 3.17 Muestre cómo efectúa el computador las siguientes sustracciones en punto flotante (en donde las mantisas se han truncado a  $P = 4$  dígitos decimales):

$$(a) \quad 0.7744 \times 10^{-2} - 0.6666 \times 10^{-2} \quad (b) \quad 0.8844 \times 10^{-2} - 0.2233 \times 10^0$$

- (a) Los exponentes son los mismos. Así que las mantisas se restan, manteniéndose el exponente común, y luego se renormaliza la diferencia, si es necesario.

$$0.7744 \times 10^{-2} - 0.6666 \times 10^{-2} = 0.1078 \times 10^{-2}$$

- (b) Los exponentes son diferentes. El punto decimal en la mantisa que corresponde al exponente menor se corre para igualar los dos exponentes. Ahora se sigue el procedimiento de (a).

$$0.8844 \times 10^{-2} - 0.2233 \times 10^0 = 0.008844 \times 10^0 - 0.2233 \times 10^0 = -0.214456 \times 10^0 \approx -0.2144 \times 10^0$$

- 3.18 Muestre cómo efectúa el computador los siguientes cálculos en punto flotante (en donde las mantisas se han truncado a  $P = 4$  dígitos decimales):

$$(a) \quad (0.2255 \times 10^2) \times (0.1234 \times 10^1) \quad (b) \quad (0.8833 \times 10^3) \div (0.5555 \times 10^5)$$

- (a) En la multiplicación, las mantisas se multiplican y los exponentes se suman. De nuevo, los resultados se renormalizan, si es necesario.

$$(0.2255 \times 10^2) \times (0.1234 \times 10^1) = 0.02582670 \times 10^3 \approx 0.2582 \times 10^2$$

- (b) En la división, las mantisas se dividen hasta obtener  $P = 4$  dígitos significativos, y los exponentes se restan.

$$(0.8833 \times 10^3) \div (0.5555 \times 10^5) = 1.590 \times 10^{-2} = 0.1590 \times 10^{-1}$$

## ERRORES

- 3.19 Supongamos que se ha redondeado 91 637 146 millas, la distancia media entre la tierra y el sol, a 92 000 000 millas. Encuentre el error absoluto y el error relativo de esta aproximación.

El error absoluto,  $e$ , es la diferencia entre el verdadero valor y el valor aproximado:

$$e = 91\,637\,146 - 92\,000\,000 = -392\,854 \text{ millas}$$

El error relativo,  $r$ , es la razón entre el error absoluto y el valor verdadero:

$$r = \frac{-392\,854 \text{ millas}}{91\,637\,146 \text{ millas}} = -0.00429 = -0.429\%$$

Observe que el error relativo no tiene dimensión.

- 3.20 Los valores numéricos  $A$  y  $B$  se almacenan en el computador como aproximación  $\bar{A}$  y  $\bar{B}$ , que luego se multiplican. Sin tomar en cuenta un nuevo error de truncamiento o de redondeo, demuestre que el error relativo del producto es la suma de los errores relativos de los factores.

Tenemos

$$r_A = \frac{A - \bar{A}}{A} = 1 - \frac{\bar{A}}{A} \quad \text{o} \quad \bar{A} = A(1 - r_A)$$

Igualmente,  $\bar{B} = B(1 - r_B)$ , se sigue que

$$\bar{A}\bar{B} = AB(1 - r_A)(1 - r_B) = AB[1 - (r_A + r_B) + r_A r_B] \approx AB[1 - (r_A + r_B)]$$

Ya que el producto de las dos cantidades pequeñas  $r_A$  y  $r_B$  será insignificante en comparación con su suma. Por consiguiente,  $r_{AB} = r_A + r_B$ , que es lo que se nos pedía demostrar. Uno frecuentemente expresa este resultado con la afirmación de que *cuando se multiplican cantidades, sus errores porcentuales se suman*.

## Problemas suplementarios

### CONCEPTOS MATEMATICOS BASICOS

- 3.21 Determinar el dígito más significativo, el menos significativo, y el número de dígitos significativos en (a) 44.44, 30 303, 6.6707, 5.005; (b) 0.222, 0.000 333 3, 00 011, 0.008 008; (c) 2.220 00, 3300.000, 0.004 440 55 500 000.
- 3.22 Redondee 22.4444, 1.234 567, 333.777, 0.065 432 1, 0.005 678 (a) a 2 decimales, (b) a 3 decimales, (c) a 4 dígitos significativos.
- 3.23 Redondee 0.445 00, 7.775, 66.665 000, 8.885 020, 2.3350 (a) a 2 decimales, (b) a 2 dígitos significativos.
- 3.24 Trunque 44.44, 30 303, 6.6707, 5.005, -0.044 488 8 (a) a un entero, (b) a 4 dígitos significativos.
- 3.25 Sea  $\text{TRUN}(Q)$  la parte entera del número  $Q$ . Resuelva la ecuación
- $$2 \times \text{TRUN}(N/2) = N$$
- 3.26 Evalúe

$$\begin{array}{lll} (a) & |4 - 9| & (c) & |-4 + 9| & (e) & |3 - 5| - |6 - 2| \\ (b) & |-4 - 9| & (d) & |-4| - |9| & (f) & ||-6| - |3 - 12|| \end{array}$$

### FORMA EXPONENCIAL

- 3.27 Escriba de nuevo sin exponente:

- |                            |                              |                            |
|----------------------------|------------------------------|----------------------------|
| (a) $44.44 \times 10^4$    | (c) $-0.066 \times 10^2$     | (e) $88.99 \times 10^0$    |
| (b) $55.55 \times 10^{-5}$ | (d) $0.00077 \times 10^{-3}$ | (f) $1.234 \times 10^{-4}$ |

**3.28** Escriba cada número en forma exponencial normalizada:

- |             |               |             |
|-------------|---------------|-------------|
| (a) 333.444 | (c) 0.0006677 | (e) 222.000 |
| (b) -1.2345 | (d) -0.8899   | (f) -0.03   |

**3.29** Encuentre la mantisa y el exponente de cada uno de los números en el problema 3.28.

**3.30** Escriba en notación científica cada uno de los números en el problema 3.28.

**3.31** Encuentre el valor de cada uno de los números escritos en forma E de computador: (a)  $222.2E+2$ , (b)  $-3.3E-03$ , (c)  $0.4E4$ , (d)  $0.5E-5$ .

**3.32** Dé la forma exponencial normalizada binaria de cada uno de los números binarios: (a) 111.000111, (b) 0.0011001100, (c) 1010.1010, (d) 0.1111.

### REPRESENTACION INTERNA

En cada uno de los problemas 3.33 a 3.38, suponga que el computador almacena cada número en un lugar de memoria de 32 bits.

**3.33** Encuentre la representación interna de (a) 118, (b) -118.

**3.34** Encuentre la representación interna de (a) 397, (b) -397.

**3.35** Encuentre la representación interna de  $A = -50.375$ .

**3.36** Encuentre la representación interna de  $B = 0.09375$

**3.37** Encuentre la representación interna de  $C = 0.2$

**3.38** Supongamos que un exponente  $n$  se representa en un campo de 7 bits como sigue. El primer bit se reserva para el signo, 1 para +, 0 para -. En el campo de 6 bits restante,  $n$  es representado en su forma binaria si  $n$  es positivo, y como su complemento a 2s si  $n$  es negativo. Demuestre que ésta es exactamente la misma representación dada al almacenar la característica de 7 bits de  $n$ ,  $C = n + 64$ .

### ARITMETICA DEL COMPUTADOR

**3.39** Si el computador ha sido programado para efectuar aritmética de enteros en punto fijo, ¿qué valores se obtienen para (a)  $6 + 10$ ,  $2 - 7$ ,  $3 \times (-5)$ ,  $-4 - 8$ ,  $-4 - (6 - 3)$ ? (b)  $11/4$ ,  $-15/3$ ,  $8/11$ ,  $123/4$ ,  $-26/8$ ,  $-5/8$ ?

**3.40** En la aritmética de enteros, el cociente  $J/K$  de dos enteros  $J$  y  $K$  es menor o igual que el cociente usual. (¿Verdadero o falso?)

En los problemas 3.41 a 3.44, suponga que el computador trunca las mantisas hasta  $P = 4$  dígitos decimales.

**3.41** Dé los resultados de las tres adiciones en punto flotante: (a)  $0.2233 \times 10^2 + 0.6688 \times 10^1$ , (b)  $5.666 + 44.55$ , (c)  $111.77 + 55.666$ .

**3.42** Efectúe las siguientes sustracciones en punto flotante: (a)  $0.9922 \times 10^{-3} - 0.4477 \times 10^{-3}$ , (b)  $33.666 - 2.7777$ , (c)  $0.8888 \times 10^2 - 0.2222 \times 10^3$ .

- 3.43 Dé los resultados de las siguientes multiplicaciones en punto flotante: (a)  $(0.5432 \times 10^3) \times (0.3333 \times 10^{-5})$ ,  
(b)  $222.88 \times 1.1177$ .
- 3.44 Efectúe las siguientes divisiones en punto flotante: (a)  $(0.2233 \times 10^{-2}) \div (0.6611 \times 10^3)$ , (b)  $111.99 \div 44.888$ .

### ERRORES

- 3.45 Dado  $A = 66.888$ , encuentre el error absoluto  $e$  y el error relativo  $r$  si (a)  $A$  ha sido redondeado a 66.89,  
(b)  $A$  ha sido truncado a 66.88.
- 3.46 Dado  $A = 66.888$  y  $B = 66.111$ . Cuando el computador calcula la diferencia  $D = A - B$  (en donde las mantisas han sido truncadas a  $P = 4$  dígitos), ¿cuáles son los errores absolutos y relativo?
- 3.47 Encuentre una cota al error absoluto cuando se suman dos números aproximados.

### Respuestas a los problemas suplementarios

- 3.21 (a) 44.44, cuatro; 30 303, cinco; 6.6707, cinco; 5.005, cuatro.  
(b) 0.222, tres; 0.000 333 3, cuatro; 00 011, dos; 0.008 008, cuatro.  
(c) 2.220 00, seis; 3300.000, siete; 0.004 440 0, cinco; 55 500 000, seis.
- 3.22 (a) 22.44, 1.23, 333.78, 0.06, 0.00  
(b) 22.444, 1.235, 333.777, 0.065, 0.006  
(c) 22.44, 1.235, 333.8, 0.065 43, 0.005 678
- 3.23 (a) 0.44, 7.78, 66.66, 8.89, 2.34; (b) 0.44, 7.8, 67, 8.9, 2.3
- 3.24 (a) 44, 30 303, 6, 5, 0; (b) 44.44, 30 300, 6.670, 5.005, -0.044 48
- 3.25  $N/2 =$  entero, o  $N =$  entero par,
- 3.26 (a) 5, (b) 13, (c) 5, (d) -5, (e) -2, (f) 3
- 3.27 (a) 444 400, (b) 0.000 555 5, (c) -6.6, (d) 0.000 000 77, (e) 88.99, (f) 0.000 123 4
- 3.28 (a)  $0.333\ 444 \times 10^3$  (c)  $-0.6677 \times 10^{-3}$  (e)  $0.222\ 000 \times 10^6$   
(b)  $-0.123\ 45 \times 10^1$  (d)  $-0.8899 \times 10^0$  (f)  $-0.3 \times 10^{-1}$
- 3.29 (a)  $0.333\ 444$ ,  $n = 3$  (c)  $-0.6677$ ,  $n = -3$  (e)  $0.222\ 000$ ,  $n = 6$   
(b)  $-0.123\ 45$ ,  $n = 1$  (d)  $-0.8899$ ,  $n = 0$  (f)  $-0.3$ ,  $n = -1$
- 3.30 (a)  $3.334\ 44 \times 10^2$ , (b)  $-1.2345$ , (c)  $6.677 \times 10^{-4}$ , (d)  $-8.899 \times 10^1$ , (e)  $2.220\ 00 \times 10^5$ , (f)  $-3 \times 10^{-2}$
- 3.31 (a) 22 220, (b) -0.0033, (c) 4000, (d) 0.000 005
- 3.32 (a)  $0.111000111 \times 2^3$ , (b)  $0.11001100 \times 2^{-2}$ , (c)  $-0.10101010 \times 2^4$  (d)  $0.1111 \times 2^0$
- 3.33 (a) 

0	0	0	...	0	0	1	1	1	0	1	1	0
---	---	---	-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---

  
(b) 

1	1	1	...	1	1	0	0	0	1	0	1	0
---	---	---	-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---

3.34

(a)	0	0	0	...	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1
(b)	1	1	1	...	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1

3.35

1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	...	0	0	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----	---	---	---

3.36

0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	...	0	0	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----	---	---	---

3.37

0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	...	1	1	0	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----	---	---	---	---

3.39 (a) 16, -5, -15, -12, -7; (b) 2, -5, 0, 30, -3, 0

3.40 Falso; para un cociente negativo, el truncamiento generalmente da un número mayor.

3.41 (a)  $0.2901 \times 10^2$ , (b)  $0.5021 \times 10^2$ , (c)  $0.1673 \times 10^3$ 3.42 (a)  $0.5445 \times 10^{-3}$ , (b)  $0.3088 \times 10^2$ , (c)  $-0.1333 \times 10^3$ 3.43 (a)  $0.1810 \times 10^{-2}$ , (b)  $0.2488 \times 10^3$ 3.44 (a)  $0.3377 \times 10^{-5}$ , (b)  $0.2493 \times 10^1$ 3.45 (a)  $e = -0.002$ ,  $r = -0.00299\%$ ; (b)  $e = 0.008$ ,  $r = 0.01196\%$ 3.46  $D = 0.777$ ,  $\bar{D} = 0.77$ ,  $e = 0.007$ ,  $r = 0.90\%$ 3.47  $|e_{A+B}| = |e_A + e_B| \leq |e_A| + |e_B|$



# Capítulo 4

## Lógica, tablas de verdad

### 4.1 INTRODUCCION

Un computador puede ser programado para tomar decisiones basadas en si ciertos enunciados —por ejemplo, “El número que se ha computado es mayor que 100”— son verdaderos o falsos. A la verdad o falsedad de un enunciado se le llama *valor de verdad*; un enunciado es *verdadero* o *falso*, pero no ambas cosas. Algunos enunciados son *enunciados compuestos*, es decir, están integrados por subenunciados y varias conectivas.

#### EJEMPLO 4.1

- (a) “Las rosas son rojas y las violetas azules” es un enunciado compuesto por los subenunciados “las rosas son rojas” y “las violetas son azules”.
- (b) “El es inteligente o estudia todas las noches” es, implícitamente, un enunciado compuesto por los subenunciados “El es inteligente” y “estudia todas las noches”.
- (c) “¿Para dónde va?” no es un enunciado ya que no es ni verdadero ni falso.

La propiedad fundamental de un enunciado compuesto es que su valor de verdad está completamente determinado por los valores de verdad de sus subenunciados junto con la manera como están conectados para formar el enunciado compuesto. Comenzamos con un estudio de algunas de estas conectivas. En este capítulo usaremos las letras  $p$ ,  $q$ ,  $r$  (en minúsculas o mayúsculas, con o sin subíndices) para denotar enunciados.

### 4.2 CONJUNCION, $p \wedge q$

Dos enunciados cualesquiera se pueden combinar con la palabra “y” para formar un enunciado compuesto llamado la *conjunción* de los enunciados originales. Simbólicamente,

$$p \wedge q$$

denota la conjunción de los enunciados  $p$  y  $q$ , que se lee “ $p$  y  $q$ ”.

La tabla de verdad del enunciado compuesto  $p \wedge q$  está dada por la siguiente tabla:

$p$	$q$	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

En este caso, la primera línea es una manera abreviada de decir que si  $p$  es verdadero y  $q$  es verdadero, entonces  $p \wedge q$  es verdadero. Las otras líneas tienen significados análogos. Consideramos que esta tabla define precisamente el valor de verdad del enunciado compuesto  $p \wedge q$  como una función de los valores de verdad de  $p$  y de  $q$ . Observe que  $p \wedge q$  es verdadero solamente en el caso en que ambos subenunciados sean verdaderos.

**EJEMPLO 4.2** Considere los cuatro enunciados siguientes:

- (i) París está en Francia y  $2 + 2 = 4$ .
- (ii) París está en Francia y  $2 \div 2 = 5$ .
- (iii) París está en Inglaterra y  $2 + 2 = 4$ .
- (iv) París está en Inglaterra y  $2 + 2 = 5$ .

Solamente el primer enunciado es verdadero. Cada uno de los otros enunciados es falso ya que por lo menos uno de sus subenunciados es falso.

### 4.3 DISYUNCION, $p \vee q$

Dos enunciados pueden combinarse con la palabra “o” (en el sentido de “y/o”) para formar un nuevo enunciado que se llama la *disyunción* de los dos enunciados originales. Simbólicamente,

$$p \vee q$$

denota la disyunción de los enunciados  $p$  y  $q$  y se lee “ $p$  o  $q$ ”.

El valor de verdad de  $p \vee q$  está dado por la siguiente tabla de verdad, que consideramos define a  $p \vee q$ :

$p$	$q$	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Observe que  $p \wedge q$  es falso solamente cuando ambos enunciados son falsos.

**EJEMPLO 4.3** Considere los cuatro enunciados:

- (i) París está en Francia o  $2 + 2 = 4$ .
- (ii) París está en Francia o  $2 + 2 = 5$ .
- (iii) París está en Inglaterra o  $2 + 2 = 4$ .
- (iv) París está en Inglaterra o  $2 + 2 = 5$ .

Solamente (iv) es falso. Cada uno de los otros enunciados es verdadero ya que por lo menos uno de sus subenunciados es verdadero.

**Observación:** La palabra española “o” se usa comúnmente de dos maneras. Algunas veces se usa en el sentido de “ $p$  o  $q$  o ambos”, mejor dicho, por lo menos una de las dos alternativas ocurre, como antes se señaló, y algunas veces se usa en el sentido de “ $p$  o  $q$  pero no ambos”, mejor dicho, exactamente una de las dos alternativas ocurre. Por ejemplo, la frase “El estudiará en la Universidad Nacional o en la Universidad Católica” usa el “o” en el segundo sentido llamado *disyunción exclusiva*. A no ser que se diga otra cosa, la “o” se usará en el primer sentido. Esta observación hace sobresalir la precisión que ganamos con nuestro lenguaje simbólico:  $p \vee q$  está definido por su tabla de verdad y *siempre* significa “ $p$  y/o  $q$ ”.

### 4.4 NEGACION, $\sim p$

Dado cualquier enunciado  $p$ , se puede formar otro enunciado, llamado la *negación* de  $p$ , escribiendo “Es falso que. . .” antes de  $p$  o, si es posible incertando en  $p$  la palabra “no”. Simbólicamente,

$$\sim p$$

denota la negación de  $p$  (se lee “no  $p$ ”).

La tabla de verdad de  $\sim p$  está dada por la siguiente tabla:

$p$	$\sim p$
V	F
F	V



En otras palabras, si  $p$  es verdadero entonces  $\sim p$  es falso, y si  $p$  es falso entonces  $\sim p$  es verdadero. Así, el valor de verdad de la negación de cualquier enunciado es siempre el opuesto del valor de verdad del enunciado original.

**EJEMPLO 4.4** Considere los siguientes enunciados

- (a) París está en Francia. (d)  $2 + 2 = 5$ .  
 (b) Es falso que París está en Francia. (e) Es falso que  $2 + 2 = 5$ .  
 (c) París no está en Francia. (f)  $2 + 2 \neq 5$ .

Entonces (b) y (c) son cada una la negación de (a); y (e) y (f) son cada uno la negación de (d). Ya que (a) es verdadero, los enunciados (b) y (c) son falsos; y como (d) es falso, los enunciados (e) y (f) son verdaderos.

*Observación:* La notación lógica para las conectivas “y”, “o” y “no” no es estándar. Por ejemplo, algunos textos usan

$$\begin{aligned} p \& q, p \cdot q \text{ o } pq & \text{ para } p \wedge q \\ p + q & \text{ para } p \vee q \\ p', \bar{p} \text{ o } \neg p & \text{ para } \sim p \end{aligned}$$

#### 4.5 PROPOSICIONES Y TABLAS DE VERDAD

Con un uso repetido de las conectivas lógicas ( $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\sim$  y otras que se discutirán adelante), podemos construir enunciados compuestos que son más elaborados. En el caso en que los sub-enunciados  $p$ ,  $q$ , ... de un enunciado compuesto  $P(p, q, \dots)$  sean variables, llamamos al enunciado compuesto una *proposición*.

Ahora el valor de verdad de una proposición depende exclusivamente de los valores de verdad de sus variables, mejor dicho, el valor de verdad de una proposición se conoce una vez que se conozcan los valores de verdad de sus variables. La tabla de verdad de la proposición  $\sim(p \wedge \sim q)$ , por ejemplo, se construye como sigue:

$p$	$q$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim(p \wedge \sim q)$
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

Observe que las primeras columnas de la tabla son para las variables  $p$ ,  $q$ , ... y que hay suficientes líneas en la tabla para permitir todas las posibles combinaciones de  $V$  y  $F$  para estas variables. (Para 2 variables, como en el caso anterior, se necesitan 4 líneas; para 3 variables se necesitan 8 líneas; y, en general, para  $n$  variables se necesitan  $2^n$  líneas.) Hay pues una columna para cada etapa “elemental” de la construcción del enunciado el valor de verdad de cada paso es determinado por las etapas anteriores con las definiciones de las conectivas  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\sim$ . Finalmente, obtenemos la tabla de verdad de la proposición, que aparece en la última columna.

*Observación:* La tabla de verdad de la proposición anterior consiste precisamente en las columnas bajo las variables y la columna bajo la proposición:

$p$	$q$	$\sim(p \wedge \sim q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Las otras columnas se usaron solamente en la construcción de la tabla de verdad.

Otra manera de construir la tabla de verdad anterior para  $\sim (p \wedge \sim q)$  es la siguiente. Primero se construye la siguiente tabla:

$p$	$q$	$\sim (p \wedge \sim q)$			
V	V				
V	F				
F	V				
F	F				

Paso

Observe que la proposición se escribe en la línea superior a la derecha de sus variables, y que hay una columna bajo cada variable o conectiva de la proposición. Los valores de verdad se colocan entonces en la tabla de verdad en varios pasos como sigue:

$p$	$q$	$\sim$	$(p \wedge \sim q)$	
V	V		V	
V	F		V	
F	V		F	
F	F		F	

Paso

(a)

$p$	$q$	$\sim$	$(p \wedge \sim q)$	
V	V		V	F
V	F		V	V
F	V		F	F
F	F		F	V

Paso

(b)

$p$	$q$	$\sim$	$(p \wedge \sim q)$			
V	V		V	F	F	V
V	F		V	V	V	F
F	V		F	F	F	V
F	F		F	F	V	F
Paso			1	3	2	1

(c)

$p$	$q$	$\sim$	$(p \wedge \sim q)$			
V	V	V	V	F	F	V
F	V	F	V	V	V	F
F	F	V	F	F	F	V
F	F	V	F	F	V	F
Paso		4	1	3	2	1

(d)

La tabla de verdad de la proposición está formada, pues, por las columnas originales bajo las variables y la última columna colocada en la tabla, mejor dicho, el último paso.

#### 4.6 TAUTOLOGIAS Y CONTRADICCIONES

Algunas proposiciones  $P(p, q, \dots)$  contienen solamente V en la última columna de sus tablas de verdad, es decir, son verdaderas para cualquier valor de verdad de sus variables. A tales proposiciones se les llama *tautologías*. Análogamente, una proposición  $P(p, q, \dots)$  se llama *contradicción* si contiene solamente F en la última columna de su tabla de verdad, o sea, es falso para cualquier valor de verdad de sus variables. Por ejemplo, la proposición “ $p$  o no  $p$ ”, es decir,  $p \vee \sim p$ , es una tautología y la proposición “ $p$  y no  $p$ ”, es decir,  $p \wedge \sim p$ , es una contradicción. Esto se verifica construyendo sus tablas de verdad.

$p$	$\sim p$	$p \vee \sim p$
V	F	V
F	V	V

$p$	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
V	F	F
F	V	F

Observamos que la negación de una tautología es una contradicción ya que siempre es falsa, y la negación de una contradicción es una tautología ya que siempre es verdadera.

Ahora, sea  $P(p, q, \dots)$  una tautología, y sean  $P_1(p, q, \dots)$ ,  $P_2(p, q, \dots)$ , ... proposiciones cualesquiera. Como el valor de verdad de  $P(p, q, \dots)$  no depende de los valores de verdad par-

ticulares de sus variables  $p, q, \dots$ , podemos reemplazar  $p$  por  $P_1$ ,  $q$  por  $P_2, \dots$  en la tautología  $P(p, q, \dots)$  y tenemos aún una tautología. En otras palabras:

**Principio de substitución:** Si  $P(p, q, \dots)$  es una tautología, entonces  $P(P_1, P_2, \dots)$  es una tautología para proposiciones cualesquiera  $P_1, P_2, \dots$ .

**EJEMPLO 4.5** Por la anterior tabla de verdad,  $p \vee \sim p$  es una tautología. Reemplazando  $p$  por  $q \wedge r$  obtenemos la proposición  $(q \wedge r) \vee \sim (q \wedge r)$  que, por el Principio de substitución, también debiera ser una tautología. Esto se verifica con la siguiente tabla de verdad:

$q$	$r$	$q \wedge r$	$\sim (q \wedge r)$	$(q \wedge r) \vee \sim (q \wedge r)$
V	V	V	F	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

#### 4.7 EQUIVALENCIA LOGICA: ALGEBRA DE PROPOSICIONES

Se dice que dos proposiciones  $P(p, q, \dots)$  y  $Q(p, q, \dots)$  son *lógicamente equivalentes*, o sencillamente *equivalentes* o *iguales*, denotado por

$$P(p, q, \dots) \equiv Q(p, q, \dots)$$

si tienen idénticas tablas de verdad. Por ejemplo, considere las tablas de verdad de  $\sim(p \wedge q)$  y  $\sim p \vee \sim q$ :

$p$	$q$	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$p$	$q$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
V	V	V	F	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	F	F	V	V
F	V	F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	F	F	V	V	V

Como las tablas de verdad son las mismas, mejor dicho, ambas proposiciones son falsas en el primer caso y verdaderas en los otros tres casos, las proposiciones  $\sim(p \wedge q)$  y  $\sim p \vee \sim q$  son lógicamente equivalentes y podemos escribir:

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

**EJEMPLO 4.6** Considere el enunciado

“Es falso que las rosas son rojas y las violetas son azules”.

Este enunciado se puede escribir en la forma  $\sim(p \wedge q)$  en donde  $p$  es “las rosas son rojas” y  $q$  es “las violetas son azules”. Sin embargo, por las tablas de verdad anteriores,  $\sim(p \wedge q)$  es lógicamente equivalente con  $\sim p \vee \sim q$ . Así, el enunciado dado tiene el mismo significado que el enunciado.

“Las rosas no son rojas, o las violetas no son azules.”

Las proposiciones satisfacen muchas equivalencias lógicas, o leyes, fuera de las descritas anteriormente. Algunas de las leyes más importantes, con sus nombres se dan en la tabla 4-1. En la tabla,  $t$  denota una tautología y  $f$  denota una contradicción.

#### 4.8 ENUNCIADOS CONDICIONAL Y BICONDICIONAL

Muchos enunciados, particularmente en la matemática, son de la forma “Si  $p$  entonces  $q$ ”. Tales enunciados se llaman enunciados *condicionales* y se denotan por

$$p \rightarrow q$$

Tabla 4-1. Leyes del Algebra de proposiciones

Leyes de idempotencia	
1a. $p \vee p = p$	1b. $p \wedge p = p$
Leyes asociativas	
2a. $(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$	2b. $(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$
Leyes conmutativas	
3a. $p \vee q = q \vee p$	3b. $p \wedge q = q \wedge p$
Leyes distributivas	
4a. $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	4b. $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
Leyes de identidad	
5a. $p \vee f = p$	5b. $p \wedge t = p$
6a. $p \vee t = t$	6b. $p \wedge f = f$
Leyes de complementos	
7a. $p \vee \sim p = t$	7b. $p \wedge \sim p = f$
8a. $\sim t = f$	8b. $\sim f = t$
Ley de involución	
9. $\sim \sim p = p$	
Leyes de DeMorgan	
10a. $\sim(p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$	10b. $\sim(p \wedge q) = \sim p \vee \sim q$

El condicional  $p \rightarrow q$  frecuentemente se lee “ $p$  implica  $q$ ” o “ $p$  sólo si  $q$ ”.

Otro enunciado común es la forma “ $p$  si y sólo si  $q$ ”. Tales enunciados denotados por

$$p \leftrightarrow q$$

se llaman enunciados *bicondicionales*.

Los valores de verdad de  $p \rightarrow q$  y  $p \leftrightarrow q$  se dan en las siguientes tablas:

$p$	$q$	$p \rightarrow q$	$p$	$q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	F
F	F	V	F	F	V

Observe que el condicional  $p \rightarrow q$  es falso solamente cuando la primera parte  $p$  es verdadera y la segunda parte  $q$  es falsa. En caso de que  $p$  sea falso, el condicional  $p \rightarrow q$  es verdadero sin importar el valor de verdad de  $q$ . Observe también que  $p \leftrightarrow q$  es verdadero cuando  $p$  y  $q$  tienen los mismos valores de verdad y falso en los demás casos. (Para la relación entre los enunciados bicondicional y condicional, véanse los problemas 4.15 y 4.16.)

Ahora considere la tabla de verdad de la proposición  $\sim p \vee q$ :

$p$	$q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

Observe que la anterior tabla de verdad es idéntica a la tabla de verdad de  $p \rightarrow q$ . Así que  $p \rightarrow q$  es lógicamente equivalente a la proposición  $\sim p \vee q$ :

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

En otras palabras, el enunciado condicional “Si  $p$  entonces  $q$ ” es lógicamente equivalente al enunciado “No  $p$  o  $q$ ”, que solamente usa las conectivas  $\vee$  y  $\sim$ , por lo tanto, ya era parte de nuestro lenguaje.

Considere la proposición condicional  $p \rightarrow q$  y las otras proposiciones condicionales simples que contienen  $p$  y  $q$ :

$$q \rightarrow p, \quad \sim p \rightarrow \sim q \quad \text{y} \quad \sim q \rightarrow \sim p$$

Estas proposiciones se llaman respectivamente la *recíproca*, *inversa*, y *contrarrecíproca* de la proposición  $p \rightarrow q$ . En seguida presentamos las tablas de verdad de las cuatro proposiciones.

$p$	$q$	Condicional $p \rightarrow q$	Recíproca $q \rightarrow p$	Inversa $\sim p \rightarrow \sim q$	Contrarrecíproca $\sim q \rightarrow \sim p$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V

Observe que un enunciado condicional y su recíproco o inverso no son lógicamente equivalentes. Por otra parte, se puede ver que un enunciado condicional y su contrarrecíproco son lógicamente equivalentes. Enunciamos este resultado formalmente:

**Teorema 4.1:** Un enunciado condicional  $p \rightarrow q$  y su contrarrecíproca  $\sim q \rightarrow \sim p$  son lógicamente equivalentes.

#### EJEMPLO 4.7

(a) Considere los siguientes enunciados sobre un triángulo  $A$ :

$p \rightarrow q$ : Si  $A$  es equilátero, entonces  $A$  es isósceles.

$q \rightarrow p$ : Si  $A$  es isósceles, entonces  $A$  es equilátero.

En este caso  $p \rightarrow q$  es verdadero, pero su recíproco  $q \rightarrow p$  es falso.

(b) Sea  $x$  un entero. Demuestre:  $(p \rightarrow q)$ . Si  $x^2$  es impar entonces  $x$  es impar.

Demostramos que la contrarrecíproca  $\sim q \rightarrow \sim p$ , “Si  $x$  es par, entonces  $x^2$  es par”, es verdadera. Sea  $x$  par; entonces,  $x = 2n$  en donde  $n$  es un entero. Por lo tanto,

$$x^2 = (2n)(2n) = 2(2n^2)$$

también es par. Como la contrarrecíproca  $\sim q \rightarrow \sim p$  es verdadera, el enunciado condicional original  $p \rightarrow q$  es también verdadero.

#### 4.9 ARGUMENTOS

Un *argumento* es una relación entre un conjunto de proposiciones  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , llamadas *premisas*, y otra proposición  $Q$ , llamada la *conclusión*; denotamos un argumento por

$$P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q$$

Se dice que un argumento es *válido* si las premisas dan (como consecuencia) la conclusión; más formalmente, damos la siguiente

**Definición:** Un argumento  $P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q$  es válido si  $Q$  es verdadero cada vez que las premisas  $P_1, P_2, \dots, P_n$  sean verdaderas.

Un argumento que no es válido se llama *falacia*.

#### EJEMPLO 4.8

(a) El siguiente argumento es válido:

$$p, p \rightarrow q \vdash q \quad (\text{Ley de independencia, } \textit{modus ponendo ponens.})$$

La demostración de esta regla se sigue de la siguiente tabla de verdad.

$p$	$q$	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Ya que  $p$  es verdadero en los casos (líneas) 1 y 2, y  $p \rightarrow q$  es verdadero en los casos 1, 3 y 4; se sigue que  $p$  y  $p \rightarrow q$  son verdaderos simultáneamente en el caso 1. Como en este caso  $q$  es verdadero, el argumento es válido.

- (b) El siguiente argumento es una falacia:  $p \rightarrow q, q \vdash p$ . Ya que  $p \rightarrow q$  y  $q$  son ambos verdaderos en el caso (línea) 3 en la anterior tabla de verdad, pero en este caso  $p$  es falso.

Ahora las proposiciones  $P_1, P_2, \dots, P_n$  son verdaderas simultáneamente si y sólo si la proposición  $P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n$  es verdadera. Así el argumento  $P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q$  es válido si y sólo si  $Q$  es verdadero cada vez que  $P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n$  sea verdadero o, equivalentemente, si y sólo si la proposición

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n) \rightarrow Q$$

es una tautología. Establecemos este resultado formalmente.

**Teorema 4.2:** El argumento  $P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q$  es válido si y sólo si  $(P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n) \rightarrow Q$  es una tautología.

En el siguiente ejemplo aplicamos este teorema.

**EJEMPLO 4.9** Un principio fundamental del razonamiento lógico dice:

“Si  $p$  implica  $q$  y  $q$  implica  $r$ , entonces  $p$  implica  $r$ ”.

O sea, el siguiente argumento es válido:

$$p \rightarrow q, q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r \quad (\text{Ley del Silogismo})$$

Este hecho se verifica con la siguiente tabla de verdad que muestra que la proposición

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$$

es una tautología:

$p$	$q$	$r$	$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$										
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V	F	F	V	V	F	F
V	F	V	V	F	F	F	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	F	F	V	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	V	V	V	V	V	V	F	V	V
F	V	F	F	V	V	F	V	F	F	V	F	V	F
F	F	V	F	V	F	V	F	V	V	V	F	V	V
F	F	F	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F
paso			1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1

Equivalentemente, el argumento es válido ya que las premisas  $p \rightarrow q$  y  $q \rightarrow r$  son verdaderas simultáneamente solo en los casos (líneas) 1, 5, 7 y 8, y en estos casos la conclusión  $p \rightarrow r$  también es verdadera. (Observe que la tabla de verdad requiere  $2^3 = 8$  líneas, ya que hay tres variables  $p, q$  y  $r$ .)

Es necesario destacar que la validez del argumento no depende de los valores de verdad o del contenido de los enunciados que aparecen en el argumento, sino solamente de la estructura formal del argumento. Esto se ilustra con el siguiente ejemplo.



**EJEMPLO 4.10** Considere el siguiente argumento:

$S_1$ : Si un hombre es soltero, es infeliz.

$S_2$ : Si un hombre es infeliz, muere joven.

.....

$S$ : Los solteros mueren jóvenes.

En este caso el enunciado  $S$  debajo de la línea denota la conclusión del argumento, y los enunciados  $S_1$  y  $S_2$  por encima de la línea denotan las premisas. Afirmamos que el argumento  $S_1, S_2 \vdash S$  es válido. Y que el argumento es de la forma

$$p \rightarrow q, q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$$

en donde  $p$  es "El es soltero",  $q$  es "El es infeliz" y  $r$  es "El muere joven"; y por el ejemplo 4.9 este argumento (Ley de Silogismo) es válido.

#### 4.10 IMPLICACION LOGICA

Se dice que una proposición  $P(p, q, \dots)$  *implica lógicamente* una proposición  $Q(p, q, \dots)$ , escrito

$$P(p, q, \dots) \Rightarrow Q(p, q, \dots)$$

si  $Q(p, q, \dots)$  es verdadera cada vez que  $P(p, q, \dots)$  sea verdadera.

**EJEMPLO 4.11** Afirmamos que  $P$  implica lógicamente  $p \vee q$ . Considere las tablas de verdad de  $p$  y de  $p \vee q$  en la tabla de abajo. Observe que  $p$  es verdadera en los casos (líneas) 1 y 2, y en estos casos  $p \vee q$  también es verdadera. En otras palabras,  $p$  implica lógicamente  $p \vee q$ .

$p$	$q$	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ahora si  $Q(p, q, \dots)$  es verdadera cada vez que  $P(p, q, \dots)$  sea verdadera, entonces el argumento

$$P(p, q, \dots) \vdash Q(p, q, \dots)$$

es válido, y recíprocamente. Aún más, el argumento  $P \vdash Q$  es válido si y sólo si el enunciado condicional  $P \rightarrow Q$  es siempre verdadero, o sea, si es una tautología. Establecemos este resultado formalmente.

**Teorema 4.3:** Para proposiciones cualesquiera  $P(p, q, \dots)$  y  $Q(p, q, \dots)$  los tres enunciados siguientes son equivalentes:

- (i)  $P(p, q, \dots)$  implica lógicamente a  $Q(p, q, \dots)$ .
- (ii) El argumento  $P(p, q, \dots) \vdash Q(p, q, \dots)$  es válido.
- (iii) La proposición  $P(p, q, \dots) \rightarrow Q(p, q, \dots)$  es una tautología.

Si  $P \Rightarrow Q$  y  $Q \Rightarrow P$ , entonces  $P$  y  $Q$  deben tener la misma tabla de verdad, y por lo tanto  $P \equiv Q$ . El recíproco también es cierto. Así, la noción de implicación lógica está íntimamente ligada a la de la equivalencia lógica.

## Problemas resueltos

### ENUNCIADOS Y ENUNCIADOS COMPUESTOS

4.1 Sea  $p$  "Hace frío" y sea  $q$  "Está lloviendo". Dé una frase verbal sencilla que describa cada uno de los siguientes enunciados:

- (1)  $\sim p$ , (2)  $p \wedge q$ , (3)  $p \vee q$ , (4)  $q \vee \sim p$ , (5)  $\sim p \wedge \sim q$ , (6)  $\sim \sim q$

En cada caso, traduzca  $\wedge$ ,  $\vee$  y  $\sim$  para que se lea "y", "o" y "Es falso que" o "No", respectivamente, y luego simplifique la frase en español.

- (1) No hace frío. (4) Está lloviendo o no está haciendo frío.  
 (2) Está haciendo frío y está lloviendo (5) Ni está haciendo frío ni está lloviendo.  
 (3) Está haciendo frío o está lloviendo. (6) No es verdad que esté lloviendo.

4.2 Sea  $p$  "El es alto" y sea  $q$  "El es buen mozo". Escriba cada uno de los siguientes enunciados en forma simbólica usando  $p$  y  $q$ . (Suponga que "El es bajo" significa "El no es alto", o sea  $\sim p$ .)

- (1) El es alto y buen mozo. (4) El no es ni alto ni buen mozo.  
 (2) El es alto pero no buen mozo. (5) El es alto, o es bajo y buen mozo.  
 (3) Es falso que el sea bajo o buen mozo. (6) No es cierto que él sea bajo o no buen mozo.

- (1)  $p \wedge q$  (3)  $\sim(\sim p \vee q)$  (5)  $p \vee (\sim p \wedge q)$   
 (2)  $p \wedge \sim q$  (4)  $\sim p \wedge \sim q$  (6)  $\sim(\sim p \vee \sim q)$

### PROPOSICIONES Y SUS TABLAS DE VERDAD

4.3 Encuentre la tabla de verdad de  $\sim p \wedge q$ .

$p$	$q$	$\sim p$	$\sim p \wedge q$
V	V	F	F
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	F

Método 1

$p$	$q$	$\sim$	$p$	$\wedge$	$q$
V	V	F	V	F	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	F	F
Paso		2	1	3	1

Método 2

4.4 Encuentre la tabla de verdad de  $\sim(p \vee q)$ .

$p$	$q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V

Método 1

$p$	$q$	$\sim$	$(p \vee q)$		
V	V	F	V	V	V
V	F	F	V	V	F
F	V	F	F	V	V
F	F	V	F	F	F
Paso		3	1	2	1

Método 2

4.5 Encuentre la tabla de verdad de  $\sim(p \vee \sim q)$ .

$p$	$q$	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$\sim(p \vee \sim q)$
V	V	F	V	F
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	V	F

Método 1

$p$	$q$	$\sim(p \vee \sim q)$				
V	V	F	V	V	F	V
V	F	F	V	V	V	F
F	V	V	F	F	F	V
F	F	F	F	V	V	F

Paso 4 1 3 2 1

Método 2

(Observe que esta tabla de verdad es idéntica a la del problema 4.3)

### TAUTOLOGIAS Y CONTRADICCIONES

4.6 Verifique que la proposición  $p \vee \sim(p \wedge q)$  es una tautología.

Construya la tabla de verdad de  $p \vee \sim(p \wedge q)$ :

$p$	$q$	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$p \vee \sim(p \wedge q)$
V	V	V	F	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

Como la tabla de verdad de  $p \vee \sim(p \wedge q)$  es V para todos los valores de verdad de  $p$  y de  $q$ , entonces es una tautología.

4.7 Verifique que la proposición  $(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$  es una contradicción.

Construya la tabla de verdad de  $(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$ :

$p$	$q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$
V	V	V	V	F	F
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	F	F
F	F	F	F	V	F

Como la tabla de verdad de  $(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$  es F para todos los valores de verdad de  $p$  y de  $q$ , entonces es una contradicción.

### EQUIVALENCIA LOGICA

4.8 Demuestre que la disyunción distribuye sobre la conjunción, o sea, demuestre la ley distributiva  $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ .

Construya las tablas de verdad requeridas.

$p$	$q$	$r$	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	F	F	V	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Como las tablas de verdad son idénticas, las proposiciones son equivalentes.

- 4.9 Demuestre que la operación de disyunción se puede escribir en términos de las operaciones conjunción y negación. Específicamente,  $p \vee q \equiv \sim(\sim p \wedge \sim q)$ .

Construya las tablas de verdad requeridas

$p$	$q$	$p \vee q$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$	$\sim(\sim p \wedge \sim q)$
V	V	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V
F	V	V	V	F	F	V
F	F	F	V	V	V	F

Como las tablas de verdad son idénticas, las proposiciones son equivalentes.

- 4.10 Simplifique cada proposición usando la tabla 4-1: (a)  $p \vee (p \wedge q)$ , (b)  $\sim(p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)$ .

(a)	Equivalencia	Razón
(1)	$p \vee (p \wedge q) \equiv (p \wedge t) \vee (p \wedge q)$	(1) Ley de identidad
(2)	$\equiv p \wedge (t \vee q)$	(2) Ley distributiva
(3)	$\equiv p \wedge t$	(3) Ley de identidad
(4)	$\equiv p$	(4) Ley de identidad

(b)	Equivalencia	Razón
(1)	$\sim(p \vee q) \vee (\sim p \wedge q) \equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$	(1) Ley de DeMorgan
(2)	$\equiv \sim p \wedge (\sim q \vee q)$	(2) Ley distributiva
(3)	$\equiv \sim p \wedge t$	(3) Ley de complemento
(4)	$\equiv \sim p$	(4) Ley de identidad

## NEGACION

- 4.11 Demuestre las leyes de DeMorgan: (a)  $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ ; (b)  $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ .

En cada caso construya las tablas de verdad requeridas.

(a)

$p$	$q$	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

(b)

$p$	$q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

- 4.12 Verifique:  $\sim \sim p \equiv p$ .

$p$	$\sim p$	$\sim \sim p$
V	F	V
F	V	F



4.13 Use los resultados de los problemas 4.11 y 4.12 para simplificar los siguientes enunciados.

- No es cierto que su madre sea inglesa o que su padre sea francés.
  - No es cierto que él estudie física pero no matemática.
  - No es cierto que las ventas estén bajando y los precios subiendo.
  - No es cierto que no esté haciendo frío o que esté lloviendo.
- Sea  $p$  "Su madre es inglesa" y sea  $q$  "Su padre es francés". Entonces el enunciado dado es  $\sim(p \vee q)$ . Pero  $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ . Por lo tanto, el enunciado dado es lógicamente equivalente con el enunciado "Su madre no es inglesa y su padre no es francés".
  - Sea  $p$  "El estudia física" y  $q$  "El estudia matemáticas". Entonces el enunciado dado es  $\sim(p \wedge \sim q)$ . Pero  $\sim(p \wedge \sim q) \equiv \sim p \vee \sim \sim q \equiv \sim p \vee q$ . Así que el enunciado dado es lógicamente equivalente al enunciado "El no estudia física o estudia matemáticas".
  - Como  $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ , el enunciado dado es lógicamente equivalente al enunciado "Las ventas están subiendo o los precios están bajando".
  - Como  $\sim(\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$ , el enunciado dado es lógicamente equivalente al enunciado "Está haciendo frío y no está lloviendo".

### CONDICIONALES Y BICONDITIONALES

4.14 Escriba de nuevo los siguientes enunciados sin usar la condicional.

- Si hace frío, él se pone sombrero.
- Si la productividad sube, los sueldos suben.

Recuerde que "Si  $p$  entonces  $q$ " es equivalente con "No  $p$  o  $q$ "; o sea,  $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ .

- No está haciendo frío o él se pone el sombrero.
- La productividad no sube o los sueldos suben.

4.15 (a) Demuestre que " $p$  implica  $q$  y  $q$  implica  $p$ " es lógicamente equivalente con la bicondicional " $p$  si y sólo si  $q$ "; o sea,  $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \equiv p \leftrightarrow q$ .

- Demuestre que la bicondicional  $p \leftrightarrow q$  se puede escribir en términos de las tres conectivas originales  $\vee$ ,  $\wedge$  y  $\sim$ .

(a)

$p$	$q$	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

- Ahora  $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$  y  $q \rightarrow p \equiv \sim q \vee p$ ; por lo tanto por (a)

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$$

4.16 Demuestre que  $p \leftrightarrow q \equiv (p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$  (a) comparando las tablas de verdad, (b) por el álgebra de proposiciones.

$p$	$q$	$p \leftrightarrow q$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	F	F	V

(b)	Equivalencia	Razón
(1)	$p \leftrightarrow q \equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$	(1) Problema 4.15(b)
(2)	$\equiv [(\sim p \vee q) \wedge \sim q] \vee [(\sim p \vee q) \wedge p]$	(2) Ley distributiva
(3)	$\equiv [(\sim q \wedge q) \vee (\sim q \wedge \sim p)] \vee [(p \wedge q) \vee (p \wedge \sim p)]$	(3) Leyes conmutativa y distributiva
(4)	$\equiv [f \vee (\sim q \wedge \sim p)] \vee [(p \wedge q) \vee f]$	(4) Ley de complemento
(5)	$\equiv (\sim q \wedge \sim p) \vee (p \wedge q)$	(5) Ley de identidad
(6)	$\equiv [\sim(p \vee q)] \vee (p \wedge q)$	(6) Ley de DeMorgan
(7)	$\equiv (p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$	(7) Sección 4.8

4.17 Determine las tablas de verdad de (a)  $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge q)$ , (b)  $(p \rightarrow q) \vee \sim(p \leftrightarrow \sim q)$ .

(a)	$p$	$q$	$p \rightarrow q$	$p \wedge q$	$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge q)$
	V	V	V	V	V
	V	F	F	F	V
	F	V	V	F	F
	F	F	V	F	F

(b)	$p$	$q$	$(p \rightarrow q)$	$\vee$	$\sim$	$(p \leftrightarrow \sim q)$
	V	V	V	V	V	V
	V	F	F	F	F	V
	F	V	V	V	F	V
	F	F	V	V	V	F

Paso	1	2	1	5	4	1	3	2	1
------	---	---	---	---	---	---	---	---	---

4.18 Determine la contrarrecíproca de cada enunciado.

- (a) Si Juan es poeta, entonces es pobre.  
 (b) Solamente si Marcos estudia pasará el examen.  
 (c) Es necesario que haya nieve para que Luis pueda esquiar.  
 (d) Si  $x$  es menor que cero, entonces  $x$  no es positivo.

(a) La contrarrecíproca de  $p \rightarrow q$  es  $\sim q \rightarrow \sim p$ . Así que la contrarrecíproca de (a) es

Si Juan no es pobre, entonces no es poeta.

(b) El enunciado dado es equivalente a "Si Marcos pasa el examen, entonces estudió". Así que la contrarrecíproca de (b) es

Si Marcos no estudia, entonces no pasará el examen.

(c) El enunciado dado es equivalente a "Si Luis esquía, entonces es porque nevó". Así que la contrarrecíproca de (c) es

Si no nieva, entonces Luis no esquía.

(d) La contrarrecíproca de  $p \rightarrow \sim q$  es  $\sim \sim q \rightarrow \sim p \equiv q \rightarrow \sim p$ . Así que la contrarrecíproca de (d) es

Si  $x$  es positivo, entonces  $x$  no es menor que cero.

## ARGUMENTOS E IMPLICACION LOGICA

4.19 Muestre que el siguiente argumento es válido:  $p \leftrightarrow q, q \vdash p$ .

### Método 1

Construya la tabla de verdad a la derecha. Ahora  $p \leftrightarrow q$  es verdadero en los casos (líneas) 1 y 4, y  $q$  es verdadero en los casos 1 y 3; así que  $p \leftrightarrow q$  y  $q$  son simultáneamente verdaderos sólo en el caso 1, en donde  $p$  también es verdadero. Así, el argumento  $p \leftrightarrow q, q \vdash p$  es válido.

$p$	$q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

**Método 2**

Construya la tabla de verdad de  $[(p \leftrightarrow q) \wedge q] \rightarrow p$ :

$p$	$q$	$p \leftrightarrow q$	$(p \leftrightarrow q) \wedge q$	$[(p \leftrightarrow q) \wedge q] \rightarrow p$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

Como  $[(p \leftrightarrow q) \wedge q] \rightarrow p$  es una tautología, el argumento es válido.

**4.20 Verifique la validez del siguiente argumento:**

Si estudio, no perderé matemáticas.

Si no juego basquetbol, entonces estudio.

Pero perdí matemáticas.

.....

Por lo tanto, jugué basquetbol.

Primero traduzca el argumento a su forma simbólica. Sean  $p$  "Yo estudio",  $q$  "Pierdo matemáticas" y  $r$  "Juego basquetbol". Entonces el argumento dado es como sigue:

$$p \rightarrow \sim q, \sim r \rightarrow p, q \vdash r$$

Para verificar la validez del argumento, construya las tablas de verdad de las proposiciones dadas  $p \rightarrow \sim q, \sim r \rightarrow p, q \vdash r$ :

$p$	$q$	$r$	$\sim q$	$p \rightarrow \sim q$	$\sim r$	$\sim r \rightarrow p$
V	V	V	F	F	F	V
V	V	F	F	F	V	V
V	F	V	V	V	F	V
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	F	V
F	V	F	F	V	V	F
F	F	V	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	F

Ahora las premisas  $p \rightarrow \sim q, \sim r \rightarrow p$  y  $q$  son verdaderas simultáneamente sólo en el caso (línea) 5, y en ese caso la conclusión  $r$  también es verdadera; así que el argumento es válido.

**4.21 Demuestre que  $p \leftrightarrow q$  implica lógicamente  $p \rightarrow q$ .****Método 1**

Construya las tablas de verdad de  $p \leftrightarrow q$  y  $p \rightarrow q$ :

$p$	$q$	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	V
F	F	V	V

Ahora  $p \leftrightarrow q$  es verdadero en las líneas 1 y 4, y en estos casos  $p \rightarrow q$  también es verdadero. Así que  $p \leftrightarrow q$  lógicamente implica  $p \rightarrow q$ .

**Método 2**

Construya la tabla de verdad de  $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)$ . En ella se muestra que esta proposición es una tautología; así que, por el teorema 4.3,  $p \leftrightarrow q$  implica lógicamente  $p \rightarrow q$ .

**Método 3**

Use el problema 4.15(a) y el álgebra de proposiciones.

$$\begin{aligned}(p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q) &\equiv [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)] \rightarrow (p \rightarrow q) \\ &\equiv \sim[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)] \vee (p \rightarrow q) \\ &\equiv [\sim(p \rightarrow q) \vee \sim(q \rightarrow p)] \vee (p \rightarrow q) \\ &\equiv t \vee \sim(q \rightarrow p) \\ &\equiv t\end{aligned}$$

(Este método se podría haber aplicado en los problemas 4.19 y 4.20.)

**4.22 Demuestre que  $p \leftrightarrow \sim q$  no implica lógicamente  $p \rightarrow q$ .****Método 1**

Construya las tablas de verdad de  $p \leftrightarrow \sim q$  y  $p \rightarrow q$ :

$p$	$q$	$\sim q$	$p \leftrightarrow \sim q$	$p \rightarrow q$
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	V	V
F	F	V	F	V

Recuerde que  $p \leftrightarrow \sim q$  implica lógicamente  $p \rightarrow q$  si  $p \rightarrow q$  es verdadero cada vez que  $p \leftrightarrow \sim q$  es verdadero. Pero  $p \leftrightarrow \sim q$  es verdadero en el caso (línea) 2 en la tabla anterior, y en ese caso  $p \rightarrow q$  es falso. Así que  $p \leftrightarrow \sim q$  no implica lógicamente  $p \rightarrow q$ .

**Método 2**

Construya la tabla de verdad de la proposición  $(p \leftrightarrow \sim q) \rightarrow (p \rightarrow q)$ . Esta no será una tautología; así que, por el teorema 4.3,  $p \leftrightarrow \sim q$  no implica lógicamente  $p \rightarrow q$ .

## Problemas suplementarios

**ENUNCIADOS Y ENUNCIADOS COMPUESTOS**

- 4.23** Sean  $p$  "Marcos es rico y  $q$  "Marcos es feliz". Escriba cada una de las siguientes proposiciones en forma simbólica.

- (a) Marcos es pobre pero feliz.
- (b) Marcos ni es rico ni feliz.
- (c) Marcos o es rico o es infeliz.
- (d) Marcos es pobre o si no él es tanto rico como infeliz.

- 4.24** Sean  $P$  "Luis lee *La Prensa*",  $q$ ; "Luis lee *El Mundo*", y  $r$  "Luis lee *El Universal*". Escriba lo siguiente en forma simbólica.

- (a) Luis lee *La Prensa* o *El Mundo*, pero no *El Universal*.
- (b) Luis lee *La Prensa* y *El Mundo*, o él no lee *La Prensa* y *El Universal*.
- (c) No es cierto que Luis lee *La Prensa* pero no *El Universal*.
- (d) No es cierto que Luis lee *El Universal* o *El Mundo* pero no *La Prensa*.

- 4.25** Sea  $p$  "Aurora habla francés" y  $q$  "Aurora habla danés". Dé una frase verbal sencilla que describa lo siguiente:

$$(a) p \vee q, (b) p \wedge q, (c) p \wedge \sim q, (d) \sim p \vee \sim q, (e) \sim p, (f) \sim(\sim p \wedge \sim q)$$



### TABLAS DE VERDAD, EQUIVALENCIA LOGICA

4.26 Encuentre la tabla de verdad de cada proposición:

$$(a) p \vee \sim q, (b) \sim p \wedge \sim q, (c) \sim(\sim p \wedge q), (d) \sim(\sim p \vee \sim q)$$

4.27 Encuentre la tabla de verdad de cada proposición:

$$(a) (p \wedge \sim q) \vee r, (b) \sim p \vee (q \wedge \sim r), (c) (p \vee \sim r) \wedge (q \vee \sim r)$$

4.28 Demuestre que la conjunción distribuye sobre la disyunción:  $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ .

4.29 Demuestre que  $p \vee (p \wedge q) \equiv p$  construyendo las tablas de verdad apropiadas.

4.30 Demuestre que  $\sim(p \vee q) \vee (\sim p \wedge q) \equiv \sim p$  construyendo las tablas de verdad apropiadas.

4.31 (a) Exprese  $\vee$  en términos de  $\wedge$  y  $\sim$ .

(b) Exprese  $\wedge$  en términos de  $\vee$  y  $\sim$ .

4.32 Demuestre las siguientes equivalencias usando las leyes del álgebra de proposiciones de la tabla 4-1:

$$(a) p \wedge (p \vee q) \equiv p, (b) (p \wedge q) \vee \sim p \equiv \sim p \vee q, (c) p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$$

### NEGACION

4.33 Simplifique: (a)  $\sim(p \wedge \sim q)$ , (b)  $\sim(\sim p \vee q)$ , (c)  $\sim(\sim p \wedge \sim q)$ .

4.34 Escriba la negación de cada uno de los siguientes enunciados de la manera más sencilla posible.

(a) El es alto pero buen mozo.

(b) El es rubio o de ojos azules.

(c) El ni es rico ni feliz.

(d) El perdió su trabajo o no fue a trabajar hoy.

(e) Ni Marcos ni Luis son infelices.

(f) Aurora habla español o francés pero no alemán.

### CONDICIONALES, BICONDITIONALES

4.35 Encuentre la tabla de verdad de cada proposición: (a)  $(\sim p \vee q) \rightarrow p$ , (b)  $q \leftrightarrow (\sim q \wedge p)$ .

4.36 Encuentre la tabla de verdad de cada proposición: (a)  $(p \leftrightarrow \sim q) \rightarrow (\sim p \wedge q)$ , (b)  $(\sim q \vee p) \leftrightarrow (q \rightarrow \sim p)$ .

4.37 Demuestre: (a)  $(p \wedge q) \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$ , (b)  $p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge \sim r) \rightarrow \sim q$ .

4.38 Determine la contrarrecíproca de cada enunciado:

(a) Si él tiene, coraje él ganará. (b) Sólo si no está cansado, él ganará.

4.39 Encuentre:

(a) La contrarrecíproca de  $p \rightarrow q$ .

(c) La contrarrecíproca de la recíproca de  $p \rightarrow \sim q$ .

(b) La contrarrecíproca de  $\sim p \rightarrow q$ .

(d) La recíproca de la contrarrecíproca de  $\sim p \rightarrow \sim q$ .

### ARGUMENTOS, IMPLICACION LOGICA

4.40 Verifique la validez de cada argumento: (a)  $\sim p \rightarrow q, p \vdash \sim q$ ; (b)  $\sim p \rightarrow q, q \vdash p$ .

4.41 Verifique la validez de cada argumento: (a)  $p \rightarrow q, r \rightarrow \sim q \vdash r \rightarrow \sim p$ ; (b)  $p \rightarrow \sim q, \sim r \rightarrow \sim q \vdash p \rightarrow \sim r$ .

4.42 Traduzca a forma simbólica y verifique la validez del argumento:

- (a) Si 6 es par, entonces 2 no divide a 7.  
O 5 no es primo, ó 2 divide a 7.  
Pero 5 es primo.  
.....  
Por lo tanto, 6 es impar (no par).
- (b) Las rosas son rojas.  
Las rosas son azules.  
.....  
Por lo tanto, las rosas son rojas si y sólo si son azules.
- (c) Si trabajo, no puedo estudiar.  
O trabajo, o paso matemáticas.  
Pasé matemáticas.  
.....  
Por lo tanto, estudié.
- (d) Si trabajo no puedo estudiar.  
O trabajo, o paso matemáticas.  
Trabajé.  
.....  
Por lo tanto, pasé matemáticas.

4.43 Demuestre que (a)  $p \wedge q$  implica lógicamente  $p$ , (b)  $p \vee q$  no implica lógicamente  $p$ .

4.44 Demuestre que (a)  $q$  implica lógicamente  $p \rightarrow q$ , (b)  $\sim p$  implica lógicamente  $p \rightarrow q$ .

4.45 Determine aquellas proposiciones que implican lógicamente (a) una tautología, (b) una contradicción.

### Respuestas a los problemas suplementarios

4.23 (a)  $\sim p \wedge q$ , (b)  $\sim p \wedge \sim q$ , (c)  $p \vee \sim q$ , (d)  $\sim p \vee (p \wedge \sim q)$

4.24 (a)  $(p \vee q) \wedge \sim r$ , (b)  $(p \wedge q) \vee \sim(p \wedge r)$ , (c)  $\sim(p \wedge \sim r)$ , (d)  $\sim[(r \vee q) \wedge \sim p]$

- 4.25 (a) Aurora habla francés o danés.  
(b) Aurora habla francés y danés.  
(c) Aurora habla francés pero no danés.  
(d) Aurora no habla francés o no habla danés.  
(e) No es cierto que Aurora no hable francés.  
(f) No es cierto que Aurora no hable ni francés ni danés.

4.26

$p$	$q$	$p \vee \sim q$	$\sim p \wedge \sim q$	$\sim(\sim p \wedge q)$	$\sim(\sim p \vee \sim q)$
V	V	V	F	V	V
V	F	V	F	V	F
F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	V	F

4.27

$p$	$q$	$r$	(a)	(b)	(c)
V	V	V	V	F	V
V	V	F	F	V	V
V	F	V	V	F	F
V	F	F	V	F	V
F	V	V	V	V	F
F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	F
F	F	F	F	V	V

4.31 (a)  $p \vee q \equiv \sim(\sim p \wedge \sim q)$ , (b)  $p \wedge q \equiv \sim(\sim p \vee \sim q)$

4.33 (a)  $\sim p \vee q$ , (b)  $p \wedge \sim q$ , (c)  $p \vee q$

4.34 (c) El es rico o es feliz.  
(f) Aurora habla alemán, pero ni español ni francés.

4.35 (a) VVFF, (b) FFFV

4.36 (a) VFVV, (b) FVFF

4.37 (Ayuda: Construya las tablas de verdad apropiadas.)

4.38 (a) Si no gana, entonces no tiene coraje.  
(b) Si está cansado, entonces no ganará.

4.39 (a)  $q \rightarrow \sim p$ , (b)  $\sim q \rightarrow p$ , (c)  $\sim p \rightarrow q$ , (d)  $p \rightarrow q$

4.40 (a) falacia, (b) válido.

4.41 (a) válido, (b) falacia.

4.42 (a)  $p \rightarrow \sim q, \sim r \vee q, r \vdash \sim p$ ; válido. (c)  $p \rightarrow \sim q, p \vee r, r \vdash q$ ; falacia.  
(b)  $p, q \vdash p \leftrightarrow q$ ; válido. (d)  $p \rightarrow \sim q, q \vee r, p \vdash r$ ; válido.

4.45 (a) Toda proposición implica lógicamente una tautología.  
(b) Solamente una contradicción implica lógicamente una contradicción.

# Capítulo 5

## Algoritmos, diagramas de flujo, programas en pseudocódigo

### 5.1 INTRODUCCION

Un *algoritmo* es una lista paso por paso de instrucciones para resolver un problema particular.

**EJEMPLO 5.1** El Banco Nacional quiere calcular y registrar el INTERES en una hipoteca de una casa para un cliente. Suponiendo que el BALANCE de la hipoteca y la TASA de interés aparecen en el registro del cliente, un algoritmo adecuado es el siguiente:

PASO 1. Obtenga el NOMBRE, BALANCE y TASA del registro del cliente.

PASO 2. Calcule:  $\text{INTERES} = \text{BALANCE} \times \text{TASA}$ .

PASO 3. Registre el NOMBRE y el INTERES en el archivo de intereses.

Estamos usando la palabra *registro* para designar una colección de datos relacionados, o sea, datos de un cliente dado; y *archivo* es una colección de registros similares.

Hay dos maneras de representar un algoritmo fuera de escribir una lista numerada de instrucciones. Una manera, la más común, es por medio de un *diagrama de flujo*, en el cual los pasos esenciales del algoritmo se representan por cajas de varias formas geométricas y el flujo de los datos entre los pasos se indica por flechas, o líneas de flujo. La fig. 5-1 es un diagrama de flujo del algoritmo del ejemplo 5.1.

Aunque el diagrama de flujo pueda parecer redundante en este caso, frecuentemente es una herramienta indispensable para formular tipos complejos de algoritmos.

Otra manera de representar un algoritmo es escribirlo en un *lenguaje de pseudocódigo*, que se discutirá al final del capítulo.

Supongamos ahora que queremos ejecutar un algoritmo usando un computador electrónico. Esto se puede hacer traduciendo el algoritmo (de su diagrama de flujo o forma en pseudocódigo) a un programa de computador escrito en algún *lenguaje de alto nivel*, tal como BASIC,

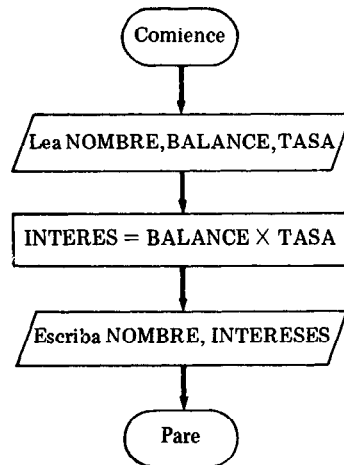


Figura 5-1

COBOL, o FORTRAN. Comenzamos este capítulo con una discusión general de programas de computador.

## 5.2 PROGRAMAS DE COMPUTADOR; VARIABLES, CONSTANTES

El computador resuelve un problema particular por medio de un *programa de computador*, que es una lista de enunciados, el cual da instrucciones detalladas para el computador. Tales instrucciones deben, eventualmente, darse al computador en su propio lenguaje de máquina. Sin embargo, los programas de computador usualmente se escriben en algún lenguaje de alto nivel (FORTRAN, COBOL, BASIC, . . .) A estos se les llama *lenguajes de compilador*; un *compilador* es un programa especial que traduce un programa escrito en un lenguaje de alto nivel a lenguaje de máquina. El programa original se llama *programa fuente*, y el programa traducido se llama *programa objeto*. La fig. 5-2 indica esta transición.

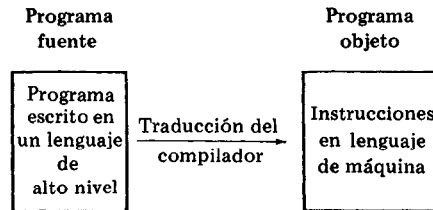


Figura 5-2

Cada lenguaje de programación tiene su propio conjunto de caracteres, que incluyen los 10 dígitos, las 26 letras, y caracteres especiales (véase la sec. 2.6). Este conjunto de caracteres, junto con la sintaxis del lenguaje, se usa para escribir un programa. Cualquiera que sea el lenguaje, los conceptos de nombres de variables y constantes son pertinentes.

### Nombres de variables

El término *variable* en la terminología de computadores normalmente significa (i) un lugar de memoria en la memoria del computador reservado para un campo de datos específico (datos individuales). Alternativamente, una *variable* puede significar (ii) el campo de datos mismo que se almacena en el lugar de memoria correspondiente. A cada variable (en cualquier sentido) en un programa de computador, se le da un nombre o rótulo, llamado *nombre de los datos* o *nombre de la variable*. Normalmente, se escogen nombres que indique el tipo de campo de datos que representan. Por ejemplo, TASA se puede usar para denotar la tasa por horas de pago de un empleado en una compañía. Puede entonces hablarse de la “variable TASA” o de la localización de almacenamiento TASA, o de la dirección TASA. Observe que el valor de TASA en el sentido (ii) puede cambiarse durante la ejecución del programa. Por ejemplo, TASA puede ser \$8.25, \$9.00, \$9.75, . . . , dependiendo del empleado en particular.

Cada lenguaje de programación tiene sus propias reglas para formar nombres de variables, por ejemplo, en BASIC no se puede exceder de dos caracteres, o de seis caracteres en FORTRAN. Los nombres de variables generalmente se forman con caracteres alfanuméricos, con el primer carácter siempre alfabético. Aún más, ciertas palabras (por ejemplo DATA, STOP, IF, LET en BASIC) tienen un significado especial en el lenguaje, y por lo tanto, no se pueden escoger como nombres de variables. A éstas se les llama *palabras reservadas* del lenguaje.

### Constantes

Una *constante* en un programa de computador es un valor de datos que no cambia durante la ejecución del programa. A las constantes se les llama a veces *literales*. Hay básicamente dos clases de constantes, que aparecen en casi todos los lenguajes de programación.

**Constantes numéricas:** Una constante numérica es un número con o sin signo, con o sin punto decimal, por ejemplo:

999      +2058      -111      333.22      -0.12345      +67.89

A las primeras tres, que no tienen punto decimal, también se les llama *enteros*. Las constantes numéricas normalmente incluyen números en forma exponencial, tales como

1.23E03      0.444E-2      33.77E1

(véase la sec. 3.2). Hacemos resaltar que en las constantes numéricas no pueden aparecer ni comas ni blancos. Por ejemplo, 2 345 789 y 25 333.6 no son aceptables como constantes numéricas. Cada lenguaje de programación tiene también reglas que limitan el número de dígitos que pueden aparecer en una constante.

**Constantes no numéricas.** Una constante no numérica es sencillamente una cadena de caracteres del conjunto de caracteres del lenguaje; a tales constantes se les llama a veces *mensajes* o *comentarios*. Se indica una constante no numérica colocando su nombre entre comillas sencillas:

'ENCUENTRE EL PROMEDIO'      'TASA'  
'088-24-096'      'SER O NO SER'

Observe que 'TASA' indica que la TASA es una constante no numérica, mientras que TASA (sin comillas) es un nombre de variable.

**Observación:** Algunos lenguajes de programación permiten algunas clases especiales de constantes. Por ejemplo, el FORTRAN permite las constantes lógicas *verdadero* y *falso*, representadas por

.TRUE.      y      .FALSE.

respectivamente. El COBOL permite constantes figurativas tales como

ZERO      SPACE      QUOTE

todas con sus significados obvios (cero, espacio y entre comillas).

### 5.3 DIAGRAMAS DE FLUJO Y SU LENGUAJE

Un diagrama de flujo es una representación visual de un algoritmo. En efecto, los diagramas de flujo se usan frecuentemente en el planeamiento, desarrollo y estructuración de un algoritmo para resolver un problema complejo. Al diagrama de flujo se le considera como una parte esencial de la documentación en la traducción del algoritmo original a un programa de computador.

Formalmente, un diagrama de flujo es un diagrama formado por símbolos (cajas) y flechas, o líneas de flujo, que conectan los símbolos entre sí. Los símbolos denotan los pasos esenciales del algoritmo y las flechas indican la lógica del algoritmo, o el flujo de datos de un paso del algoritmo a otro. Los diagramas de flujo se dibujan de tal manera que la dirección del flujo sea hacia abajo o de izquierda a derecha. Con estas convenciones, se pueden omitir las puntas de las flechas, dándose líneas de flujo como en la fig. 5-4.

Los símbolos mismos son de formas estandarizadas que indican el tipo de acción que se está efectuando en ese paso del algoritmo. En efecto, cada paso está rotulado por su paso de algoritmo, escrito dentro del símbolo. Estos pasos de algoritmo se pueden expresar en un lenguaje universal de diagramas de flujo, que, afortunadamente, se puede aprender en menos de una hora.

En la figura 5-4 aparecen los seis símbolos más frecuentemente empleados en los diagramas de flujo. Discutimos estos símbolos individualmente, junto con los enunciados que aparecen dentro de ellos.





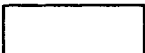





Símbolo	Nombre
	Terminal
	Entrada/salida
	Procesamiento
	Decision
	Conector
	Preparación

Figura 5-3

### Símbolos de terminales

El símbolo ovalado se usa para indicar el principio o el fin de un algoritmo por medio de

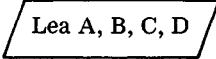
 o 

respectivamente. Es claro que un diagrama de flujo sólo puede contener un símbolo Inicie; sin embargo, puede contener más de un símbolo de Pare, ya que el algoritmo puede contener ramas alternativas. A veces, se omiten los símbolos de Inicie y/o Pare si es claro en donde se inicia y/o termina el algoritmo.

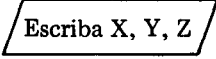
Este símbolo también se usa para indicar una pausa en el algoritmo; por ejemplo, puede ser necesario cambiar los formatos en una impresora de salida. De aquí que al símbolo a veces se le rotule "Pausa".

### Símbolo Entrada/Salida

El paralelogramo se usa para indicar una operación de entrada o de salida. Específicamente, escribimos



para indicar que deben entrar datos en los lugares de memoria A, B, C, y D, en ese orden. Observe que los enunciados de entrada comienzan con la palabra "Lea" y también que va seguida por nombres de variables separadas por comas. Análogamente,



indica que los datos en los lugares de memoria X, Y, Z deben salir. El enunciado de salida comienza con la palabra "Escriba" y también va seguido de nombres de variables separados por comas. También podemos dar mensajes escribiendo el mensaje entre comillas sencillas; por ejemplo



indica que debe salir el mensaje "No hay solución".

### Símbolo de procesamiento

Se usa el rectángulo para indicar una operación de procesamiento. Este puede ser un enunciado de asignación, definido abajo, o puede ser una macroinstrucción, cuya traducción al lenguaje de programación requeriría, por otra parte, una lista completa de enunciados de computador; por ejemplo

Alfabetice nombres

Encuentre el promedio  
y la desviación  
estándar de los salarios

son macroinstrucciones.

El enunciado de asignación tiene la forma

$variable = expresión\ aritmética$

O sea que solamente puede aparecer un nombre de variable a la izquierda del signo igual, =, pero toda expresión aritmética que use variables, constantes, y operaciones aritméticas puede aparecer al lado derecho del signo igual. (Las expresiones aritméticas incluyen variables individuales o constantes como casos especiales.) Otra forma aceptable para un enunciado de asignación es

$variable \leftarrow expresión\ aritmética$

en la cual la flecha hacia atrás  $\leftarrow$  se usa en lugar del signo igual.

### EJEMPLO 5.2

(a) Suponga que queremos sumar los números (constantes numéricas) A, B, y C. No podríamos escribir

$A + B + C$

ya que la suma debe colocarse en un lugar de memoria definido. Podemos escribir

$SUMA = A + B + C$

que envía el resultado de la suma para ser almacenado en el lugar de memoria SUMA. No podríamos escribir

$A + B + C = SUMA$

ya que en el lado izquierdo del enunciado de asignación sólo puede aparecer un nombre de variable.

(b) Suponga que queremos incrementar el valor de la variable K en 1. Podríamos lograr esto escribiendo

Incremente el valor  
de K en 1

Afirmamos que también se puede lograr esto escribiendo

$K = K + 1$

Observe que este no es un enunciado matemático, ya que K en realidad no es igual a  $K + 1$ . Sin embargo, como un enunciado de asignación, le dice al computador que le sume 1 al número que en el momento esté



almacenado en el lugar K y luego que asigne esta suma al lugar K. El resultado total es incrementar el valor almacenado en K en 1.

**EJEMPLO 5.3** La figura 5-4 es un diagrama de flujo para encontrar la suma S, el promedio A, y el producto P de los tres números X, Y, y Z. Observe que los tres enunciados de asignación se colocan en un símbolo de procesamiento. Observe también que las puntas de las flechas se han omitido, ya que la dirección del flujo es obviamente de arriba hacia abajo.

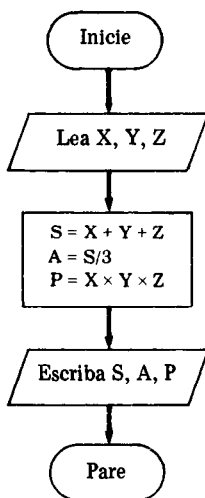


Figura 5-4

#### Símbolo de decisión

Una de las propiedades poderosas de un computador es su capacidad para decidir si dos valores son iguales, y si no son iguales, para decidir cuál es el mayor. O sea, el computador puede determinar el valor de verdad de enunciados que usen una de las seis relaciones matemáticas simbolizadas en la tabla 5-1. En la práctica, al computador se le presenta no un enunciado verdadero/falso, sino una pregunta que tenga una respuesta “Si” o “No”; por ejemplo

Es  $A = B$ ?      Es  $K \leq 25$ ?      Es  $VENTA > \$5000$ ?

Al computador también se le puede programar para que conteste preguntas que usen una o más conectivas lógicas “y”, “o”, y “no” o preguntas en que haya más de dos respuestas posibles; por ejemplo,

Es  $X \leq 50$  y  $Y \leq 75$ ?      Es D positivo, negativo, o cero?

Tabla 5-1

Símbolo	Significado
=	Igual
≠	Diferente
<	Menor que
≤	Menor o igual que
>	Mayor que
≥	Mayor o igual que

Con cada pregunta, el computador puede ser programado para que tome un curso diferente de acción dependiendo de la respuesta. A un paso en un algoritmo o programa que conduce a más de una posible continuación, se le llama *decisión*.

El símbolo en forma de diamante se usa para indicar una decisión. La pregunta se coloca dentro del símbolo, y cada respuesta alternativa a la pregunta se usa para rotular la flecha de salida que conduce al próximo paso apropiado del algoritmo. Observamos que el símbolo de decisión es el único símbolo que puede tener más de una salida.

**EJEMPLO 5.4** La figura 5-5 muestra un diagrama de flujo que lee dos números, A y B, y que imprime en orden decreciente, después de asignar el número mayor a GRANDE y el número menor a PEQUEÑO. Observe las dos flechas que salen de la decisión “Es  $A < B$ ?”, una rotulada “no” y la otra rotulada “sí”. Por conveniencia de notación, frecuentemente se omite en las preguntas la palabra “Es”.

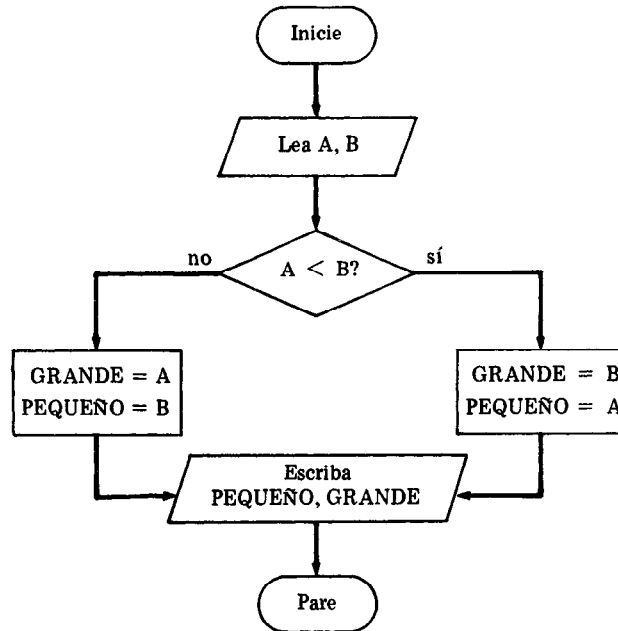


Figura 5-5

**EJEMPLO 5.5** (Ecuación cuadrática). Recuerde que las soluciones de la ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0$$

en donde  $a \neq 0$ , están dadas por la fórmula cuadrática

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La cantidad  $D = b^2 - 4ac$  se llama el *discriminante* de la ecuación. Si  $D$  es negativo, entonces no hay soluciones reales. Si  $D = 0$ , entonces hay una sola solución real (doble),  $x = -b/2a$ . Si  $D$  es positivo, la fórmula da dos soluciones reales diferentes. La fig. 5-6 es un diagrama de flujo que entra los coeficientes A, B, C de la ecuación cuadrática, y da las soluciones reales, si hay. Observe que hay tres respuestas para la pregunta “Signo de  $D$ ?”; cada una conduce a salidas diferentes.

### Símbolo conector

Un diagrama de flujo que es largo y complejo puede requerir más de una hoja de papel, lo cual quiere decir que ciertas líneas de flujo no se pueden dibujar; o que el diagrama puede con-

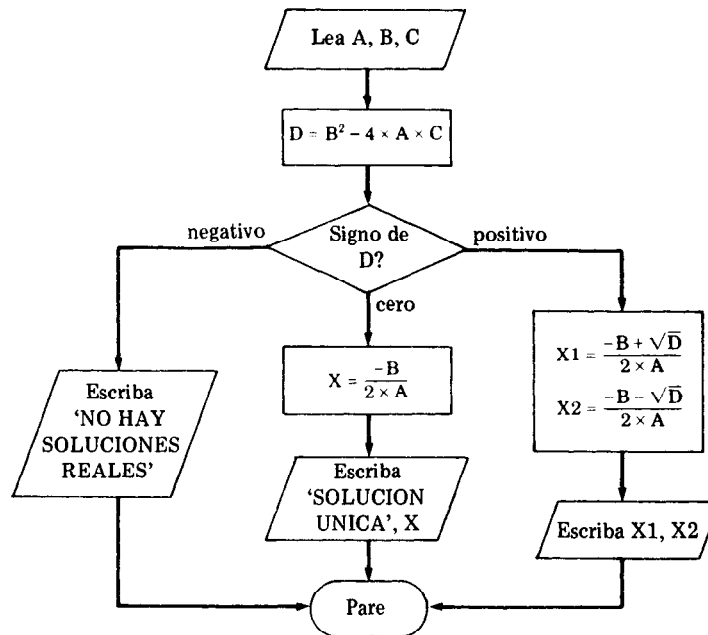


Figura 5-6

tener líneas de flujo que se cruzan, lo cual puede causar confusión. El símbolo conector o símbolo de conexión, un pequeño círculo, se usa para remediar tales situaciones. Específicamente, se supone que existe una línea de flujo entre cualquier par de símbolos conectores que hayan sido rotulados idénticamente, de tal manera que el flujo sale del diagrama de flujo en uno de los conectores (*conector de salida*) y entra por el otro conector (*conector de entrada*). Para cada rótulo de conector, hay un único conector de entrada, pero puede haber más de un conector de salida. La fig. 5-25 es un diagrama de flujo que usa conectores.

#### Símbolo de preparación

Este símbolo indica la preparación para algún procedimiento inicializando ciertas variables. Muchos programadores indican una preparación por medio del símbolo de procesamiento. Usamos el símbolo de preparación en la sec. 5.5.

### 5.4 CICLOS

Supongamos que queremos leer, procesar y sacar los resultados a partir de los datos de un registro. El diagrama de flujo de tal procedimiento aparece en la fig. 5-7(a). Ahora supongamos que se quiere repetir este procedimiento para cada registro en un archivo. A tal operación repetitiva se le llama *ciclo*, y al manejo de cada registro se le llama *iteración*. Se podría visualizar un ciclo dibujando una flecha del último paso en el procedimiento al primer paso, como en la fig. 5-7(b), pero esto no indicaría un mecanismo para salir del ciclo. Ahora discutiremos una manera de controlar un ciclo, y en la sec. 5.5 discutiremos otra manera.

#### Registro fin de archivo

Normalmente un sistema de procesamiento de datos usa un registro con datos especiales al final de cada archivo. A esto se le llama *registro de fin de archivo* o *EOF* (End-of-file). De esta

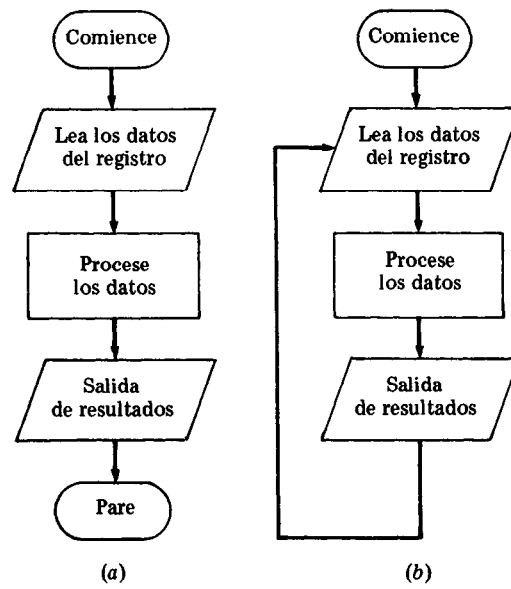


Figura 5-7

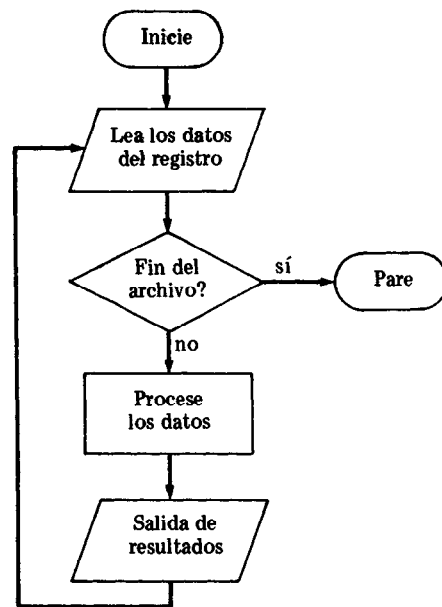


Figura 5-8

manera, después de leer cada registro al computador, se le hace una de las siguientes preguntas equivalentes:



El ciclo de la fig. 5-7(b) se puede controlar mediante una de tales decisiones, como se muestra en la fig. 5-8. Está claro que el ciclaje termina cuando se hayan leído y procesado todos los registros.

### 5.5 INICIALIZACION: CONTADORES, ACUMULADORES, CICLOS DO

Frecuentemente necesitamos asignar un valor inicial a una variable, tal vez en preparación para algún tipo de proceso. Tal “inicialización” tiene lugar, en particular, con contadores, acumuladores y cierto tipo de ciclos.

#### Contadores

Para contar el número de registros procesados por el diagrama de flujo de la figura 5-8, inicialmente podríamos fijar una variable, digamos CONTEO, haciéndola cero, y luego incrementamos en 1 CONTEO cada vez que se procesa un registro; obtendríamos el valor de CONTEO al salirnos del ciclo. Resulta claro según la fig. 5-9 que el valor final de conteo será exactamente igual al número de registros que han sido procesados. A una variable como CONTEO se le llama *contador*. Observe que el contador requiere una inicialización como preparación para el ciclo; así que usamos el símbolo de preparación en la fig. 5-9.

#### Acumuladores

Supongamos que una compañía quiere encontrar su nómina total semanal, o sea, la suma de los salarios semanales de todos sus empleados, como aparecen en la lista del archivo de personal. Si solamente hay tres empleados, con salarios X, Y, Z, entonces es claro que la suma S se puede encontrar usando el enunciado de asignación

$$S = X + Y + Z$$

como en el ejemplo 5.3. Por otra parte, con muchos empleados, encontramos la suma de los salarios como se muestra en la fig. 5-10. O sea, escogemos una variable, digamos SUMA, e inicialmente fijamos.

$$SUMA = 0$$

Luego, usando el enunciado de asignación

$$SUMA = SUMA + SALARIO$$

podemos sumar los salarios a SUMA unos después de otros, a medida que vayan entrando de los registros. A una variable como SUMA se le llama *acumulador*, por razones obvias. Observe que el acumulador SUMA requiere una inicialización como una preparación para sumar los salarios, de donde se sigue el uso del símbolo de preparación.

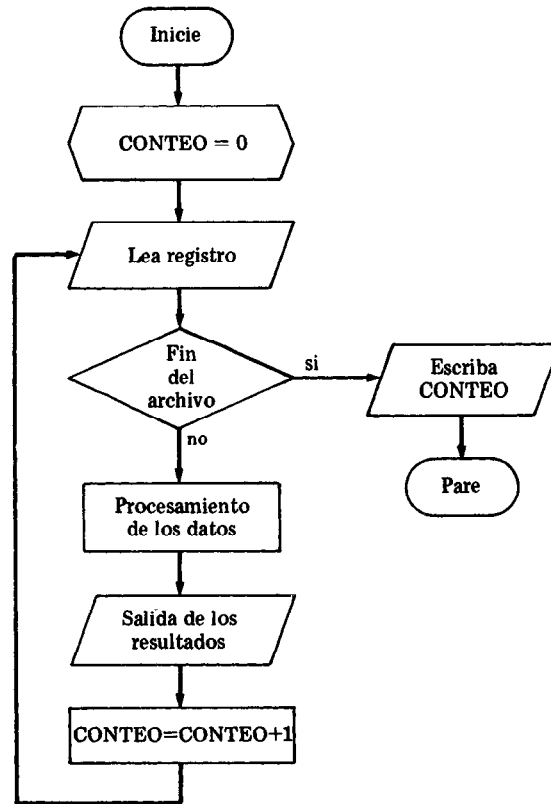


Figura 5-9

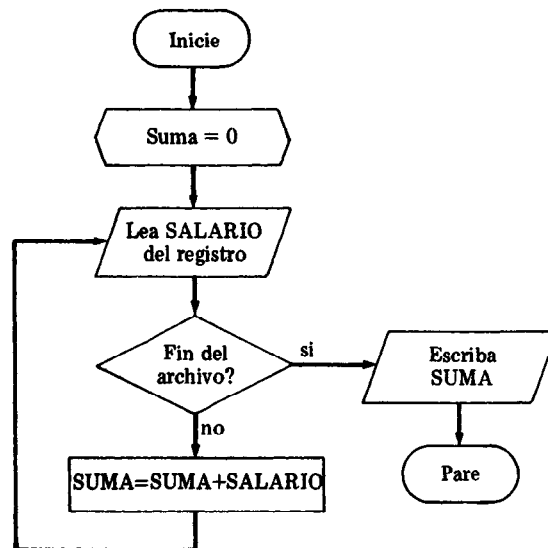
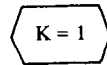


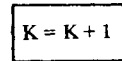
Figura 5-10

### Ciclos DO

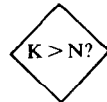
La figura 5-11(a) muestra un ciclo por medio del cual cierto procedimiento se ejecuta exactamente  $N$  veces, siendo el valor de  $N$  un entero positivo fijo. El ciclo usa una variable  $K$ , esencialmente un contador. Inicialmente fijamos



Después de cada ciclo, incrementamos  $K$  en 1, usando



y luego vemos si  $K$  excede el valor límite  $N$ , por



Si la respuesta en “No”, el procedimiento se repite. Después de  $N$  iteraciones se obtiene una respuesta “Sí”, y salimos del ciclo. Este tipo de ciclo ocurre tan frecuentemente, que se le da el nombre, *ciclo DO*, y su diagrama de flujo tiene una abreviación, fig. 5-11(b). A la variable  $K$  se le llama *índice* del ciclo DO, y al procedimiento, que es iterado, se le llama *cuerpo* del ciclo.

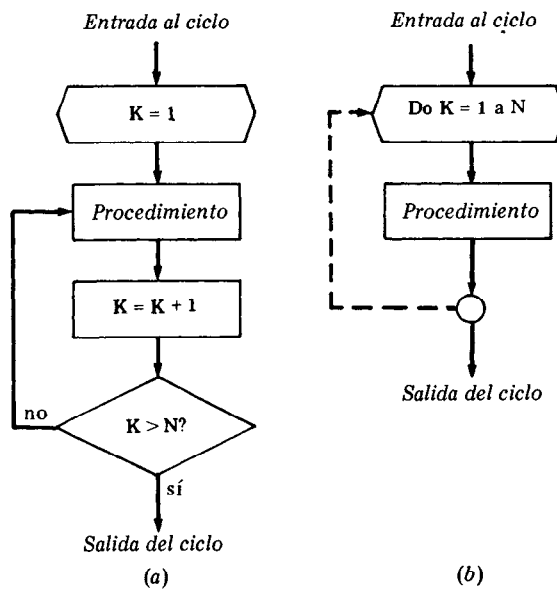
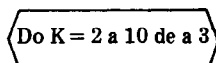


Figura 5-11

En la figura 5-11(b), el valor inicial del índice y su incremento son ambos 1. Esta no es una restricción obligatoria. Si, en lugar, se usa un enunciado como



entonces el valor inicial será 2, 10 el valor límite, y 3 el incremento. Así, primero ejecutamos el ciclo con  $K = 2$ . Luego incrementamos  $K$  en 3, y ejecutamos el ciclo con  $K = 5$ . De nuevo, incrementamos  $K$  en 3, y ejecutamos el ciclo con  $K = 8$ , y salimos del ciclo. Frecuentemente se requieren ciclos DO de este tipo más general cuando el índice  $K$  también figura en el cuerpo del ciclo.

**EJEMPLO 5.6** Encuentre los enteros impares positivos que no excedan a  $N$ , junto con sus cuadrados, en donde  $N$  es un entero mayor que 1 que entra al programa.

La figura 5-12(a) es un diagrama de flujo de un programa pertinente. Observe que el valor inicial de  $K$  es 1, el incremento es 2, y el valor por comparar es  $N$ . El ciclo DO equivalente aparece en la fig. 5-12(b).

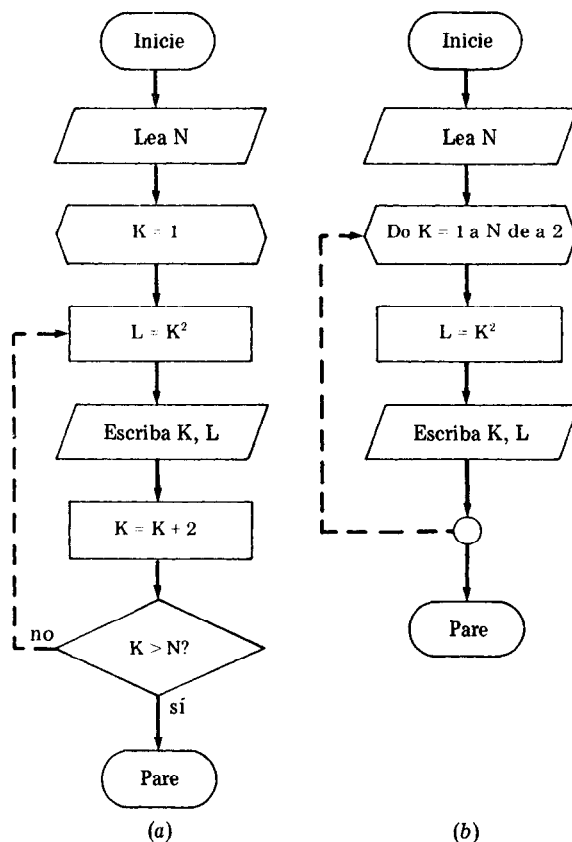


Figura 5-12

## 5.6 PROGRAMAS EN SEUDOCODIGO

Un diagrama de flujo puede resultar difícil de leer, de modificar, o de revisar para un algoritmo que sea suficientemente complejo para no aceptar una estructura simple, de arriba hacia abajo. Por consiguiente, se ha desarrollado un lenguaje de programación en pseudocódigo, que da una alternativa para presentar algoritmos.

El programa en pseudocódigo está compuesto por una lista de enunciados. Algunos de estos enunciados están entre los que se usan en los diagramas de flujo, por ejemplo, los enunciados



de lectura, los enunciados de escritura, los enunciados de asignación, las condiciones. Sin embargo, para indicar la lógica de un algoritmo, el programa en pseudocódigo usa tres tipos de organización: (i) lógica secuencial, (ii) lógica de selección, y (iii) lógica de iteración, en lugar de flechas o líneas de flujo.

### Lógica secuencial

Bajo esta lógica, las instrucciones de un programa en pseudocódigo se ejecutan en orden, de arriba hacia abajo (véase la fig. 5-13). Aunque no es necesario tener un enunciado de Inicie o un enunciado de Pare (ya que el programa comienza arriba y termina abajo), frecuentemente señalamos que se ha completado el programa escribiendo FIN al final del programa. Por ejemplo, un programa en pseudocódigo equivalente al diagrama de flujo de la fig. 5-1 podría aparecer como sigue:

```
lea NOMBRE, BALANCE, TASA
INTERES = BALANCE × TASA
escriba NOMBRE, INTERES
FIN
```

Algunas veces se comienza el programa con un título como "Cálculo de interés".

#### Programa en pseudocódigo

```
Proceso A
Proceso B
```

#### Diagrama de flujo equivalente

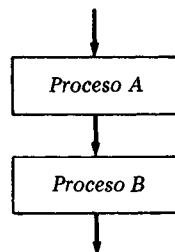


Figura 5-13 Lógica secuencial

### Lógica de selección

Esta lógica emplea varias estructuras llamadas *estructuras IF*, cada una de las cuales es esencialmente una selección de una de varias alternativas. Cada una de tales estructuras comienza con un enunciado de la forma

IF condición

y termina con el enunciado

ENDIF

La condición en el enunciado inicial por lo común se puede poner en forma de una pregunta con respuesta "Sí" o "No".

**Alternativa sencilla.** La estructura apropiada se llama *estructura IFTHEN*; su lógica se ilustra en la fig. 5-14. Si la condición se cumple (IF), entonces (THEN) se ejecuta el procedimiento

to A, la codificación del cual puede requerir uno o más enunciados; en caso contrario, se salta el procedimiento A, y se transfiere el control al primer enunciado que siga al enunciado ENDIF.

#### Programa enseudocódigo

```
Condición IF
  [Procedimiento A]
ENDIF
```

#### Diagrama de flujo equivalente

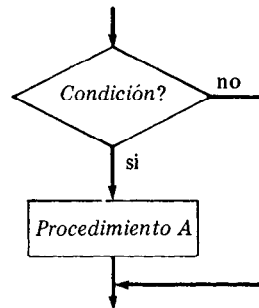


Figura 5-14 Estructura IFTHEN.

**EJEMPLO 5.7** El siguiente programa enseudocódigo, que calcula el SUELDO de un empleado dada su TASA por hora de pago y el número de HORAS trabajadas, usa una estructura IFTHEN:

```
lea NOMBRE, TASA, HORAS
SUELDO = HORAS × TASA
IF HORAS > 40
  SUELDO = SUELDO + (HORAS-40) × 0.5 × TASA
ENDIF
escriba NOMBRE, SUELDO
FIN
```

En otras palabras, el SUELDO es igual a HORAS multiplicado por TASA, pero si el empleado ha trabajado horas extras (más de 40 horas), entonces hay un pago adicional con una tasa de la mitad para aquellas horas que pasen de 40.

Observe que el procedimiento IF se ha indentado, una convención deseudocódigo que hace los programas mucho más fáciles de leer.

**Alternativa doble.** Se usa una *estructura IFTHENELSE* para decisiones con dos alternativas diferentes. Su lógica se muestra en la fig. 5-15. Observe que un enunciado ELSE separa dos procedimientos. Como se indica en el diagrama de flujo, si (IF) la condición se cumple, entonces (THEN) se ejecuta el procedimiento A (por encima del enunciado ELSE); en caso contrario (ELSE) se ejecuta el procedimiento B (por debajo del enunciado ELSE).

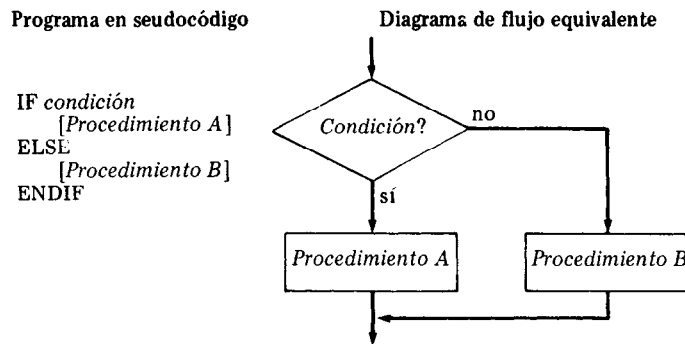


Figura 5-15 Estructura IFTHENELSE.

**EJEMPLO 5.8** En seguida se muestra un programa enseudocódigo para el ejemplo 5.4' (cuyo diagrama de flujo aparece en la fig. 5.5).

```

lea A, B
IF A < B
  GRANDE = B
  PEQUEÑO = A
ELSE
  GRANDE = A
  PEQUEÑO = B
ENDIF
escriba PEQUEÑO, GRANDE
FIN

```

Observe de nuevo cómo los bloques de procedimiento se indentan para lectura más fácil.

**Alternativas múltiples.** Decisiones que involucran más de dos alternativas pueden manejarse por medio de estructuras IF *anidadas*, en las cuales una estructura IF está contenida en la componente de procedimiento de otra estructura IF. Un ejemplo es la estructura ELSEIF, cuya forma y lógica aparecen en la fig. 5-16. Estas estructuras ELSEIF usan uno o más enunciados de la forma

ELSEIF *condición*

entre los enunciados IF y ELSE. Observe que solamente se ejecutará, uno de los procedimientos, el que sigue a la primera condición que se cumpla. Si ninguna de las condiciones se cumple, entonces se ejecuta el procedimiento en seguida del enunciado ELSE. Si este procedimiento es vacío, entonces el enunciado ELSE se puede omitir. (Véase el problema 5.46)

**EJEMPLO 5.9** En seguida presentamos un programa enseudocódigo para el ejemplo 5.5 (el diagrama de flujo está en la fig. 5-6).

```

lea A, B, C
D = B2 - 4 × A × C
IF D > 0
  X1 = (-B + √D)/(2 × A)
  X2 = (-B - √D)/(2 × A)
  escriba X1, X2
ELSEIF D = 0
  X = -B/(2 × A)
  escriba 'SOLUCION UNICA', X
ELSE
  escriba 'NO HAY SOLUCION REAL'
ENDIF
FIN

```

De nuevo observe que los bloques de procedimiento están indentados.

## Programa en pseudocódigo

```

IF condición (1)
  [Procedimiento A1]
ELSEIF condición (2)
  [Procedimiento A2]

ELSEIF condición (m)
  [Procedimiento Am]
ELSE
  [Procedimiento B]
ENDIF

```

## Diagrama de flujo equivalente

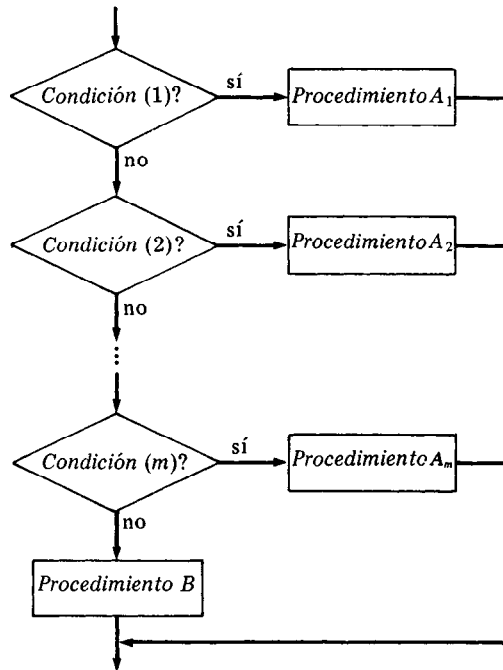


Figura 5-16 Estructura ELSEIF.

## Programa en pseudocódigo

```

DO K = INV a VFIN de a INCR
  Procedimiento
  (Cuerpo del ciclo)
ENDDO

```

## Diagrama de flujo equivalente

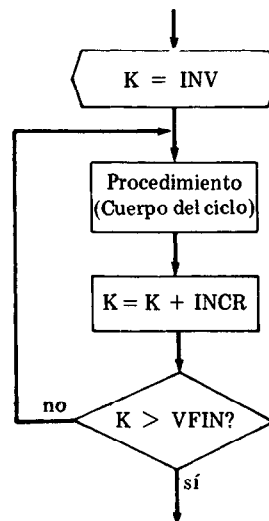


Figura 5-17 Estructura DO.

### Iteración lógica

Esta lógica se refiere a las estructuras con ciclos, de los cuales hay de tres tipos. Un tipo, al que ya se le hizo diagrama de flujo en la sec. 5.5, comienza con un enunciado DO, que tiene la forma

DO K = 1 to N o DO K = INV to VFIN by INCR

Otro tipo comienza con un enunciado DOWHILE (Haga mientras), que tiene la forma

DOWHILE condición

y el tercer tipo comienza con un enunciado DOUNTIL (Haga hasta que), que tiene la forma

DOUNTIL condición

Todos los tres tipos terminan con el enunciado ENDDO, que indica el fin del ciclo.

La forma y lógica de la estructura DO aparece en la fig. 5-17. En este caso a K se le llama *índice* del ciclo; a INV, *valor inicial*; a VFIN, *valor final* o *valor de prueba*, y a INCR, incremento. (Por convención cuando INCR = 1 se puede omitir el "by INCR" del enunciado DO.) Observe que el cuerpo del ciclo se ejecuta primero con K = INV, el valor inicial. Después de cada iteración, K se incrementa en INCR y se compara con VFIN. Las iteraciones terminan tan pronto como K exceda a VFIN. El diagrama de flujo de la fig. 5-17 supone que INCR es positivo; si INCR es negativo, de tal manera que K vaya disminuyendo de valor, entonces las iteraciones terminan tan pronto como  $K < VFIN$ . Véase el problema 5.16(d).

**EJEMPLO 5.10** El siguiente programa en pseudocódigo logra el objetivo del ejemplo 5.6:

```

lea N
DO K = 1 a N de a 2
  L = K2
  escriba K, L
ENDDO
FIN

```

La forma y lógica de la estructura DOWHILE aparece en la figura 5-19. Como estas estructuras son ciclos, debe haber un enunciado antes de la estructura que inicializa la condición que controla el ciclo, y debe haber un enunciado en el cuerpo del ciclo que cambia la condición, para que eventualmente las iteraciones terminen. Las iteraciones continúan en el ciclo DOWHILE hasta que la condición no se cumpla, mientras que las iteraciones continúan en el ciclo DOUNTIL hasta que se cumple la condición. Esta es una diferencia menor, ya que siempre se

Programa en pseudocódigo      Diagrama de flujo equivalente

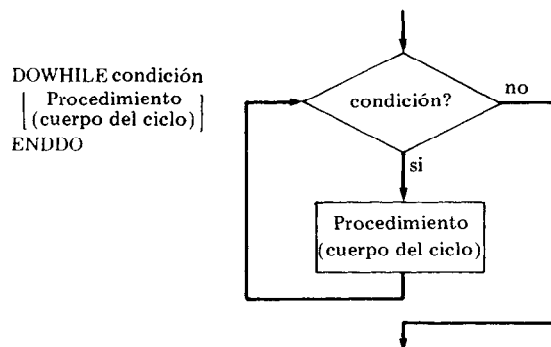


Figura 5-18 Estructura DOWHILE.

## Programa en pseudocódigo      Diagrama de flujo equivalente

DUNTIL condición  
 { Procedimiento  
 (cuerpo del ciclo) }  
 ENDO

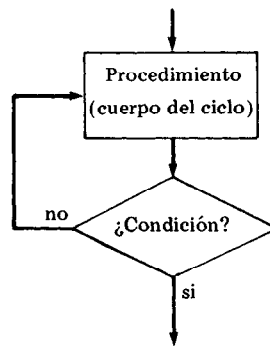


Figura 5-19 Estructura DUNTIL.

puede poner la negación de la condición original. Más importante es el hecho de que la condición en el ciclo DOWHILE se prueba al principio del ciclo, mientras que la condición en el ciclo DUNTIL se prueba al final del ciclo. Por lo tanto, el cuerpo del ciclo DUNTIL siempre se ejecuta por lo menos una vez, mientras que el cuerpo del ciclo DOWHILE puede ser que no se ejecute nunca.

**EJEMPLO 5.11** Cualquiera de los dos programas siguientes en pseudocódigo logrará el objetivo del ejemplo 5.6 (véase la fig. 5-12).

lea N	lea N
K = 1	K = 1
DOWHILE K < N	DUNTIL K > N
L = K <sup>2</sup>	L = K <sup>2</sup>
escriba K, L	escriba K, L
K = K + 2	K = K + 2
ENDDO	ENDDO
FIN	FIN

Observe que los programas son idénticos, excepto que las condiciones que controlan las iteraciones son cada una la negación de la otra.

**EJEMPLO 5.12** Supongamos que el archivo del personal de una compañía contiene los nombres y edades de todos sus empleados, y que la compañía quiere una lista de todos sus empleados que tengan menos de 30 años. El siguiente programa en pseudocódigo logra el objetivo:

```

lea NOMBRE, EDAD del registro
DUNTIL Fin del archivo
  IF EDAD < 30
    escriba NOMBRE
  ENDIF
  lea NOMBRE, EDAD del siguiente registro
ENDDO
FIN

```

Observe que el primer enunciado de lectura inicializa la condición que controla el ciclo, y el segundo enunciado de lectura cambia la condición. Observe también la doble indentación, una para la estructura DO y una para la estructura IF contenida dentro del ciclo. (Suponemos implícitamente que el archivo contiene datos de por lo menos un empleado; de otra manera necesitaríamos un ciclo DOWHILE.)

*Observación 1:* La programación estructurada es una metodología que hace hincapié en una estructura de arriba hacia abajo para un programa de computador, en lugar de una transfe-

rencia de control hacia atrás y hacia adelante dentro del programa. Esta metodología ha resultado en la introducción de varios tipos de estructuras en los diferentes lenguajes de programación que son muy similares a las anteriores estructuras en pseudocódigo. Así, la expresión en pseudocódigo de un algoritmo encaja muy bien con las técnicas de programación estructurada.

*Observación 2:* “Codificar” usualmente significa traducir un algoritmo en un lenguaje de programación bien definido. Los *pseudocódigos*, así como los diagramas de flujo, pueden ser usados como una ayuda para escribir programas en casi cualquier lenguaje de programación. En otras palabras, los programas en pseudocódigo (como los diagramas de flujo) son esencialmente independientes del lenguaje.

## Problemas resueltos

### PROGRAMAS DE COMPUTADOR; VARIABLES, CONSTANTES

- 5.1 Un compilador es una máquina que traduce un programa escrito en lenguaje de máquina a un lenguaje de alto nivel tal como BASIC, COBOL, o FORTRAN. (Verdadero o falso?)

Falso, por dos razones. Primero que todo, un compilador no es una máquina, sino un programa. Segundo, el compilador traduce un programa escrito en un lenguaje de alto nivel a lenguaje de máquina.

- 5.2 ¿Qué quiere decir *programa fuente* y *programa objeto* en la programación de computadores?

Programa fuente se refiere al programa original, escrito en lenguaje de alto nivel. Al traducir las instrucciones al lenguaje de máquina, el programa fuente se convierte en *programa objeto*.

- 5.3 Los diferentes lenguajes de programación usan diferentes conjuntos de caracteres. (Verdadero o Falso?)

Verdadero. Aunque todo lenguaje de programación incluye un conjunto de caracteres de 10 dígitos y 26 letras; normalmente, éstos admiten una selección de caracteres especiales diferentes.

- 5.4 ¿Cuáles de los siguientes son aceptados como nombres de variables (a) en BASIC? (b) en FORTRAN?

- |         |              |          |           |          |
|---------|--------------|----------|-----------|----------|
| (i) X   | (iii) TASA   | (v) 4H   | (vii) A   | (ix) K*  |
| (ii) X2 | (iv) INTERES | (vi) X/B | (viii) A9 | (x) EDAD |

(a) (i), (ii), (vii), y (viii). Los nombres de variables en BASIC son o una sola letra o una letra seguida por un dígito.

(b) (i), (ii), (iii), (vii), y (x). Un nombre de variable en FORTRAN consiste de uno a seis caracteres alfanuméricos, siendo el primer carácter una letra.

- 5.5 ¿Por qué es lo siguiente no aceptable como constantes numéricas?

- (a) 5,000,000      (b) \$55.50      (c) 33 444 555      (d) 75¢      (e) 4.6E234

(a) Contiene comas. (b) Contiene un signo de pesos. (c) Contiene espacios en blanco. (d) Contiene el signo de centavos. (e) El exponente excede de dos dígitos.

- 5.6 En una expresión aritmética sin paréntesis, la fuerza de la operación determina el orden en que se efectúan. En Basic (o en FORTRAN, con \*\* en lugar de ↑), los símbolos para las cinco operaciones fundamentales y sus fuerzas son las siguientes:

La más fuerte: ↑ exponenciación

La siguiente más fuerte: \* multiplicación / división

La más débil: + adición — substracción

Dentro de un grupo de igual fuerza, las operaciones se efectúan de izquierda a derecha. El orden de la fuerza se ignora si se introducen paréntesis en la fórmula en BASIC; entonces la(s) expresión(es) en paréntesis es(son) evaluada(s) (siguiendo el orden de fuerza) antes que cualquier otra cosa. Dé fórmulas en BASIC para

$$\begin{array}{ll} (a) & x^2 + 2xy + y^2 \\ (b) & x^3 - 4x^2 + 7x + 6 \\ (c) & a + \frac{b+c}{2d} \\ (d) & \frac{a}{b} - \frac{c^2}{3a} \end{array}$$

Observe primero que solamente se pueden usar letras mayúsculas y que todas las expresiones se deben escribir en una línea.

$$\begin{array}{ll} (a) & X \uparrow 2 + 2 * X * Y + Y \uparrow 2 \\ (b) & X \uparrow 3 - 4 * X \uparrow 2 + 7 * X + 6 \\ (c) & A + (B + C) / (2 * D) \\ (d) & A / B - C \uparrow 2 / (3 * A) \end{array}$$

5.7 Refiriéndonos al problema 5.6, evalúe cada una de las siguientes expresiones en BASIC:

$$\begin{array}{ll} (a) & 3 + 2 * 6 - 12 / 3 \\ (b) & (3 + 2) * (6 - 12) / 3 \\ (c) & 4 * 3 \uparrow 2 / 2 - 2 \uparrow 3 + 1 \\ (d) & (4 * 3) \uparrow 2 / 2 \uparrow (3 + 1) \end{array}$$

(a) Primero,  $2 * 6 = 12$  y  $12 / 3 = 4$ , lo que da

$$3 + 12 - 4$$

Luego,  $3 + 12 = 15$ , y, finalmente,  $15 - 4 = 11$ .

(b) Primero,  $3 + 2 = 5$  y  $6 - 12 = -6$ , lo que da

$$5 * (-6) / 3$$

Luego,  $5 * (-6) = -30$ , y, finalmente,  $(-30) / 3 = -10$ .

(c) Primero,  $3 \uparrow 2 = 9$  y  $2 \uparrow 3 = 8$ , lo que da

$$4 * 9 / 2 - 8 + 1$$

Luego,  $4 * 9 = 36$  y  $36 / 2 = 18$ , lo que da  $18 - 8 + 1$ .

En seguida,  $18 - 8 = 10$ , y finalmente,  $10 + 1 = 11$ .

(d) Primero,  $4 * 3 = 12$  y  $3 + 1 = 4$ , lo que da

$$12 \uparrow 2 / 2 \uparrow 4$$

Luego  $12 \uparrow 2 = 144$  y  $2 \uparrow 4 = 16$ , lo que da  $144 / 16$ . Finalmente,  $144 / 16 = 9$ .

## DIAGRAMAS DE FLUJO

5.8 Un archivo de los nuevos estudiantes de primer año contiene, entre otros datos, el NOMBRE de cada estudiante y el PUNTAJE que obtuvo en el examen de admisión. Dibuje un diagrama de flujo que haga una lista de los estudiantes que tuvieron un puntaje perfecto de 100.

La figura 5-20 es uno de tales diagramas de flujo. Hay dos desiciones, una que verifica si PUNTAJE = 100 y la otra que encuentra el Fin del Archivo.

5.9 Cada registro en el archivo de estudiantes contiene, entre otros datos, el PESO del estudiante. Dibuje un diagrama de flujo que encuentre el peso promedio de los estudiantes.

La figura 5-21 es uno de tales diagramas de flujo. Nótese la necesidad de un acumulador, SUMA, para sumar los pesos de los estudiantes, y un contador, N, para numerar los estudiantes. El peso promedio, PROMEDIO, es la SUMA final dividida por el N final.



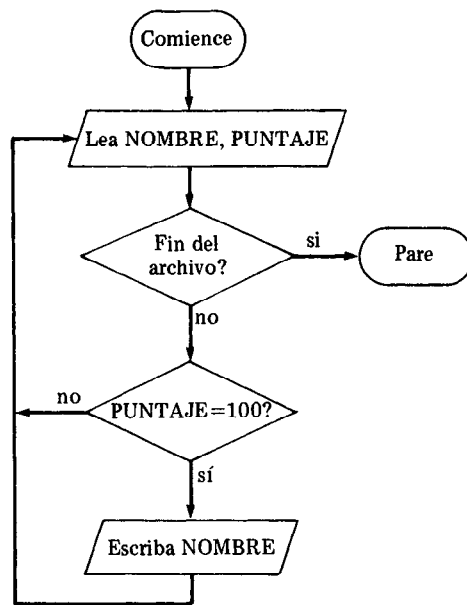


Figura 5-20

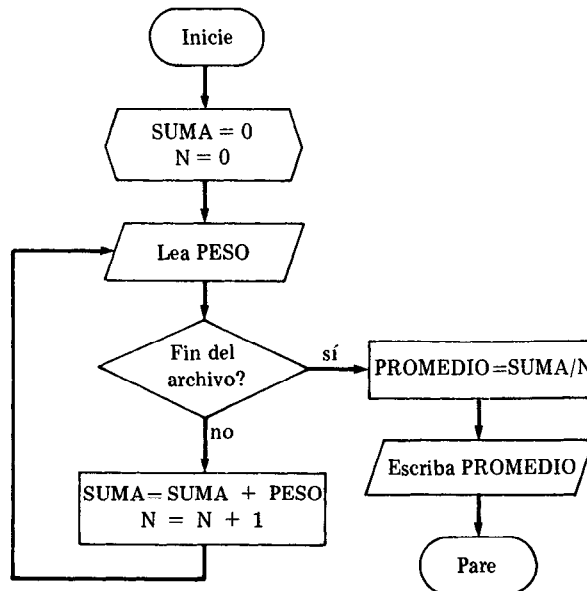


Figura 5-21

5.10 Cada registro de un archivo de estudiantes contiene, entre otros datos, la ALTURA del estudiante. Dibuje un diagrama de flujo que encuentre la altura del estudiante más alto.

La figura 5-22 es uno de tales diagramas de flujo. Observe que cada vez que leemos una nueva ALTURA, la comparamos con la variable ALTO. Si la nueva ALTURA es mayor que ALTO, entonces cambiamos ALTO a la nueva ALTURA. Así, en un momento dado, ALTO contiene la altura del estudiante más alto que ha sido procesado hasta ese momento. Por lo tanto, ALTO contendrá la altura

del (de los) estudiante(s) más alto(s) cuando hayan sido procesados todos los registros de los estudiantes. También asignamos inicialmente  $ALTO = 0$  para comenzar el proceso.

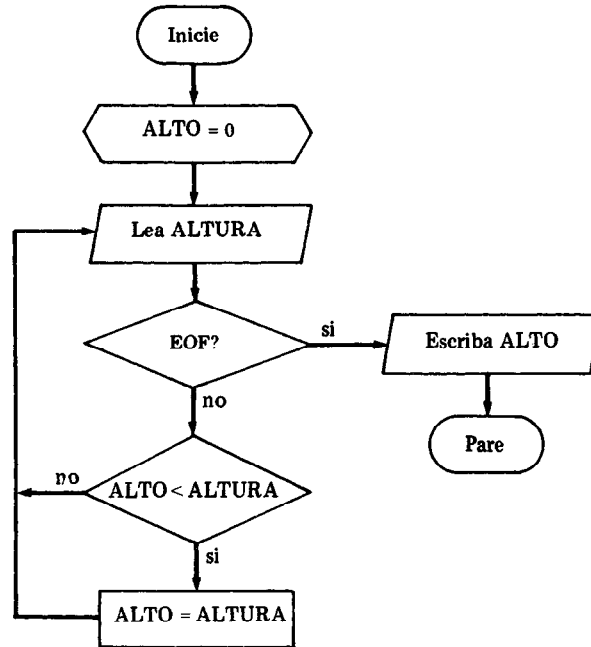


Figura 5-22

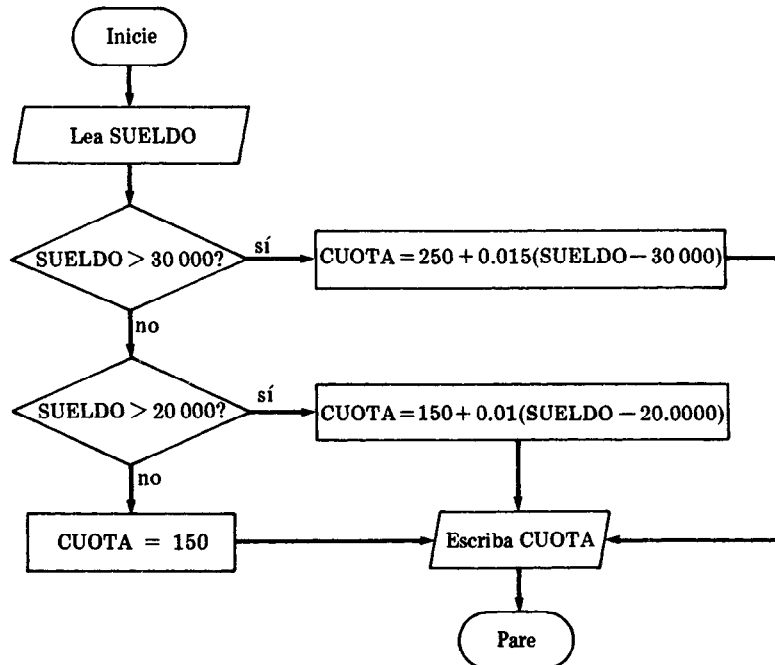


Figura 5-23



- 5.11 En la tabla 5-2 se dan las cuotas anuales en una asociación de profesionales. Dibuje un diagrama de flujo en que entre SALARIO y salga CUOTA.

Tabla 5-2

Sueldo anual	Cuota anual
Menos de \$ 20 000	\$ 150
Entre \$ 20 000 y \$ 30 000	\$ 150 + (1% del excedente sobre \$ 20 000)
Más de \$ 30 000	\$ 250 + (1.5% del excedente sobre \$ 30 000)

La figura 5-23 da uno de tales diagramas de flujo. De las dos decisiones, la primera pregunta si el salario excede los \$30,000, y la segunda, si excede los \$20,000 (pero no los \$30,000).

- 5.12 Encuentre las salidas en los segmentos de los diagramas de flujo de la fig. 5-24.

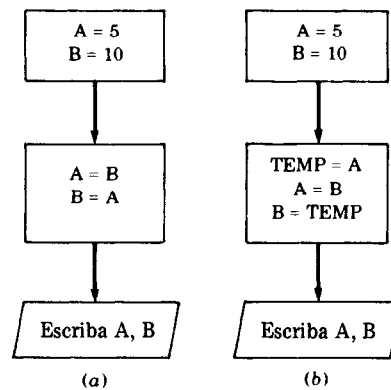


Figura 5-24

- (a) El enunciado  $A = B$  asigna el valor actual de B, que es 10, a A. Así que el valor de A se cambia a 10. El enunciado  $B = A$  asigna el valor actual de A, que es 10, a B. Así que el valor B permanece 10. De esta manera, la salida es 10 y 10; los valores de A y de B no quedan intercambiados con los dos enunciados.
- (b) Ahora los valores de A y de B se intercambian. Específicamente,  $TEMP = A$  asigna el valor original de A a la posición "temporal" TEMP, o sea que  $TEMP = 5$ . Ahora,  $A = B$  asigna el valor de B a A; así que  $A = 10$ . Finalmente,  $B = TEMP$  asigna el valor original de A, que está almacenado en TEMP, a B; así que  $B = 5$ . De esta manera los valores de A y de B se intercambian, y la salida es 10 y 5.
- 5.13 Trace los valores de A y de B a través del diagrama de flujo en la figura 5-25 para encontrar las salidas dadas las entradas (a)  $A = 10, B = 5$ ; (b)  $A = 3, B = 5$ ; (c)  $A = 5, B = 10$ .

- (a) Como  $A = 10, B = 5$ , la respuesta a " $A < B$ ?" es "No"; así que se ejecuta  $A = A^2 + B$ , lo que da

$$A = 10^2 + 5 = 100 + 5 = 105$$

Luego se ejecuta  $B = B + 5A$ , lo que da

$$B = 5 + 5 \times 105 = 5 + 525 = 530$$

Así que la salida es  $A = 105, B = 530$ .

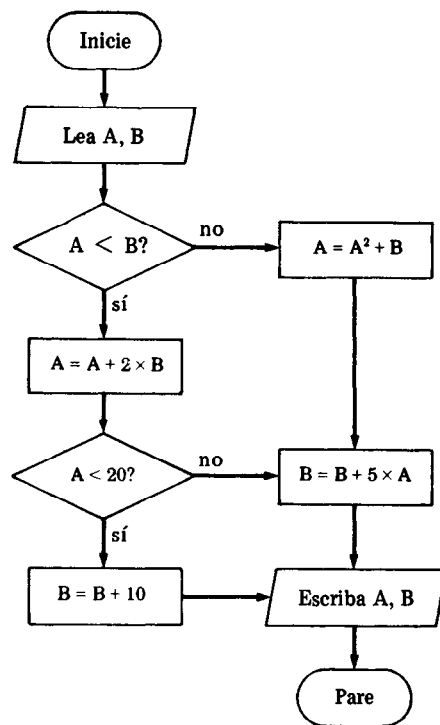


Figura 5-25

- (b) Como  $A = 3$ ,  $B = 5$ , la respuesta a " $A < B$ ?" es "Sí"; así que se ejecuta  $A = A + 2 \times B$ , lo que da

$$A = 3 + 2 \times 5 = 3 + 10 = 13$$

La respuesta a " $A < 20$ ?" también es "sí", por lo tanto se ejecuta  $B = B + 10$ , lo que da

$$B = 5 + 10 = 15$$

Así que la salida es  $A = 13$ ,  $B = 15$ .

- (c) Como  $A = 5$ ,  $B = 10$ , la respuesta a " $A < B$ ?" es "Sí"; por lo tanto se ejecuta  $A = A + 2 \times B$ , dando

$$A = 5 + 2 \times 10 = 5 + 20 = 25$$

Ahora la respuesta a " $A < 20$ ?" es "No"; por lo tanto se ejecuta  $B = B + 5 \times A$ , dando

$$B = 10 + 5 \times 25 = 10 + 125 = 135$$

Así que la salida es  $A = 25$ ,  $B = 135$ .

- 5.14 Encuentre las salidas del diagrama de flujo de la fig. 5-26, suponiendo como entradas (a)  $X = 2$ ,  $Y = 5$ ; (b)  $X = 2$ ,  $Y = 12$ .

Observe primero que hay tres conectores rotulados A, dos rotulados B, y tres rotulados C. Como se exige, solamente hay un conector de entrada por cada rótulo.

- (a) Como  $X = 2$ ,  $Y = 5$ , la respuesta a " $X < 10$ ?" es "Sí"; por lo tanto se ejecuta  $X = X + Y$ , lo que da

$$X = 2 + 5 = 7$$

La respuesta a “ $Y < 10?$ ” también es “Sí”; por lo tanto se ejecuta  $Y = Y + X$ , dando

$$Y = 5 + 7 = 12$$

Luego  $Z = X + Y$  da

$$Z = 7 + 12 = 19$$

Así que la salida es  $Z = 19$ .

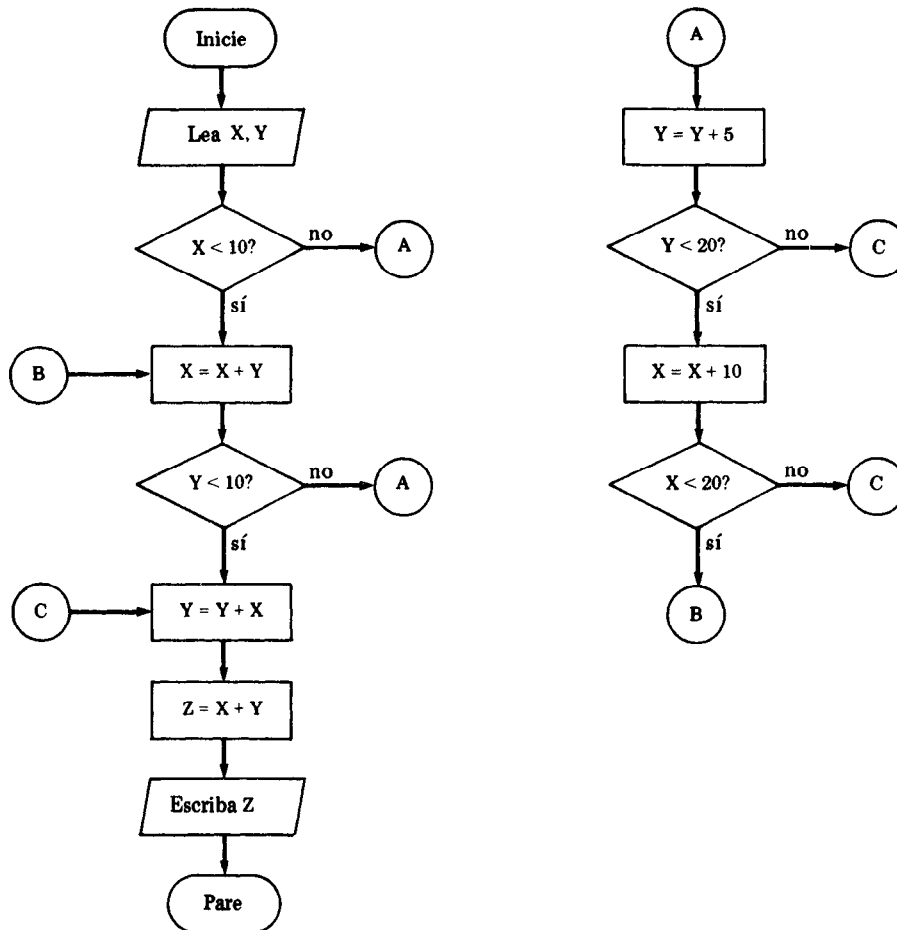


Figura 5-26

(b) Como  $X = 2$ ,  $Y = 12$ , la respuesta a “ $X < 10?$ ” es “Sí”; así que se ejecuta  $X = X + Y$ , lo que da

$$X = 2 + 12 = 14$$

La respuesta a “ $Y < 10?$ ” es “No”; así que, a través del conector A, vamos al enunciado  $Y = Y + 5$ . Esto da

$$Y = 12 + 5 = 17$$

La respuesta a “ $Y < 20?$ ” es “Sí”; así que se ejecuta  $X = X + 10$ , dando

$$X = 14 + 10 = 24$$

La respuesta a "X < 20?" es "No"; así que, a través del conector C, vamos a  $Y = Y + X$ . Esto da

$$Y = 17 + 24 = 41$$

Luego  $Z = X + Y$  da

$$Z = 24 + 41 = 65$$

Así, la salida es  $Z = 65$ .

### CICLOS DO

5.15 Dibuje un diagrama de flujo con un ciclo DO, al que le entre un entero positivo  $N$  y del que salga

$$(a) \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{N} \quad (b) \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \pm \frac{1}{N}$$

- (a) La figura 5-27(a) es uno de tales diagramas de flujo. Observe que el índice  $K$  también está en el cuerpo del ciclo. Se usa el acumulador SUMA para sumar  $1/K$  desde  $K = 1$  hasta  $N$ .  
 (b) La figura 5-27(b) es uno de tales diagramas de flujo. Ahora necesitamos multiplicar  $1/K$  por  $(-1)^{K+1}$  para asegurarnos de que los valores pares de  $K$  contribuyen con sumandos negativos.

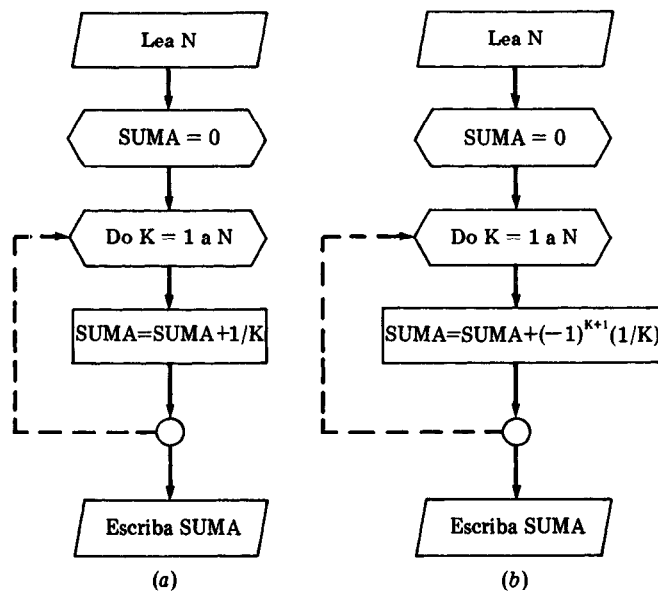


Figura 5-27

5.16 Encuentre el número de iteraciones, y el valor de  $K$  para cada iteración, para ciclos DO encabezados por:

- (a) Do K = 1 a 10 de a 2      (c) Do K = 5 a 3 de a 4  
 (b) Do K = 5 a 20 de a 4      (d) Do K = 15 a 5 de a -4

- (a) El valor inicial para  $K$  es  $K = 1$ . Luego  $K$  se incrementa en 2 cada vez, lo que da valores impares a  $K$ . Pero el valor final es 10; así que el ciclo se ejecuta para

$$K = 1 \quad K = 3 \quad K = 5 \quad K = 7 \quad K = 9$$

o sea 5 veces [a no ser que haya una salida anormal, como se discute en el problema 5.17(b)].

(b) El ciclo se ejecuta para

$$K = 5 \quad K = 5 + 4 = 9 \quad K = 9 + 4 = 13 \quad K = 13 + 4 = 17$$

o sea 4 veces.

(c) Ahora el valor inicial 5, ya excede el valor inicial 3. Si la prueba para parar sigue al cuerpo del ciclo (como en la figura 5-11), el ciclo se ejecutará una vez, para el valor inicial  $K = 5$ . En caso contrario, el ciclo no se ejecutará ni una sola vez.

(d) El valor inicial para  $K$  es  $K = 15$ . Como el incremento  $-4$  es negativo,  $K$  se disminuye en 4 después de cada iteración. Así que el ciclo se ejecuta para

$$K = 15 \quad K = 15 - 4 = 11 \quad K = 11 - 4 = 7$$

pero no para  $K = 7 - 4 = 3$ , ya que 3 es menor que el valor de prueba 5. Por lo tanto el ciclo se ejecuta tres veces.

5.17 Encuentre la salida para cada uno de los diagramas de flujo de la fig. 5.28.

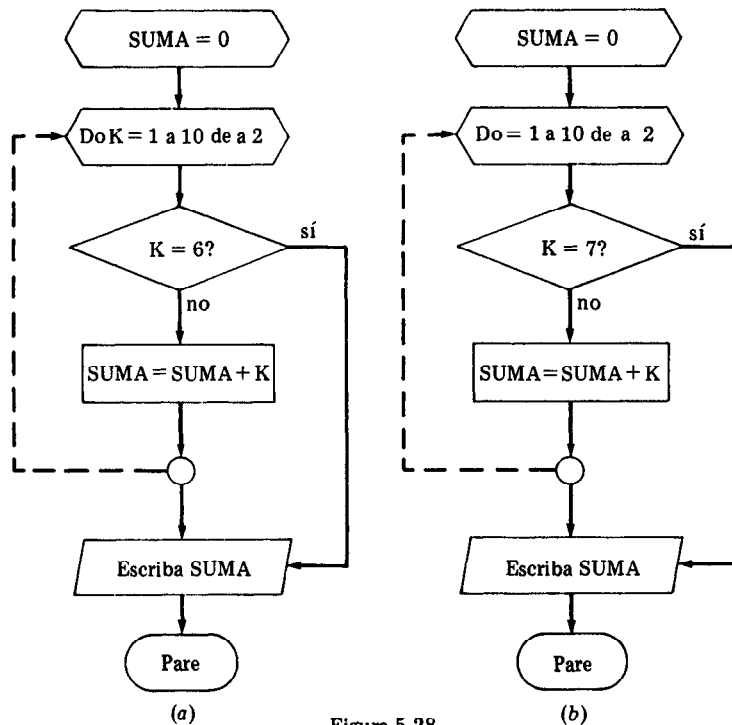


Figura 5-28

(a) El enunciado DO indica que el ciclo se va a ejecutar 5 veces, para  $K = 1, 3, 5, 7, 9$ . Como la respuesta para " $K = 6$ ?" es "No" para todos los cinco valores de  $K$ ,  $SUMA = SUMA + K$  se ejecuta en efecto cinco veces. Tenemos:

(1) Para  $K = 1$ ,  $SUMA = 0 + 1 = 1$ .

(2) Para  $K = 3$ ,  $SUMA = 1 + 3 = 4$ .

(3) Para  $K = 5$ ,  $SUMA = 4 + 5 = 9$ .

(4) Para  $K = 7$ ,  $SUMA = 9 + 7 = 16$ .

(5) Para  $K = 9$ ,  $SUMA = 16 + 9 = 25$ .

Ahora salimos del ciclo hacia "Escriba SUMA"; y, por lo tanto, la salida es 25. Este es un caso de salida normal, ya que todas las iteraciones indicadas por el enunciado DO se han completado.

(b) El enunciado DO indica de nuevo que el ciclo se va a ejecutar cinco veces, para  $K = 1, 3, 5, 7, 9$ . La respuesta a " $K = 7$ ?" es "No" para los primeros tres valores de  $K$ ; y por lo tanto  $SUMA = SUMA + K$  se ejecuta para estos valores de  $K$ :

- (1) Para  $K = 1$ ,  $SUMA = 0 + 1 = 1$ .
- (2) Para  $K = 3$ ,  $SUMA = 1 + 3 = 4$ .
- (3) Para  $K = 5$ ,  $SUMA = 4 + 5 = 9$ .

Pero, al iniciarse la cuarta iteración del ciclo, la respuesta a " $K = 7?$ " es "Sí"; y, por lo tanto, por la fig. 5-28(b), salimos del ciclo hacia "Escriba SUMA". Así, la salida es 9, el último valor de SUMA. Este es el caso de salida anormal, ya que no todas las iteraciones indicadas en el enunciado DO se completaron.

## PROGRAMAS EN SEUDOCODIGO

- 5.18 La comisión de un vendedor es el 5% de sus ventas totales semanales, con una bonificación de \$100 si las ventas pasan de \$10 000. Escriba un programa en pseudocódigo que identifique a un vendedor y calcule su COMISION.

```

Lea NOMBRE, VENTAS
COMISION = 0.05 × VENTAS
IF VENTAS > 10 000
    COMISION = COMISION + 100
ENDIF
Escriba NOMBRE, COMISION
FIN

```

Observe que se usó una estructura IFTHEN.

- 5.19 Vea la tabla 5-2. (a) Escriba un programa en pseudocódigo al que entren NOMBRE, SUELDO y del que salgan NOMBRE, CUOTA. (Compárelo con el problema 5.11.) (b) Repita (a) si, en adición a la tabla 5-2, hay un tope de \$ 400 para la cuota.

```

(a)      lea NOMBRE, SUELDO
          IF SUELDO > 30 000
              CUOTA = 250 + 0.015 × (SUELDO - 30 000)
          ELSEIF SUELDO > 20 000
              CUOTA = 150 + 0.01 × (SUELDO - 20 000)
          ELSE
              CUOTA = 150
          ENDIF
          Escriba NOMBRE, CUOTA
          FIN

```

Se usó una estructura ELSEIF porque hay tres alternativas.

```

(b)      lea NOMBRE, SUELDO
          IF SUELDO > 30 000
              CUOTA = 250 + 0.015 × (SUELDO - 30 000)
              IF CUOTA > 400
                  CUOTA = 400
              ENDIF
          ELSEIF SUELDO > 20 000
              CUOTA = 150 + 0.01 × (SUELDO - 20 000)
          ELSE
              CUOTA = 150
          ENDIF
          escriba NOMBRE, CUOTA
          FIN

```

Observe la estructura IFTHEN indentada en la primera alternativa, que limita la cuota a \$ 400.



- 5.20 Supongamos que  $y$  se da como una función de  $t$  por

$$y = 2t^3 - 3t^2 - 27t + 28$$

Escriba un programa en pseudocódigo que calcule  $y$  para valores de  $t$  desde  $-5$  hasta  $5$  en pasos de  $0.25$  y de  $t$  y su correspondiente  $y$ .

```

T = -5
DOWHILE T < 5
  Y = 2 × T3 - 27 × T + 28
  escriba T, y
  T = T + 0.25
ENDDO
FIN

```

Observe que  $T$  se inicializa antes de la estructura DOWHILE, pero se incrementa dentro de la estructura.

- 5.21 Escriba un programa en pseudocódigo para el algoritmo de la fig. 5-20, que encuentre el peso promedio para una lista de estudiantes.

```

SUMA = 0
N = 0
lea PESO
DOUNTIL Fin del Archivo
  SUMA = SUMA + PESO
  N = N + 1
  lea el próximo PESO
ENDDO
PROMEDIO = SUMA/N
escriba PROMEDIO.
FIN

```

El primer enunciado de lectura, que inicializa la condición que controla la estructura DOUNTIL, aparece antes de la estructura; el segundo enunciado de lectura, que cambia la condición, aparece dentro de la estructura.

- 5.22 Refiriéndose al problema 5.8, escriba un programa en pseudocódigo que haga una lista de los nombres de los estudiantes que tengan un puntaje perfecto de 100, y encuentre también el número  $N$  de tales estudiantes.

De nuevo necesitamos dos enunciados de lectura, uno inicializando la condición que controla el ciclo y el otro cambiando la condición.

```

N = 0
lea NOMBRE, PUNTAJE
DOUNTIL Fin del Archivo
  IF PUNTAJE = 100
    escriba NOMBRE
    N = N + 1
  ENDIF
  lea el próximo NOMBRE, PUNTAJE
ENDDO
escriba N
FIN

```

Observe que  $N$  se usa como contador para contar los estudiantes con un puntaje de 100. Debido a que la estructura IFTHEN es intercalada en el ciclo, hay una doble indentación en el programa.

- 5.23 Cada registro en un archivo de estudiantes contiene, entre otros datos, el NOMBRE del estudiante y su PESO. Escriba un programa en pseudocódigo que encuentre el nombre y altura del estudiante más alto. (Compárelo con el problema 5.10.)

En seguida presentamos el programa en pseudocódigo, en donde, de nuevo, tenemos dos enunciados de lectura.

```

ALTO = 0
HOMBREALTO = 'FULANO DE TAL'
lea NOMBRE, ALTURA
DUNTIL Fin del Archivo
  IF ALTO < ALTURA
    ALTO = ALTURA
    HOMBREALTO = NOMBRE
  ENDIF
  lea el próximo NOMBRE, ALTURA
ENDDO
escriba 'EL ESTUDIANTE MAS ALTO ES', HOMBREALTO, 'CON ALTURA', ALTO
FIN

```

Aquí, ALTO es una variable numérica, inicializada por ALTO = 0, pero HOMBREALTO es una variable no numérica, inicializada por HOMBREALTO = 'FULANO DE TAL'. Al final de cada iteración, ALTO y HOMBREALTO contienen, respectivamente, la altura y el nombre del estudiante más alto, que se ha procesado hasta el momento; así que los valores finales de ALTO y HOMBREALTO serán la altura y el nombre requeridos del estudiante más alto.

## Problemas suplementarios

### PROGRAMAS DE COMPUTADOR; VARIABLES, CONSTANTES

- 5.24 BASIC, COBOL, FORTRAN son (a) lenguajes de compilación, (b) lenguajes de alto nivel, (c) lenguajes independientes de la máquina, (d) todo lo anterior.
- 5.25 Un compilador traduce un programa fuente a un programa objeto (verdadero o falso?)
- 5.26 Un campo de datos cuyo valor puede cambiar durante el curso de un programa se llama (a) \_\_\_\_\_, mientras que un campo de datos cuyo valor normalmente no cambia durante el curso de un programa se llama (b) \_\_\_\_\_.
- 5.27 ¿Cuáles de los siguientes nombres de variables no son aceptables en BASIC?
- |         |        |                  |         |            |
|---------|--------|------------------|---------|------------|
| (a) B7  | (c) 3D | (e) BONIFICACION | (g) Z   | (i) NUMERO |
| (b) C34 | (d) F% | (f) EMPLEADO     | (h) A*B | (j) Y2     |
- 5.28 ¿Cuáles de las cadenas de caracteres del problema 5.27 no son aceptables como nombres de variables en FORTRAN?
- 5.29 ¿Cuáles de los siguientes no son aceptables como variables numéricas?
- |              |             |               |             |
|--------------|-------------|---------------|-------------|
| (a) 333.444  | (c) 79999   | (e) 234.5E-15 | (g) 50¢     |
| (b) 4,000.00 | (d) \$95.75 | (f) 2 000     | (h) 7.7E111 |
- 5.30 Escriba una fórmula en BASIC para cada expresión algebraica:

- |                 |                       |                           |
|-----------------|-----------------------|---------------------------|
| (a) $x^2 + y^2$ | (c) $\frac{2ab}{c+d}$ | (e) $\frac{x}{yz}$        |
| (b) $(x+y)^2$   | (d) $r^{n+1}$         | (f) $(x^2 + 2xy - y^2)^5$ |

5.31 Escriba una fórmula en BASIC para  $t^{n+1}$  (a) usando paréntesis, (b) sin paréntesis.

5.32 Evalúe cada expresión en BASIC:

$$\begin{array}{lll} (a) & 5+3*8-4/2 & (c) \quad 5+3*((8-4)/2) \quad (e) \quad (5+3)*(8-4/2) \\ (b) & (5+3)*(8-4)/2 & (d) \quad (5+3)*((8-4)/2) \quad (f) \quad 5+(3*8-4)/2 \end{array}$$

5.33 Evalúe cada expresión en BASIC:

$$\begin{array}{ll} (a) & 5+2\uparrow 3-2*3\uparrow 2 \\ (b) & 5+2\uparrow (3-2)*3\uparrow 2 \end{array} \quad \begin{array}{ll} (c) & (5+2)\uparrow 3-(2*3)\uparrow 2 \\ (d) & 5+(2\uparrow 3-2)*3\uparrow 2 \end{array}$$

## DIAGRAMAS DE FLUJO, PROGRAMAS EN SEUDOCODIGO

5.34 El perímetro P y el AREA de un triángulo cuyos lados tienen longitudes a, b, c están dados por

$$P = a + b + c \quad \text{AREA} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

en donde  $s \equiv (a + b + c)/2$ . Dibuje un diagrama de flujo o escriba un programa en pseudocódigo con entradas a, b, c y salidas P y AREA.

5.35 En un almacén de automóviles se usa CODIGO = 1 para un automóvil nuevo, CODIGO = 2 para automóviles usados y CODIGO = 3 para accesorios aparte. La comisión de un vendedor es la siguiente: el 3 % del precio de venta en automóviles nuevos, pero con un máximo de \$ 300; el 5 % del precio de venta en automóviles usados, pero con un mínimo de \$75; el 6 % en accesorios. Dibuje un diagrama de flujo o escriba un programa en pseudocódigo con entrada CODIGO y PRECIO y salida COMISION.

5.36 El valor por cobrar de llamadas telefónicas locales es el siguiente:

\$ 8.00 hasta 100 llamadas  
más 6 ¢ por llamada para las siguientes 100 llamadas  
más 4 ¢ por llamada para llamadas en exceso a 200

Dibuje un diagrama de flujo o escriba un programa en pseudocódigo con entrada el número de llamadas LOCALES y salida COBRO.

5.37 Tres números positivos a, b, y c pueden ser las longitudes de los lados de un triángulo siempre y cuando cada número sea menor que la suma de los otros dos, o sea

$$a < b + c \quad b < a + c \quad c < a + b$$

Dibuje un diagrama de flujo o escriba un programa en pseudocódigo con entradas a, b, c y salida "SI" o "NO", según que se pueda formar o no el triángulo.

5.38 Escriba las salidas del diagrama de flujo de la fig. 5-25 para las entradas (a) X = 15, Y = 20; (b) X = 15, Y = 5; (c) X = 2, Y = 18.

5.39 Escriba el programa en pseudocódigo correspondiente al diagrama de flujo de la fig. 5-25.

5.40 ¿En cuáles de los siguiente símbolos de procesamiento pueden intercambiarse los dos enunciados sin cambiar los valores resultantes de las variables?

C = A  
D = B

(a)

C = A  
C = B

(b)

C = A  
D = A

(c)

C = A  
A = B

(d)

C = A  
D = C

(e)

C = A  
A = C

(f)

- 5.41 Encuentre las salidas del siguiente programa en pseudocódigo para las entradas (a)  $A = 15$ ,  $B = 22$ ; (b)  $A = 18$ ,  $B = 7$ ; (c)  $A = 9$ ,  $B = 7$ ; (d)  $A = 2$ ,  $B = 5$ ; (e)  $A = 6$ ,  $B = 3$ .

```

lea A, B
IF A < B
    IF A < 10
        X = A + B
    ELSE
        X = B - A
    ENDIF
ELSEIF B < 5
    X = A × B
ELSEIF A < 15
    X = A2
ELSE
    X = B2
ENDIF
escriba X
FIN

```

- 5.42 Dibuje el diagrama de flujo que corresponde al programa en pseudocódigo en el problema 5.41.

### ESTRUCTURAS DE CICLOS

- 5.43 Con referencia al problema 5.8, dibuje un diagrama de flujo o escriba un programa en pseudocódigo que haga la lista de los estudiantes con puntaje de 90 o más, y que encuentre el número y el porcentaje de estos estudiantes.
- 5.44 Escriba un programa en pseudocódigo usando la estructura DOWHILE que encuentre todas las parejas de enteros positivos  $m$ ,  $n$  tales que

$$m^2 + 2n^2 < 100$$

- 5.45 Dibuje un diagrama de flujo o escriba un programa en pseudocódigo que encuentre el mayor y el menor de 25 números distintos.
- 5.46 Dibuje un diagrama de flujo o escriba un programa en pseudocódigo que encuentre el segundo número más grande de 25 números distintos.
- 5.47 Suponga que  $y$  es la siguiente función de  $t$ :

$$y = 2t^3 - t^2 - 37t + 36$$

Escriba un programa en pseudocódigo del que salga  $y$  que corresponda a cada  $t$  desde  $-5$  hasta  $5$  en pasos de  $0.25$ , y encuentre el máximo y el mínimo de los valores calculados de  $y$ .

- 5.48 Recuerde que  $n!$  (lea:  $n$  factorial) se define para un entero positivo  $n$  por

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times (n-1) \times n$$

Dibuje un diagrama de flujo usando ciclos DO, con entrada  $n$  y salida  $n!$ .

- 5.49 Encuentre el número de iteraciones y el valor del índice  $K$  para cada iteración si un ciclo DO está encabezado por:

- (a) Do K = 1 a 20 de a 3      (c) Do K = 7 a 5 de a 2  
 (b) Do K = 4 a 9 de a 2      (d) Do K = 15 a 10 de a -2



## Respuestas a los problemas suplementarios

- 5.24 (d)
- 5.25 Verdadero
- 5.26 (a) variable, (b) constante
- 5.30 (a)  $X \uparrow 2 + Y \uparrow 2$  (d)  $T \uparrow (N+1)$   
 (b)  $(X+Y) \uparrow 2$  (e)  $X/(Y*Z)$   
 (c)  $2*A*B/(C+D)$  (f)  $(X \uparrow 2 + 2*X*Y - Y \uparrow 2) \uparrow 5$
- 5.31 (a)  $T**(N+1)$ , (b)  $T**N*T$
- 5.32 (a) 27, (b) 16, (c) 11, (d) 16, (e) 48, (f) 15
- 5.33 (a) -5, (b) 23, (c) 307, (d) 59
- 5.34 Lea A, B, C  
 $P = A + B + C$   
 $S = P/2$   
 $AREA = \sqrt{S(S-A)(S-B)(S-C)}$   
 escriba P, AREA  
 FIN
- 5.35 Lea CODIGO, PRECIO  
 IF CODIGO = 1  
   COMISION = 0.03 PRECIO  
 IF COMISION > 300  
   COMISION = 300  
 ENDIF  
 ELSEIF CODIGO = 2  
   COMISION = 0.05 × PRECIO  
 IF COMISION < 75  
   COMISION = 75  
 ENDIF  
 ELSE  
   COMISION = 0.06 × PRECIO  
 ENDIF  
 escriba COMISION  
 FIN
- 5.36 lea LOCAL  
 IF LOCAL > 200  
   COBRO = 14 + 0.04 × (LOCAL - 200)  
 ELSEIF LOCAL > 100  
   COBRO = 8 + 0.06 × (LOCAL - 100)  
 ELSE  
   COBRO = 8  
 ENDIF  
 escriba COBRO  
 FIN
- 5.27 (b), (c), (d), (e), (f), (h), (i)
- 5.28 (c), (d), (f), (h)
- 5.29 (b), (d), (f), (g), (h)
- 5.37 Lea A, B, C  
 IF  $A < B + C$  y  $B < A + C$  y  $C < A + B$   
   escriba 'SI'  
 ELSE  
   escriba 'NO'  
 ENDIF  
 FIN
- 5.38 (a) 55, (b) 60, (c) 63
- 5.39 lea A, B  
 IF  $A < B$   
    $A = A + 2 \times B$   
 IF  $A < 20$   
    $B = B + 10$   
 ELSE  
    $B = B + 5 \times A$   
 ENDIF  
 ELSE  
    $A = A^2 + B$   
    $B = B + 5 \times A$   
 ENDIF  
 escriba A, B  
 FIN
- 5.40 (a), (c)
- 5.41 (a) 7, (b) 49, (c) 81, (d) 7, (e) 18
- 5.42 Véase la figura 5.29

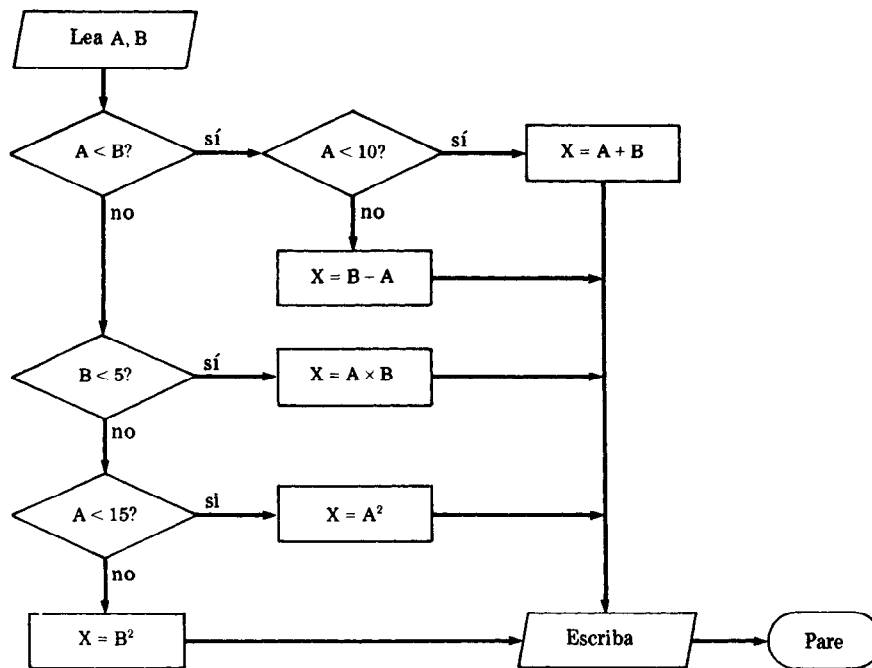


Figura 5-29

5.43 N = 0  
 A = 0  
 lea NOMBRE, PUNTAJE  
 DOUNTIL Fin del Archivo  
 IF PUNTAJE > 90  
 escriba NOMBRE  
 A = A + 1  
 ENDIF  
 N = N + 1  
 lea el próximo NOMBRE, PUNTAJE  
 ENDDO  
 PORCENTAJE = 100 A/N  
 escriba 'EL NUMERO DE ESTUDIANTES ES', A  
 escriba 'EL PORCENTAJE DE ESTUDIANTES ES', PORCENTAJE  
 FIN

5.44 M = 1  
 N = 1  
 DOWHILE M < 9  
 DOWHILE N < 7  
 IF  $M^2 + 2 \times N^2 < 100$   
 escriba M, N  
 ENDIF  
 N = N + 1  
 ENDDO  
 M = M + 1  
 ENDDO  
 FIN

```

5.45 lea GRANDE
    PEQUEÑO = GRANDE
    DO K = 1 a 24
        lea A
        IF GRANDE < A
            GRANDE = A
        ELSEIF A < PEQUEÑO
            PEQUEÑO = A
        ENDIF
        N = N + 1
    ENDDO
    escriba GRANDE, PEQUEÑO
    FIN

```

(Observe que inicializamos tanto GRANDE como PEQUEÑO con el primer número; así que el ciclo da 24 vueltas.)

```

5.46 lea PRIMERO, SEGUNDO
    IF PRIMERO < SEGUNDO
        Intercambie valores en PRIMERO y SEGUNDO
    ENDIF
    DO K = 1 a 23
        lea A
        IF PRIMERO < A
            SEGUNDO = PRIMERO
            PRIMERO = A
        ELSEIF SEGUNDO < A
            SEGUNDO = A
        ENDIF
    ENDDO
    escriba SEGUNDO
    FIN

```

(Observe que PRIMERO y SEGUNDO se inicializaron con los primeros dos números; así que el ciclo da solamente 23 vueltas. La macroinstrucción en la tercera línea podría expandirse como en la fig. 5-24(b).)

```

5.47 T = -5
    MAX =  $2 \times T^3 - T^2 - 37 \times T + 36$ 
    MIN = MAX
    DOWHILE T ≤ 5
        Y =  $2 \times T^3 - T^2 - 37 \times T + 36$ 
        escriba T, Y
        IF MAX < Y
            MAX = Y
        ELSEIF Y < MIN
            MIN = Y
        ENDIF
        T = T + 0.25
    ENDDO
    escriba MIN, MAX
    FIN

```

(Observe que hemos inicializado MAX y MIN con el primer valor de y.)

5.48 Vea la figura 5-30. Observe que inicializamos PRODUCTO con 1.

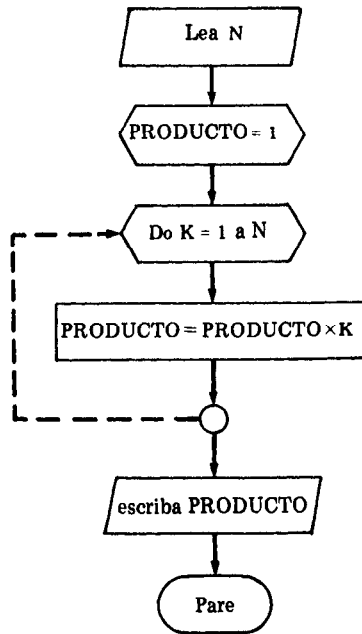


Figura 5-30

- 5.49 (a) Siete veces; para  $K = 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19$ . (b) Tres veces; para  $K = 4, 6, 8$ . (c) O una vez, para  $K = 7$ , o ninguna vez, dependiendo del compilador. (d) Tres veces; para  $K = 15, 13, 11$ .



## Conjuntos y relaciones

### 6.1 INTRODUCCION

El concepto de *conjunto* aparece en toda la matemática. Como veremos, las propiedades de los conjuntos son muy parecidas a las propiedades de las proposiciones (capítulo 4) y a las propiedades de los *circuitos lógicos* (capítulo 7). El capítulo concluye con una investigación sobre relaciones; en particular, sobre las *relaciones de equivalencia* y las funciones.

### 6.2 CONJUNTOS Y ELEMENTOS

Un *conjunto* puede ser considerado como una colección de objetos, los *elementos* o *miembros* del conjunto. Normalmente, usaremos mayúsculas,  $A, B, X, Y, \dots$  para denotar conjuntos, y minúsculas,  $a, b, x, y, \dots$  para denotar elementos de conjuntos. El enunciado “ $p$  es un elemento de  $A$ ”, o, equivalentemente, “ $p$  pertenece a  $A$ ”, se escribe

$$p \in A$$

La negación de  $p \in A$  se escribe  $p \notin A$ .

El hecho de que un conjunto se determine completamente cuando se han especificado sus elementos, es enunciado formalmente como el principio de extensión.

**Principio de extensión:** Dos conjuntos  $A$  y  $B$  son iguales si y solamente si tienen los mismos elementos.

Como siempre, escribimos  $A = B$  si los conjuntos  $A$  y  $B$  son iguales, y escribimos  $A \neq B$  si los conjuntos no son iguales.

Hay esencialmente dos maneras de especificar un conjunto en particular. Una manera, si es posible, es hacer una lista de sus elementos. Por ejemplo,

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

denota el conjunto  $A$  cuyos elementos son las letras  $a, e, i, o, u$ . Observe que los elementos se separan por comas y se encierran entre corchetes. La segunda manera es enunciar la propiedad que caracteriza los elementos del conjunto. Por ejemplo,

$$B = \{x : x \text{ es un entero, } x > 0\}$$

que se lee “ $B$  es el conjunto de las  $x$  tales que  $x$  es un entero y  $x$  es mayor que 0”, denota el conjunto  $B$  cuyos elementos son los enteros positivos. Una letra, generalmente  $x$ , se usa para denotar un elemento típico del conjunto; los dos puntos se leen “tales que” y la coma se lee “y”.

#### EJEMPLO 6.1

(a) El conjunto  $A$  de arriba también se puede escribir como

$$A = \{x : x \text{ es una letra del alfabeto español, } x \text{ es una vocal}\}$$

Observe que  $b \notin A$ ,  $e \in A$  y  $p \notin A$ .

(b) No podríamos hacer una lista de todos los elementos del conjunto  $B$  anterior, aunque frecuentemente especificamos el conjunto escribiendo

$$B = \{1, 2, 3, \dots\}$$

en donde suponemos que todo mundo sabe lo que queremos decir. Observe que  $8 \in B$ , pero  $-6 \notin B$ .

- (c) Sea  $E = \{x : x^2 - 3x + 2 = 0\}$ . En otras palabras,  $E$  consta de aquellos números que son las soluciones de la ecuación  $x^2 - 3x + 2 = 0$ , llamado a veces el *conjunto solución* de la ecuación dada. Como las soluciones de la ecuación son 1 y 2, también podríamos escribir  $E = \{1, 2\}$ .
- (d) Sea  $E = \{x : x^2 - 3x + 2 = 0\}$ ,  $F = \{2, 1\}$  y  $G = \{1, 2, 2, 1, 6/3\}$ . Entonces  $E = F = G$ . Observe que un conjunto no depende de la manera en que se han exhibido sus elementos. Un conjunto permanece igual si se repiten o reordenan sus elementos.

Aunque podamos hacer una lista de los miembros de un conjunto, es posible que hacerlo no resulte práctico. Por ejemplo, no haríamos una lista de los elementos del conjunto de los individuos nacidos en el mundo durante el año 1976 aunque teóricamente es posible hacerlo. Es decir, describimos un conjunto haciendo una lista de sus miembros sólo cuando el conjunto contiene pocos elementos; de otra manera describimos un conjunto por la propiedad que caracteriza a sus miembros.

El hecho de que podamos describir un conjunto en términos de una propiedad se enuncia formalmente como el principio de abstracción.

**Principio de abstracción:** Dado cualquier conjunto  $U$  y cualquier propiedad  $P$ , hay un conjunto  $A$  tal, que los elementos de  $A$  son exactamente aquellos miembros de  $U$  que tienen la propiedad  $P$ .

### 6.3 CONJUNTO UNIVERSAL, CONJUNTO VACÍO

En la aplicación de la teoría de conjuntos, los elementos de todos los conjuntos que se estén investigando generalmente pertenecen a algún conjunto grande fijo llamado *conjunto universal* o *universo de discurso*. Por ejemplo, en la geometría del plano, el conjunto universal consta de todos los puntos en el plano; y en estudios de la población humana el conjunto universal consta de toda la gente del mundo. El símbolo

$$U$$

lo usaremos para denotar el conjunto universal a no ser que se diga o se implique otra cosa.

Para un conjunto  $U$  fijo y una propiedad  $P$ , puede no haber ningún elemento de  $U$  que tenga la propiedad  $P$ . Por ejemplo, el conjunto

$$\{S = x : x \text{ es un entero positivo, } x^2 = 3\}$$

no tiene elementos ya que ningún entero positivo tiene la propiedad requerida.

El conjunto sin elementos se llama *conjunto vacío* y se denota por

$$\emptyset$$

Del principio de extensión, se sigue que hay un solo conjunto vacío. En otras palabras, si  $S$  y  $T$  son ambos vacíos, entonces  $S = T$  ya que tienen exactamente los mismos elementos, o sea, ninguno.

### 6.4 SUBCONJUNTOS

Si cada elemento de un conjunto  $A$  es también elemento de un conjunto  $B$ , entonces  $A$  se llama *subconjunto* de  $B$ . También decimos que  $A$  *está contenido* en  $B$  o que  $B$  *contiene* a  $A$ . Esta relación se escribe

$$A \subset B \quad \text{o} \quad B \supset A$$

Si  $A$  no es un subconjunto de  $B$ , es decir, si por lo menos un elemento de  $A$  no pertenece a  $B$ , escribimos  $A \not\subset B$  o  $B \not\supset A$ .

#### EJEMPLO 6.2

(a) Considere los conjuntos

$$A = \{1, 3, 4, 5, 8, 9\} \quad B = \{1, 2, 3, 5, 7\} \quad C = \{1, 5\}$$

Entonces  $C \subset A$  y  $C \subset B$  ya que 1 y 5, los elementos de  $C$  también son elementos de  $A$  y de  $B$ . Pero  $B \not\subset A$  ya que algunos de sus elementos, por ejemplo 2 y 7, no pertenecen a  $A$ . Además, como los elementos de  $A$ ,  $B$  y  $C$  también tienen que pertenecer al conjunto universal  $U$ , tenemos que  $U$  por lo menos tiene que contener el conjunto  $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$ .

- (b) Algunos conjuntos de números ocurren con mucha frecuencia, así que usamos símbolos especiales para ellos. A no ser que se diga otra cosa, fijaremos

$N$  = el conjunto de los enteros positivos: 1, 2, 3, ...  
 $Z$  = el conjunto de los enteros: ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...  
 $Q$  = el conjunto de los números racionales.  
 $R$  = el conjunto de los números reales

Los conjuntos anteriores se relacionan de la manera siguiente

$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

- (c) El conjunto  $E = \{2, 4, 6\}$  es un subconjunto del conjunto  $F = \{6, 2, 4\}$ , ya que cada número 2, 4 y 6 que pertenece a  $E$  también pertenece a  $F$ . De hecho,  $E = F$ . De una manera análoga se puede demostrar que cada conjunto es subconjunto de sí mismo.

Cada conjunto  $A$  es un subconjunto del conjunto universal  $U$  ya que, por definición, todos los miembros de  $A$  pertenecen a  $U$ . También el conjunto vacío es un subconjunto de  $A$ .

Como se indicó anteriormente, cada conjunto  $A$  es subconjunto de sí mismo ya que, trivialmente, los elementos de  $A$  pertenecen a  $A$ .

Si todo elemento del conjunto  $A$  pertenece al conjunto  $B$ , y todo elemento del conjunto  $B$  pertenece al conjunto  $C$ , entonces claramente todo elemento de  $A$  pertenece a  $C$ . En otras palabras, si  $A \subset B$  y  $B \subset C$  entonces  $A \subset C$ .

Si  $A \subset B$  y  $B \subset A$ , entonces  $A$  y  $B$  tienen los mismos elementos, o sea,  $A = B$ . Recíprocamente, si  $A = B$ , entonces  $A \subset B$  y  $B \subset A$  ya que todo conjunto es subconjunto de sí mismo.

Establecemos los anteriores principios formalmente:

- Teorema 6.1:** (i) Para todo conjunto, se tiene  $\emptyset \subset A \subset U$ .  
 (ii) Para todo conjunto  $A$ , se tiene  $A \subset A$ .  
 (iii) Si  $A \subset B$  y  $B \subset C$ , entonces  $A \subset C$ .  
 (iv)  $A = B$  si y solamente si  $A \subset B$  y  $B \subset A$ .

*Observación:* Si  $A \subset B$ , es posible que  $A = B$ . Algunos autores escriben  $A \subseteq B$  para indicar que  $A$  es subconjunto de  $B$ , y escriben  $A \subset B$  para indicar que  $A$  es subconjunto de  $B$ , pero no igual a  $B$ .

## 6.5 DIAGRAMAS DE VENN

Un *diagrama de Venn* es una representación pictórica de conjuntos por conjuntos de puntos en el plano. El conjunto universal  $U$  se representa por el interior de un rectángulo, y los otros conjuntos se representan por discos contenidos dentro del rectángulo. Si  $A \subset B$ , entonces el disco que representa a  $A$  estará completamente dentro del disco que representa a  $B$  como en la fig. 6-1(a). Si  $A$  y  $B$  son disyuntos, o sea, si no tienen ningún elemento en común, enton-

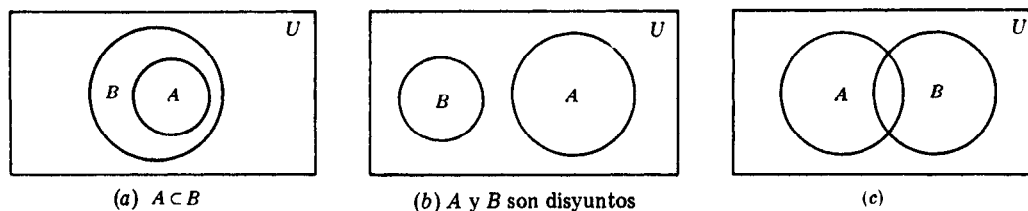


Figura 6-1

ces el disco que representa a  $A$  quedará separado del disco que representa a  $B$ , como en la fig. 6-1(b).

Sin embargo, si  $A$  y  $B$  son dos conjuntos arbitrarios, es posible que algunos elementos estén en  $A$ , pero no en  $B$ ; algunos estén en  $B$ , pero no en  $A$ ; algunos estén en ambos, y algunos no estén ni en  $A$  ni en  $B$ ; así que en general representamos a  $A$  y a  $B$  como en la fig. 6-1(c).

Muchos enunciados verbales se pueden traducir en enunciados equivalentes sobre conjuntos que se pueden describir por medio de diagramas de Venn. Así, muchas veces se puede usar un diagrama de Venn para determinar si un argumento es válido (sec. 4.9).

**EJEMPLO 6.3** Examine el siguiente argumento adaptado de un libro de lógica de Lewis Carroll, el autor de *Alicia en el país de las Maravillas*:

$S_1$ : Mis ollas son las únicas cosas que tengo de lata.

$S_2$ : Encuentro que todos tus regalos son muy útiles.

$S_3$ : Ninguna de mis ollas sirve para nada.

.....

$S$ : Los regalos que me haces no son de lata.

Por  $S_1$ , los objetos de lata están contenidos en el conjunto de ollas, así que dibuje el diagrama de Venn en la fig. 6-2.



Figura 6-2

Por  $S_3$ , el conjunto de ollas y el conjunto de objetos útiles son disyuntos; así que dibuje la fig. 6-3.



Figura 6-3

Por  $S_2$ , el conjunto de "tus regalos" es un subconjunto del conjunto de objetos útiles; así que dibuje la fig. 6-4.



Figura 6-4

De acuerdo con la fig. 6-4, la conclusión  $S$  se sigue de las premisas, porque el conjunto de "tus regalos" es disjunto del conjunto de los objetos de lata. El argumento dado es por lo tanto válido.

## 6.6 UNION E INTERSECCION

La *unión* de dos conjuntos  $A$  y  $B$ , denotada por  $A \cup B$ , es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a  $A$  o a  $B$ :

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}$$

Aquí “o” se usa en el sentido de y/o. La fig. 6-5(a) es un diagrama de Venn en el cual  $A \cup B$  está sombreado.

La *intersección* de dos conjuntos  $A$  y  $B$ , denotada  $A \cap B$ , es el conjunto de elementos que pertenecen tanto a  $A$  como a  $B$ :

$$A \cap B = \{x : x \in A, x \in B\}$$

La fig. 6-5(b) es un diagrama de Venn en el cual  $A \cap B$  está sombreado.

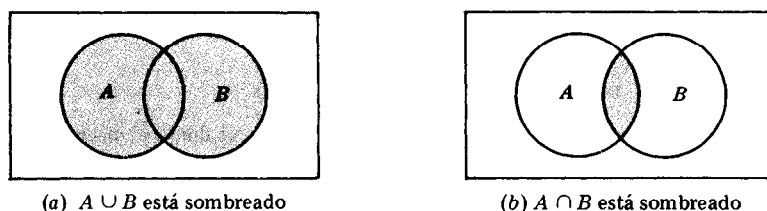


Figura 6-5

### EJEMPLO 6.4

(a) Sea  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ ,  $C = \{2, 3, 5, 7\}$ . Entonces

$$\begin{array}{ll} A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} & A \cap B = \{3, 4\} \\ A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\} & A \cap C = \{2, 3\} \\ B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\} & B \cap C = \{3, 5, 7\} \end{array}$$

(b) Sea  $H$  el conjunto de los estudiantes hombres de una universidad  $C$ , y sea  $M$  el conjunto de los estudiantes mujeres de  $C$ . Entonces

$$H \cup M = C$$

ya que cada estudiante de  $C$  pertenece a  $H$  o a  $M$ . Por otra parte,

$$H \cap M = \emptyset$$

ya que ningún estudiante pertenece a  $H$  y a  $M$ .

La operación de inclusión de conjuntos está íntimamente relacionada con las operaciones de unión e intersección, como se muestra en el siguiente teorema.

**Teorema 6.2:** Los siguientes enunciados son equivalentes:  $A \subset B$ ,  $A \cap B = A$ ,  $A \cup B = B$ .

## 6.7 COMPLEMENTOS

Recuerde que todos los conjuntos bajo consideración en un momento particular, son subconjuntos de un conjunto universal fijo  $U$ . El *complemento absoluto* o, sencillamente, *complemento* de un conjunto  $A$ , denotado por  $A^c$ , es el conjunto de elementos que pertenecen a  $U$ , pero que no pertenecen a  $A$ :

$$A^c = \{x : x \in U, x \notin A\}$$

Algunos textos denotan al complemento de  $A$  por  $A'$  o  $\bar{A}$ . La fig. 6-6(a) es un diagrama de Venn, en el cual  $A^c$  ha sido sombreado.

El *complemento relativo* de un conjunto  $B$  con respecto a un conjunto  $A$  o, sencillamente la *diferencia* de  $A$  y  $B$ , denotada por  $A \setminus B$ , es el conjunto de elementos que pertenecen a  $A$ , pero que no pertenecen a  $B$ :

$$A \setminus B = \{x : x \in A, x \notin B\}$$

El conjunto  $A \setminus B$  se lee “ $A$  menos  $B$ ”. Muchos textos denotan  $A \setminus B$  por  $A - B$  o  $A \sim B$ . La fig. 6-6(b) es un diagrama de Venn en el cual  $A \setminus B$  está sombreado.

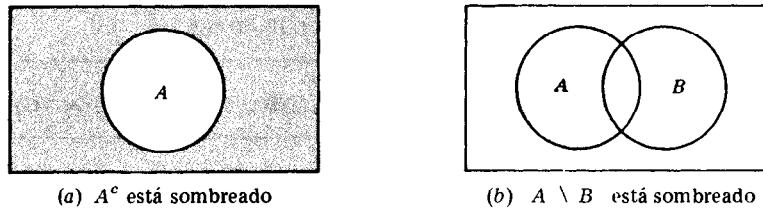


Figura 6-6

**EJEMPLO 6.5**

- (a) Tomemos a  $U = \{1, 2, 3, \dots\}$ , los enteros positivos, como conjunto universal. Sean  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  y  $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ , y  $E = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ , los números pares. Entonces

$$A^c = \{5, 6, 7, 8, \dots\} \quad B^c = \{1, 2, 8, 9, 10, \dots\}$$

y  $E^c = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ , los números impares.

- (b) Demostramos por medio de los diagramas de Venn que el complemento de la unión de dos conjuntos,  $A$  y  $B$ , es igual a la intersección de los complementos de  $A$  y de  $B$ ; es decir,

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

Del diagrama de Venn para  $A \cup B$ , en la fig. 6-5(a), vemos que  $(A \cup B)^c$  está representado por el área sombreada en la fig. 6-7(a). Para encontrar  $A^c \cap B^c$ , sombreamos  $A^c$  con líneas en una dirección y  $B^c$  con líneas en otra dirección, tal como en la fig. 6-7(b). Entonces  $A^c \cap B^c$  está representado por el área con líneas cruzadas que está sombreada en la fig. 6-7(c). Como  $(A \cup B)^c$  y  $A^c \cap B^c$  están representados por la misma área, son iguales. Esta propiedad de los conjuntos se llama *ley de DeMorgan*.

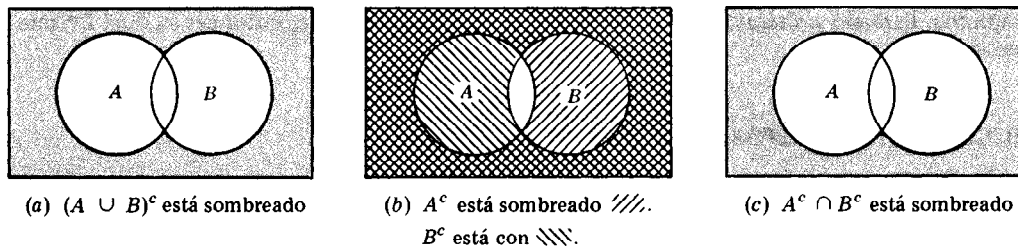


Figura 6-7

**6.8 ALGEBRA DE CONJUNTOS; DUALIDAD**

Los conjuntos, bajo las anteriores operaciones de unión, intersección, y complemento, satisfacen las leyes enumeradas en la tabla 6-1. Observe la similaridad entre estas leyes y las del álgebra de proposiciones enumeradas en la tabla 4-1, una similaridad basada en la analogía entre las operaciones entre conjuntos  $\cup$ ,  $\cap$ , y complemento, y las conectivas lógicas  $\vee$ ,  $\wedge$ , y la negación.

Tabla 6-1 Leyes del Álgebra de Conjuntos

<b>Leyes de idempotencia</b>	
1a. $A \cup A = A$	1b. $A \cap A = A$
<b>Leyes asociativas</b>	
2a. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	2b. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
<b>Leyes conmutativas</b>	
3a. $A \cup B = B \cup A$	3b. $A \cap B = B \cap A$
<b>Leyes distributivas</b>	
4a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	4b. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
<b>Leyes de identidad</b>	
5a. $A \cup \emptyset = A$	5b. $A \cap U = A$
6a. $A \cup U = U$	6b. $A \cap \emptyset = \emptyset$
<b>Leyes de involución</b>	
7. $(A')' = A$	
<b>Leyes de complemento</b>	
8a. $A \cup A' = U$	8b. $A \cap A' = \emptyset$
9a. $U' = \emptyset$	9b. $\emptyset' = U$
<b>Leyes de DeMorgan</b>	
10a. $(A \cup B)' = A' \cap B'$	10b. $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Probablemente el lector se haya preguntado por qué las identidades de la tabla 6-1 vienen por parejas, como por ejemplo, 2a y 2b. Consideremos ahora el principio que sustenta este arreglo. Supongamos que  $E$  es una identidad del álgebra de conjuntos. El dual  $E^*$  de  $E$  es la expresión obtenida al reemplazar cada ocurrencia de  $\cup$ ,  $\cap$ ,  $U$  y  $\emptyset$  en  $E$  por  $\cap$ ,  $\cup$ ,  $\emptyset$  y  $U$  respectivamente. Por ejemplo, el dual de

$$(U \cap A) \cup (B \cap A) = A \quad \text{es} \quad (\emptyset \cup A) \cap (B \cup A) = A$$

Observe que la pareja de leyes de la tabla 6-1 son duales entre sí. Es un hecho del álgebra de conjuntos, llamado *principio de dualidad*, que si  $E$  es una identidad, entonces su dual  $E^*$  también es una identidad.

## 6.9 CONJUNTOS FINITOS, PRINCIPIO DE CONTEO

Se dice que un conjunto es *finito* si contiene exactamente  $m$  elementos diferentes en donde  $m$  denota algún entero no negativo. En caso contrario, se dice que el conjunto es *infinito*. Por ejemplo, el conjunto vacío y el conjunto de letras en el alfabeto español son finitos, mientras que el conjunto de los enteros positivos pares,  $\{2, 4, 6, \dots\}$ , es infinito.

Si un conjunto  $A$  es finito,  $n(A)$  denotará el número de elementos de  $A$ . Algunos textos usan  $\#(A)$  en lugar de  $n(A)$ .

**Lema:** Si  $A$  y  $B$  son conjuntos finitos disyuntos, entonces  $A \cup B$  es finito y

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

*Demostración:* Al contar los elementos de  $A \cup B$ , primero contamos los que están en  $A$ . Hay  $n(A)$  de éstos. Los únicos otros elementos de  $A \cup B$  son los que están en  $B$ , pero no en  $A$ . Pero como  $A$  y  $B$  son disyuntos, ningún elemento de  $B$  está en  $A$ , de modo que hay  $n(B)$  elementos que están en  $B$ , pero no en  $A$ . Por lo tanto,  $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ .

También tenemos una fórmula para  $n(A \cup B)$ , aunque  $A$  y  $B$  no sean disjuntos.

**Teorema 6.3:** Si  $A$  y  $B$  son conjuntos finitos, entonces  $A \cup B$  y  $A \cap B$  son finitos y

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Podemos aplicar este resultado para obtener una fórmula semejante para cualquier número finito,  $k$ , de conjuntos finitos. Así, para  $k = 3$ , tenemos

**Corolario 6.4:** Si  $A$ ,  $B$  y  $C$  son conjuntos finitos, entonces también lo es  $A \cup B \cup C$ , y

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

**EJEMPLO 6.6** Supongamos que 100 de los 120 estudiantes de matemáticas de una facultad toman por lo menos un idioma entre, francés, alemán y ruso. Suponga también que:

65 estudian francés  
45 estudian alemán  
42 estudian ruso  
20 estudian francés y alemán  
25 estudian francés y ruso  
15 estudian alemán y ruso

Sean  $F$ ,  $A$  y  $R$  los conjuntos de estudiantes que estudian francés, alemán y ruso, respectivamente. Queremos encontrar el número de estudiantes que estudian todos los tres idiomas, y encontrar el número correcto de estudiantes en cada una de las ocho regiones del diagrama de Venn en la fig. 6-8(a).

Por el corolario 6.4,

$$n(F \cup A \cup R) = n(F) + n(A) + n(R) - n(F \cap A) - n(F \cap R) - n(A \cap R) + n(F \cap A \cap R)$$

Ahora,  $n(F \cup A \cup R) = 100$ , ya que 100 de los estudiantes estudian por lo menos uno de los idiomas. Sustituyendo,

$$100 = 65 + 45 + 42 - 20 - 25 - 15 + n(F \cap A \cap R)$$

y por lo tanto,  $n(F \cap A \cap R) = 8$ , o sea que 8 estudiantes estudian todos los tres idiomas.

Usamos ahora este resultado para llenar el diagrama de Venn. Tenemos:

8 estudian todos los tres idiomas  
 $20 - 8 = 12$  estudian francés y alemán pero no ruso  
 $25 - 8 = 17$  estudian francés y ruso pero no alemán  
 $15 - 8 = 7$  estudian alemán y ruso pero no francés  
 $65 - 12 - 8 - 17 = 28$  estudian solamente francés  
 $45 - 12 - 8 - 7 = 18$  estudian solamente alemán  
 $42 - 17 - 8 - 7 = 10$  estudian solamente ruso  
 $120 - 100 = 20$  no estudian ninguno de los idiomas

Así el diagrama completo está en la fig. 6-8(b). Observe que

$$28 + 18 + 10 = 56$$

estudiantes estudian exactamente uno de los tres idiomas.

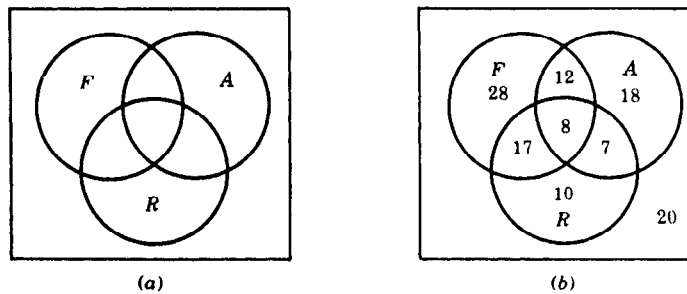


Figura 6-8



## 6.10 CLASES DE CONJUNTOS, CONJUNTO POTENCIA, PARTICIONES

Dado un conjunto  $S$ , podemos hablar de algunos de sus subconjuntos. Así, estaríamos considerando un conjunto de conjuntos. Cada vez que se presente esta situación, para evitar confusiones hablaremos de una *clase* de conjuntos o una *colección* de conjuntos en lugar de un conjunto de conjuntos. Si queremos considerar algunos de los conjuntos en una clase dada de conjuntos, hablaremos entonces de una *subclase* o de una *subcolección*.

**EJEMPLC 6.7** Supongamos que  $S = \{1, 2, 3, 4\}$ . Sea  $\mathcal{A}$  la clase de los subconjuntos de  $S$  que contienen exactamente tres elementos de  $S$ . Entonces

$$\mathcal{A} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$$

Los elementos de  $\mathcal{A}$  son los conjuntos  $\{1, 2, 3\}$ ,  $\{1, 2, 4\}$ ,  $\{1, 3, 4\}$ , y  $\{2, 3, 4\}$ .

Sea  $\mathcal{B}$  la clase de los subconjuntos de  $S$  que contienen el número 2 y otros dos elementos más de  $S$ . Entonces

$$\mathcal{B} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$$

Los elementos de  $\mathcal{B}$  son los conjuntos  $\{1, 2, 3\}$ ,  $\{1, 2, 4\}$  y  $\{2, 3, 4\}$ . Así  $\mathcal{B}$  es una subclase de  $\mathcal{A}$ , ya que todo elemento de  $\mathcal{B}$  es también elemento de  $\mathcal{A}$ . (Para evitar confusiones, a veces encerramos los conjuntos de una clase entre paréntesis cuadrados en lugar de corchetes.)

Para un conjunto dado  $S$ , a veces hablamos de la colección de todos los subconjuntos de  $S$ . Esta colección se llama “conjunto potencia” de  $S$ , y se denota por  $\mathcal{P}(S)$ . Por ejemplo, si  $S = \{1, 2, 3\}$ , entonces

$$\mathcal{P}(S) = [\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, S]$$

Observe que el conjunto vacío  $\emptyset$  pertenece a  $\mathcal{P}(S)$ , ya que  $\emptyset$  es un subconjunto de  $S$ . Análogamente,  $S$  pertenece a  $\mathcal{P}(S)$ . Observe también que  $\mathcal{P}(S)$  tiene  $2^3 = 8$  elementos. Esto es cierto en general; o sea, si  $S$  es finito entonces  $\mathcal{P}(S)$  tiene

$$2^{n(S)}$$

elementos. Por esta razón el conjunto potencia de  $S$  a veces se denota por  $2^S$ .

Ahora sea  $S$  un conjunto no vacío. Una *partición* de  $S$  es una subdivisión de  $S$  en subconjuntos no vacíos que no se traslapen\*. De manera precisa, una *partición* de  $S$  es una colección  $\{A_i\}$  de subconjuntos no vacíos de  $S$ , tales que:

- (i) Cada  $a$  en  $S$  pertenece a uno de los  $A_i$ .
- (ii) Los conjuntos de  $\{A_i\}$  son mutuamente disyuntos; o sea, si

$$A_i \neq A_j \text{ entonces } A_i \cap A_j = \emptyset.$$

Los subconjuntos en una partición se llaman *células*. La fig. 6-9 es un diagrama de Venn de una partición del conjunto rectangular  $S$  en cinco células  $A_1, A_2, A_3, A_4$  y  $A_5$ .

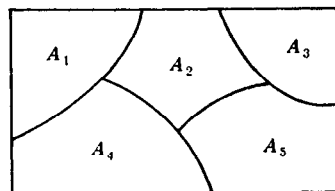


Figura 6-9

**EJEMPLO 6.8** Considere las siguientes colecciones de subconjuntos de  $S = \{1, 2, \dots, 8, 9\}$ :

- (i)  $\{\{1, 3, 5\}, \{2, 6\}, \{4, 8, 9\}\}$
- (ii)  $\{\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6, 8\}, \{5, 7, 9\}\}$
- (iii)  $\{\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6, 8\}, \{7, 9\}\}$

Entonces (i) no es una partición de  $S$ , ya que 7 no pertenece a ninguno de los subconjuntos. Aún más, (ii) no es partición de  $S$ , ya que  $\{1, 3, 5\}$  y  $\{5, 7, 9\}$  no son disyuntos. Por otra parte, (iii) es una partición de  $S$ .

\* Es decir, disyuntos dos a dos. (N. del T.)

## 6.11 PAREJAS ORDENADAS, CONJUNTOS PRODUCTO

El orden de los elementos en un conjunto con dos elementos no interesa, por ejemplo

$$\{3, 5\} = \{5, 3\}$$

Por otra parte, una *pareja ordenada* consiste en dos elementos, de los cuales uno designa el primer elemento, y el otro, el segundo. Tal pareja ordenada se escribe  $(a, b)$ , en donde  $a$  es el primer elemento y  $b$  es el segundo. Dos parejas ordenadas  $(a, b)$  y  $(c, d)$  son iguales si y solamente si  $a = c$  y  $b = d$ .

Considere dos conjuntos arbitrarios  $A$  y  $B$ . El conjunto de todas las parejas ordenadas  $(a, b)$  en donde  $a \in A$  y  $b \in B$  se llama *producto*, o *producto cartesiano*, de  $A$  y  $B$ . Una denominación corta para este producto es  $A \times B$ , que se lee “ $A$  cruz  $B$ ”. Por definición

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

Frecuentemente se escribe  $A^2$  en lugar de  $A \times A$ .

## EJEMPLO 6.9

(a)  $\mathbb{R}$  denota el conjunto de los números reales, y por lo tanto  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  es el conjunto de parejas ordenadas de números reales. El lector está familiarizado con la representación geométrica de  $\mathbb{R}^2$  por medio de puntos en el plano, tal como en la fig. 6-10. Aquí, cada punto  $P$  representa una pareja ordenada  $(a, b)$  de números reales y viceversa; la línea vertical a través de  $P$  encuentra el eje  $x$  en  $a$ , y la línea horizontal a través de  $P$  encuentra el eje  $y$  en  $b$ .  $\mathbb{R}^2$  se llama frecuentemente *plano cartesiano*.

(b) Sea  $A = \{1, 2, 3\}$  y  $B = \{a, b\}$ . Entonces

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

Como  $A$  y  $B$  no contienen muchos elementos, es posible representar a  $A \times B$  por un diagrama de coordenadas, como se muestra en la fig. 6-11. Aquí, las verticales a través de los puntos de  $A$  y las horizontales a través de los puntos de  $B$  encuentran los 6 puntos que representan a  $A \times B$  de la manera obvia. El punto  $P$  es la pareja ordenada  $(2, b)$ .

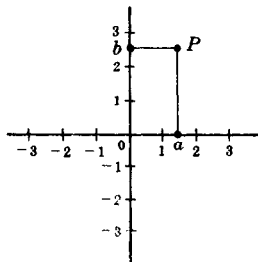


Figura 6-10

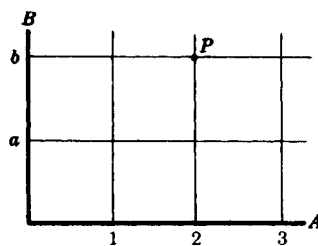


Figura 6-11

Observe en el ejemplo 6.9(b) que

$$n(A \times B) = 6 = 2 \cdot 3 = n(A) \cdot n(B)$$

en donde  $n(A)$  = número de elementos de  $A$ . En efecto,  $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$  para conjuntos finitos cualesquiera  $A$  y  $B$ . Esto se sigue de la observación de que, para una pareja ordenada  $(a, b)$  en  $A \times B$ , hay  $n(A)$  posibilidades para  $a$ , y para cada uno de éstas hay  $n(B)$  posibilidades para  $b$ . En particular, si  $A$  o  $B$  es vacío, entonces  $A \times B$  es vacío.

Se puede extender la idea de un producto de conjuntos a cualquier número finito de conjuntos. Para conjuntos cualesquiera  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , el conjunto de todas las  $n$ -plas ordenadas  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , en donde  $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n$ , se llama el *producto* de los conjuntos  $A_1, \dots, A_n$  y se denota por

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \quad \text{o} \quad \prod_{i=1}^n A_i$$

Así como escribimos  $A^2$  en lugar de  $A \times A$ , también escribimos  $A^n$  en lugar de  $A \times A \times \dots \times A$ , en donde hay  $n$  factores todos iguales a  $A$ . Por ejemplo,  $\mathbf{R}^3 = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$  denota el espacio tridimensional usual.

## 6.12 RELACIONES

Sean  $A$  y  $B$  conjuntos. Una *relación binaria*,  $R$ , de  $A$  en  $B$  asigna a cada pareja ordenada  $(a, b)$  en  $A \times B$  exactamente uno de los siguientes enunciados:

- (i) “ $a$  está relacionado con  $b$ ”, escrito  $a R b$
- (ii) “ $a$  no está relacionado con  $b$ ”, escrito  $a \nabla b$

Una relación de un conjunto  $A$  en el mismo conjunto  $A$  se llama *relación en  $A$* .

Como vamos a tratar principalmente relaciones binarias, la palabra “relación” significará relación binaria a no ser que se diga otra cosa.

### EJEMPLO 6.10

- (a) La inclusión de conjuntos es una relación en cualquier clase de conjuntos. Ya que, dada una pareja cualquiera de conjuntos  $A$  y  $B$ ,  $A \subset B$  o  $A \not\subset B$ .
- (b) El matrimonio es una relación del conjunto  $H$  de hombres en el conjunto  $M$  de mujeres. Ya que, dado cualquier hombre  $h \in H$  y cualquier mujer  $m \in M$ ,  $h$  está casado con  $m$  o  $h$  no está casado con  $m$ .
- (c) El orden, simbolizado por “ $<$ ”, o equivalentemente, el enunciado “ $x$  es menor que  $y$ ”, es una relación en cualquier conjunto de números reales. Ya que, dada cualquier pareja ordenada  $(a, b)$  de números reales

$$a < b \quad \text{o} \quad a \nless b$$

- (d) Una relación familiar en el conjunto  $Z$  de enteros es “ $m$  divide a  $n$ ”. Una notación común para esta relación es escribir  $m \mid n$  cuando  $m$  divide a  $n$ . Así  $6 \mid 30$  pero  $7 \nmid 25$ .
- (e) La perpendicularidad es una relación en el conjunto de las rectas en el plano. Ya que, dada cualquier pareja de rectas  $a$  y  $b$ ,  $a$  es perpendicular a  $b$  o  $a$  no es perpendicular a  $b$ .

Cualquier relación  $R$  de un conjunto  $A$  en un conjunto  $B$  define de una manera única un subconjunto  $R^*$  de  $A \times B$  como sigue:

$$R^* = \{(a, b) : a \text{ está relacionado con } b\} = \{(a, b) : a R b\}$$

Recíprocamente, cualquier subconjunto  $R^*$  de  $A \times B$  define unívocamente una relación  $R$  de  $A$  en  $B$  de la siguiente manera:

$$a R b \text{ siempre y cuando } (a, b) \in R^*$$

En vista de esta correspondencia uno-a-uno entre relaciones  $R$  de  $A$  en  $B$  y subconjuntos de  $A \times B$ , redefinimos una relación como sigue:

**Definición:** Una relación  $R$  de  $A$  en  $B$  es un subconjunto de  $A \times B$ .

El *dominio* de una relación  $R$  es el conjunto de todos los primeros elementos de las parejas ordenadas que pertenecen a  $R$ , y el recorrido de  $R$  es el conjunto de todos los segundos elementos.

### EJEMPLO 6.11

- (a) Sea  $A = \{1, 2, 3\}$ , y  $R = \{(1, 2), (1, 3), (3, 2)\}$ . Entonces  $R$  es una relación en  $A$ , ya que es un subconjunto de  $A \times A$ . Con respecto a esta relación,

$$1 R 2, 1 R 3, 3 R 2, \text{ pero } 1 \nabla 1, 2 \nabla 1, 2 \nabla 2, 2 \nabla 3, 3 \nabla 1, 3 \nabla 3$$

El dominio de  $R$  es  $\{1, 3\}$  y el recorrido de  $R$  es  $\{2, 3\}$ .

- (b) Sea  $A = \{\text{huevos, leche, maíz}\}$  y  $B = \{\text{vacas, cabras, gallinas}\}$ . Podemos definir una relación  $R$  de  $A$  en  $B$  por  $(a, b) \in R$  si  $a$  es producido por  $b$ . En otras palabras,

$$R = \{(\text{huevos, gallinas}), (\text{leche, vacas}), (\text{leche, cabras})\}$$

Con respecto a esta relación  
huevos  $R$  gallinas, leche  $R$  vacas, etc.

- (c) Supongamos que decimos que dos países son adyacentes si tienen alguna parte de sus fronteras en común. Entonces “es adyacente” es una relación  $R$  en el conjunto de los países de la tierra. Así  $(\text{Italia, Suiza}) \in R$  pero  $(\text{Canadá, México}) \notin R$
- (d) Sea  $A$  cualquier conjunto. Una relación importante en  $A$  es la *igualdad*,

$$\{(a, a) : a \in A\}$$

que usualmente se denota por “ $=$ ”. Esta relación también se llama *relación de identidad* en  $A$ .

- (e) De nuevo, sea  $A$  cualquier conjunto. Entonces  $A \times A$  y el conjunto vacío  $\emptyset$  también son relaciones en  $A$ , ya que son subconjuntos de  $A \times A$ . Se llaman *relación universal* y *relación vacía*, respectivamente.

Sea  $R$  una relación de  $A$  en  $B$ . El inverso de  $R$ , denotado por  $R^{-1}$ , es la relación de  $B$  en  $A$ , que consta de aquellas parejas ordenadas que, cuando son invertidas, pertenecen a  $R$ :

$$R^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in R\}$$

Por ejemplo, el inverso de la relación  $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$  en  $A = \{1, 2, 3\}$  es

$$R^{-1} = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$$

(también en  $A$ ). Claramente, si  $R$  es cualquier relación, entonces  $(R^{-1})^{-1} = R$ . También, el dominio de  $R^{-1}$  es igual al dominio de  $R$ .

### 6.13 REPRESENTACIONES GRAFICAS DE RELACIONES

Consideramos una relación  $S$  en el conjunto  $R$  de los números reales, es decir,  $S$  es un subconjunto de  $R^2 = R \times R$ . Como  $R^2$  se puede representar por un conjunto de puntos en el plano, podemos visualizar  $S$  destacando aquellos puntos en el plano que pertenecen a  $S$ . La representación gráfica de esta relación a veces se llama *gráfica* de la relación.

Frecuentemente, la relación  $S$  consta de todas las parejas ordenadas de números reales que satisfacen alguna ecuación dada

$$E(x, y) = 0$$

Por lo general, identificamos la relación con la ecuación, es decir, hablamos de “la relación  $E(x, y) = 0$ ”. Por ejemplo, considere la ecuación  $x^2 + y^2 = 25$ . La relación consta de todas las parejas ordenadas  $(x, y)$  que satisfagan la ecuación. La gráfica de la relación es el círculo centrado en el origen y con radio 5, que está dibujado en la fig. 6-12.

Luego consideramos una relación  $R$  de  $A$  en  $B$ , en donde  $A$  y  $B$  son conjuntos finitos. Hay muchas maneras de visualizar tales relaciones:

- (1) Dibuje el diagrama de coordenadas de  $A \times B$ , tal como en la fig. 6-11.

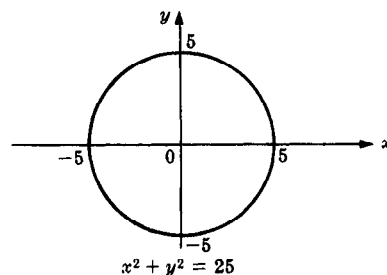


Figura 6-12

- (2) Forme un arreglo rectangular cuyas filas sean rotuladas por los elementos de  $A$ , y cuyas columnas sean rotuladas por los elementos de  $B$ . Escriba un 1 o un 0 en cada posición del arreglo, según que  $a \in A$  esté o no esté relacionado con  $b \in B$ . Este arreglo se llama *matriz* de la relación.
- (3) Escriba los elementos de  $A$  y los elementos de  $B$  en dos discos disyuntos, y luego dibuje una flecha de  $a \in A$  en  $b \in B$  cada vez que  $a$  esté relacionado con  $b$ . Esta representación se llama *diagrama de flechas* de la relación.

**EJEMPLO 6.12**

(a) Sea  $R$  la siguiente relación de  $A = \{1, 2, 3\}$  en  $B = \{a, b\}$ :

$$R = \{(1, a), (1, b), (3, a)\}$$

La figura 6-13 representa esta relación de las tres maneras anteriores.

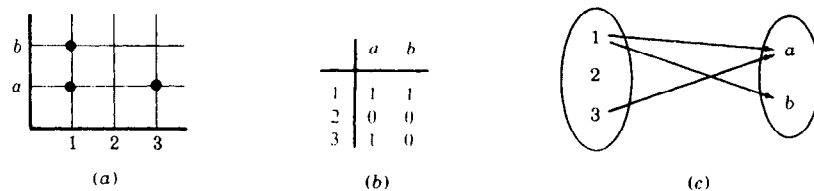


Figura 6-13

(b) La figura 6-14 representa la relación del ejemplo 6.11(b) de las tres maneras.

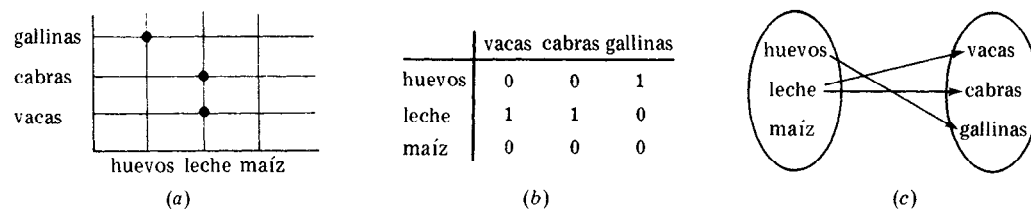


Figura 6-14

Hay otra manera de visualizar una relación cuando es un conjunto finito en sí mismo. Escribimos los elementos del conjunto y luego dibujamos una flecha de un elemento  $x$  en un elemento  $y$  cada vez que  $x$  se relacione con  $y$ . Este diagrama se llama *grafo dirigido* de la relación. La fig. 6-15 da el grafo dirigido de la siguiente relación  $R$  en el conjunto  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ :

$$R = \{(1, 2), (2, 2), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 3)\}$$

Observe que hay una flecha de 2 en el mismo, ya que 2 está relacionado con 2 según  $R$ .

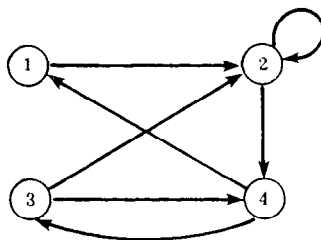


Figura 6-15

### 6.14 RELACIONES DE EQUIVALENCIA

Una relación  $\sim$  en un conjunto  $S$  se llama *relación de equivalencia* si tiene las siguientes tres propiedades:

- (1) Para cada  $a$  en  $S$ , tenemos  $a \sim a$ .
- (2) Si  $a \sim b$ , entonces  $b \sim a$ .
- (3) Si  $a \sim b$  y  $b \sim c$ , entonces  $a \sim c$ .

La primera propiedad se llama *reflexiva*; la segunda, *simétrica*, y la tercera, *transitiva*. Así que una relación en un conjunto es una relación de equivalencia si es reflexiva, simétrica y transitiva.

La idea general detrás de una relación de equivalencia es que ésta nos da una clasificación de objetos que son de alguna manera “similares”. De hecho, la relación = de igualdad en cualquier conjunto  $S$  es una relación de equivalencia; es decir, (1)  $a = a$  para cada  $a$  en  $S$ ; (2) si  $a = b$ , entonces  $b = a$ ; y (3) si  $a = b$  y  $b = c$ , entonces  $a = c$ . Veamos otras relaciones de equivalencia.

#### EJEMPLO 6.13

- (a) Considere el conjunto  $L$  de rectas y el conjunto  $T$  de triángulos en el plano Euclideo. La relación “es paralelo a o idéntica a” es una relación de equivalencia en  $L$ , y la congruencia y la similaridad son relaciones de equivalencia en  $T$ .
- (b) La clasificación de animales por especies, es decir, la relación “es de la misma especie que”, es una relación de equivalencia en el conjunto de los animales.
- (c) La relación  $\subset$  de inclusión entre conjuntos no es una relación de equivalencia. Es reflexiva y transitiva, pero no es simétrica ya que  $A \subset B$  no implica que  $B \subset A$ .
- (d) Sea  $m$  un entero positivo fijo. Dos enteros  $a$  y  $b$  se dice que son congruentes módulo  $m$ , escrito

$$a \equiv b \pmod{m}$$

si  $m$  divide a  $a - b$ . Por ejemplo, para  $m = 4$  tenemos  $11 \equiv 3 \pmod{4}$  ya que 4 divide a  $11 - 3$ , y  $22 \equiv 6 \pmod{4}$  ya que 4 divide a  $22 - 6$ . Esta relación de congruencia módulo  $m$  es una relación de equivalencia.

Suponga que  $\sim$  es una relación de equivalencia en un conjunto  $S$ . Para cada  $a$  en  $S$ , sea  $[a]$  el conjunto de los elementos que están relacionados con  $a$ :

$$[a] = \{x : a \sim x\}$$

Llamamos a  $[a]$  la clase de equivalencia de  $a$  en  $S$ . La colección de todas las clases de equivalencia de elementos de  $S$ , denotado por  $S/\sim$ , se llama *conjunto cociente* de  $S$  por  $\sim$ . La propiedad fundamental de un conjunto cociente está contenida en el siguiente teorema.

**Teorema 6.5:** Sea  $\sim$  una relación de equivalencia en un conjunto  $S$ . Entonces el conjunto cociente  $S/\sim$  es una partición de  $S$ . Específicamente:

- (i) Para cada  $a$  en  $S$  tenemos  $a \in [a]$ .
- (ii)  $[a] = [b]$  si y solamente si  $a \sim b$ .
- (iii) Si  $[a] \neq [b]$ , entonces  $[a]$  y  $[b]$  son disyuntos.

#### EJEMPLO 6.14

- (a) Sea  $S = \{1, 2, 3\}$ . La relación

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 3)\}$$

es una relación de equivalencia en  $S$ . Bajo la relación  $R$ ,

$$[1] = \{1, 2\}, \quad [2] = \{1, 2\} \quad \text{y} \quad [3] = \{3\}$$

Observe que  $[1] = [2]$  y  $[1], [3]$  es una partición de  $S$ .

- (b) Sea  $R_5$  la relación en  $Z$ , el conjunto de enteros, definida por

$$x \equiv y \pmod{5}$$

[Véase el ejemplo 6.13(d)]. Hay exactamente cinco clases de equivalencia distintas en  $\mathbb{Z}/R_5$ :

$$A_0 = \{\dots, -10, -5, 0, 5, 10, \dots\}$$

$$A_1 = \{\dots, -9, -4, 1, 6, 11, \dots\}$$

$$A_2 = \{\dots, -8, -3, 2, 7, 12, \dots\}$$

$$A_3 = \{\dots, -7, -2, 3, 8, 13, \dots\}$$

$$A_4 = \{\dots, -6, -1, 4, 9, 14, \dots\}$$

Observe que cada entero  $x$ , que se puede expresar unívocamente de la forma  $x = 5q + r$  en donde  $0 \leq r \leq 5$ , es un miembro de la clase de equivalencia  $A_r$ , en donde  $r$  es el residuo. Observe que las clases de equivalencia son disjuntas por parejas y que

$$\mathbb{Z} = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$$

## 6.15 FUNCIONES

Supongamos que a cada elemento de un conjunto  $A$  se le asigna un único elemento de un conjunto  $B$ ; la colección de tales asignaciones se llama *función* de  $A$  en  $B$ . El conjunto  $A$  se llama *dominio* de la función, y al conjunto  $B$  se le llama *codominio*.

Generalmente se usa un símbolo para denotar una función. Por ejemplo, sea  $f$  una función de  $A$  en  $B$ . Entonces escribimos

$$f : A \rightarrow B$$

que se lee: “ $f$  es una función de  $A$  en  $B$ ”, o “ $f$  aplica  $A$  en  $B$ ”. Si  $a \in A$ , entonces hacemos que  $f(a)$  (léase “ $f$  de  $a$ ”) denote el elemento único de  $B$  que  $f$  asigna a  $a$ ; se le llama *imagen* de  $a$  bajo  $f$ , o valor de  $f$  en  $a$ . Al conjunto de todos los valores de imágenes se le llama *recorrido* o *imagen* de  $f$ .

Frecuentemente, una función se puede expresar por medio de una fórmula matemática. Por ejemplo, considere la función que envía cada número real a su cuadrado. Podemos describir esta función escribiendo

$$f(x) = x^2$$

Aquí a  $x$  se le llama variable, y la letra  $f$  denota la función.

*Observación:* Cuandoquiera que se da una función por una fórmula en términos de una variable  $x$ , suponemos, a no ser que se diga otra cosa, que el dominio de la función es  $\mathbb{R}$  (o el subconjunto mayor de  $\mathbb{R}$  para el cual la fórmula tiene significado) y el codominio es  $\mathbb{R}$ .

### EJEMPLO 6.15

- Considere la función  $f(x) = x^3$ , es decir,  $f$  asigna a cada número real su cubo. Entonces la imagen de 2 es 8, y así podemos escribir  $f(2) = 8$ .
- Sea  $f$  tal, que asigne a cada país del mundo su capital. Aquí, el dominio de  $f$  es el conjunto de países del mundo; el codominio es la lista de las ciudades del mundo. La imagen de Francia es París; es decir,  $f(\text{Francia}) = \text{París}$ .
- La figura 6-16 define una función de  $A = \{a, b, c, d\}$  en  $B = \{r, s, t, u\}$  de la manera obvia. Aquí

$$f(a) = s, \quad f(b) = u, \quad f(c) = r, \quad f(d) = s$$

La imagen de  $f$  es el conjunto de valores de imagen,  $\{r, s, u\}$ . Observe que  $t$  no pertenece a la imagen de  $f$  porque  $t$  no es una imagen de ningún elemento bajo  $f$ .

- Sea  $A$  cualquier conjunto. La función de  $A$  en  $A$  que asigna a cada elemento el mismo elemento se llama *función de identidad* en  $A$  y generalmente se denota por  $1_A$  o simplemente 1. En otras palabras

$$1_A(a) = a$$

para cada elemento  $a$  en  $A$ .

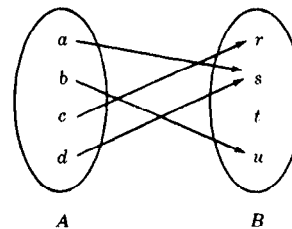


Figura 6-16

Hay otro punto de vista para considerar funciones. Primero que todo, cada función  $f : A \rightarrow B$  genera una relación de  $A$  en  $B$ , llamada gráfica de  $f$  y definida por

$$\text{Gráfica de } f = \{(a, b) : a \in A, b = f(a)\}$$

Dos funciones  $f : A \rightarrow B$  y  $g : A \rightarrow B$  se definen como iguales, escrito  $f = g$ , si  $f(a) = g(a)$  para cada  $a \in A$ ; o sea, si tienen la misma gráfica. Según esto, no distinguimos entre una función y su gráfica. Ahora, tal relación tiene la propiedad de que cada  $a$  en  $A$  pertenece a una única pareja  $(a, b)$  en la relación. Por otra parte, cualquier relación  $f$  de  $A$  en  $B$  que tenga propiedad hace generar una función  $f : A \rightarrow B$  en donde  $f(a) = b$  para cada  $(a, b)$  en  $f$ . Por consiguiente, se puede definir equivalentemente una función como sigue:

**Definición:** Una función  $f : A \rightarrow B$  es una relación de  $A$  en  $B$  (es decir, un subconjunto de  $A \times B$ ) tal que cada  $a \in A$  pertenece a una pareja ordenada única  $(a, b)$  en  $f$ .

**Observación:** Puesto que la gráfica de  $f$ , como se definió antes es una relación, podemos representarla gráficamente por el método (1) de la sec. 6.13; al dibujo mismo también se le llama "gráfica de  $f$ ". La condición que define una función se traduce en la condición geométrica de que no haya dos puntos en la gráfica que queden en la misma vertical.

#### EJEMPLO 6.16

- (a) Considere la función  $f : A \rightarrow B$  definida por la fig. 6-16. La gráfica de  $f$  es el siguiente conjunto de parejas ordenadas:

$$\text{Gráfica de } f = \{(a, s), (b, u), (c, r), (d, s)\}$$

Esta relación está representada en el diagrama de coordenadas de  $A \times B$  en la fig. 6-17.

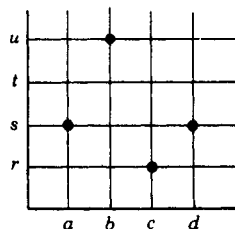


Figura 6-17

- (b) Considere las siguientes relaciones en el conjunto  $A = \{1, 2, 3\}$ :

$$f = \{(1, 3), (2, 3), (3, 1)\}$$

$$g = \{(1, 2), (3, 1)\}$$

$$h = \{(1, 3), (2, 1), (1, 2), (3, 1)\}$$

$f$  es una función de  $A$  en  $A$ , ya que cada elemento de  $A$  aparece como la primera coordenada en, exactamente, una pareja ordenada de  $f$ ; aquí  $f(1) = 3$ ,  $f(2) = 3$  y  $f(3) = 1$ .  $g$  no es una función de  $A$  en  $A$ , ya que  $2 \in A$  no es la primera coordenada de ninguna pareja en  $g$  y, por lo tanto,  $g$  no asigna ninguna imagen a 2. (Observe, sin embargo, que  $g$  es una función de un subconjunto de  $A$  en  $A$ .) Tampoco  $h$  es una función de  $A$  en  $A$ ; ya que  $1 \in A$  aparece como la primera coordenada de dos parejas ordenadas distintas en  $h$ ,  $(1, 3)$  y  $(1, 2)$ . Para que  $h$  sea una función, no puede asignar tanto 3 como 2 al elemento  $1 \in A$ , como 2 al elemento  $1 \in A$ .

- (c) Por función real polinomial, queremos decir una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

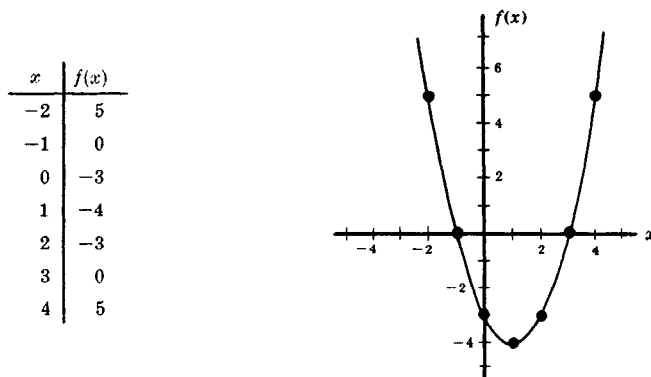
en donde  $a_i$  son números reales. Como  $\mathbb{R}$  es un conjunto infinito, sería imposible representar cada punto





de la gráfica. Sin embargo, la gráfica de tal función se puede aproximar representando gráficamente primero algunos de sus puntos y dibujando luego una curva suave a través de ellos. Generalmente, los puntos se obtienen de una tabla en donde se les asignan varios valores a  $x$  y se computan los correspondientes valores de  $f(x)$ . La fig. 6-18 ilustra esta técnica para la función.

$$f(x) = x^2 - 2x - 3.$$



Gráfica de  $f(x) = x^2 - 2x - 3$

Figura 6-18

Considere la siguiente ecuación en las variables  $x$  e  $y$ :

$$y = x^2 - 2x - 3$$

Por el estudio, de la sección 6.13, esta ecuación genera una relación en  $\mathbb{R}$ . Debido a que cada valor de  $x$  da un único valor de  $y$ , la relación es una función; de hecho, es la misma función que la función de la fig. 6-18. Hablando en términos generales, cada vez que se da una función por medio de una ecuación de la forma

$$y = f(x)$$

decimos que  $y$  es una función de  $x$ , y llamamos a  $x$  la *variable independiente* y a  $y$  la *variable dependiente*.

## Problemas resueltos

### CONJUNTOS, OPERACIONES EN CONJUNTOS

6.1 ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son iguales:  $\{r, t, s\}$ ,  $\{s, t, r, s\}$ ,  $\{t, s, t, r\}$ ,  $\{s, r, s, t\}$ ?

Todos son iguales. El orden y/o la repetición no cambian un conjunto.

6.2 Haga una lista de los elementos de los siguientes conjuntos; en donde  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ .

(a)  $A = \{x : x \in \mathbb{N}, 3 < x < 12\}$

(b)  $B = \{x : x \in \mathbb{N}, x \text{ es par}, x < 15\}$

(c)  $C = \{x : x \in \mathbb{N}, 4 + x = 3\}$

(a)  $A$  consta de los enteros positivos entre 3 y 12; de donde,

$$A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$$

(b)  $B$  consta de los enteros positivos pares menores que 15; de donde,

$$B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$$

(c) No hay enteros positivos que satisfagan la condición  $4 + x = 3$ ; así que  $C$  no contiene ningún elemento. En otras palabras,  $C = \emptyset$ , el conjunto vacío.

6.3 Considere los siguientes conjuntos:

$$\begin{array}{llll} \emptyset, & A = \{1\}, & B = \{1, 3\}, & C = \{1, 5, 9\}, & D = \{1, 2, 3, 4, 5\}. \\ & & E = \{1, 3, 5, 7, 9\}, & U = \{1, 2, \dots, 8, 9\} \end{array}$$

Inserte el símbolo correcto  $\subset$  o  $\not\subset$  entre cada pareja de conjuntos:

$$\begin{array}{llll} (a) \emptyset, A & (c) B, C & (e) C, D & (g) D, E \\ (b) A, B & (d) B, E & (f) C, E & (h) D, U \end{array}$$

- (a)  $\emptyset \subset A$  ya que  $\emptyset$  es un subconjunto de todo conjunto.  
 (b)  $A \subset B$  ya que 1 es el único elemento de  $A$  y pertenece a  $B$ .  
 (c)  $B \not\subset C$  ya que  $3 \in B$  pero  $3 \notin C$ .  
 (d)  $B \subset E$  ya que los elementos de  $B$  también pertenecen a  $E$ .  
 (e)  $C \not\subset D$  ya que  $5 \in C$  pero  $5 \notin D$ .  
 (f)  $C \subset E$  ya que los elementos de  $C$  también pertenecen a  $E$ .  
 (g)  $D \not\subset E$  ya que  $2 \in D$  pero  $2 \notin E$ .  
 (h)  $D \subset U$  porque los elementos de  $D$  también pertenecen a  $U$ .

En los problemas 6.4 a 6.6, suponga  $U = \{1, 2, \dots, 8, 9\}$  y

$$\begin{array}{l} A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \\ B = \{4, 5, 6, 7\} \\ C = \{5, 6, 7, 8, 9\} \\ D = \{1, 3, 5, 7, 9\} \\ E = \{2, 4, 6, 8\} \\ F = \{1, 5, 9\} \end{array}$$

6.4 Encuentre: (a)  $A \cup B$  y  $A \cap B$ , (b)  $B \cup D$  y  $B \cap D$ , (c)  $A \cup C$  y  $A \cap C$ .

Recuerde que la unión  $X \cup Y$  consta de los elementos en  $X$  o en  $Y$  (o en ambos), y que la intersección  $X \cap Y$  consta de los elementos tanto en  $X$  como en  $Y$ .

- (a)  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ,  $A \cap B = \{4, 5\}$ .  
 (b)  $B \cup D = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$ ,  $B \cap D = \{5, 7\}$ .  
 (c)  $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = U$ ,  $A \cap C = \{5\}$ .

6.5 Encuentre: (a)  $A^c$ ,  $B^c$ , y  $D^c$ ; (b)  $A \setminus B$ ,  $B \setminus A$ , y  $F \setminus D$ .

Recuerde que el complemento  $X^c$  consta de los elementos en el conjunto universal  $U$  que no pertenecen a  $X$ , y la diferencia  $X \setminus Y$  consta de los elementos en  $X$  que no pertenecen a  $Y$ .

- (a)  $A^c = \{6, 7, 8, 9\}$ ,  $B^c = \{1, 2, 3, 8, 9\}$ ,  $D^c = \{2, 4, 6, 8\} = E$ .  
 (b)  $A \setminus B = \{1, 2, 3\}$ ,  $B \setminus A = \{6, 7\}$ ,  $F \setminus D = \emptyset$ .

6.6 Encuentre: (a)  $A \cap (B \cup E)$ , (b)  $(B \cap F) \cup (C \cap E)$ , (c)  $(A \cap D) \setminus B$ .

- (a) Primero compute  $B \cup E = \{2, 4, 5, 6, 7, 8\}$ . Luego  $A \cap (B \cup E) = \{2, 4, 5\}$ .  
 (b)  $B \cap F = \{5\}$  y  $C \cap E = \{6, 8\}$ . Así que  $(B \cap F) \cup (C \cap E) = \{5, 6, 8\}$ .  
 (c)  $A \cap D = \{1, 3, 5\}$ . Ahora  $(A \cap D) \setminus B = \{1, 3\}$ .

6.7 Muestre que podemos tener  $A \cap B = A \cap C$  sin que  $B = C$ .

Sea  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{2, 3\}$  y  $C = \{2, 4\}$ . Entonces,  $A \cap B = \{2\}$  y  $A \cap C = \{2\}$ . Así  $A \cap B = A \cap C$  pero  $B \neq C$ .

### ALGEBRA DE CONJUNTOS, DIAGRAMAS DE VENN

6.8 Escriba el dual de cada ecuación de conjuntos:

$$(a) (A \cup B) \cap (A \cup B^c) = A \cup \emptyset \quad (b) (A \cap U) \cup (B \cap A) = A$$

Reemplace cada ocurrencia de  $\cup$ ,  $\cap$ , y  $\emptyset$  por  $\cap$ ,  $\cup$ ,  $\emptyset$  y  $U$  respectivamente:

$$(a) (A \cap B) \cup (A \cap B^c) = A \cap U \quad (b) (A \cup \emptyset) \cap (B \cup A) = A$$

6.9 Demuestre la identidad  $(U \cap A) \cup (B \cap A) = A$  usando la tabla 6-1.

Enunciado	Razón
$(U \cap A) \cup (B \cap A) = (A \cap U) \cup (A \cap B)$	Ley conmutativa 3a.
$= A \cap (U \cup B)$	Ley distributiva 4b.
$= A \cap (B \cup U)$	Ley conmutativa 3a.
$= A \cap U$	Ley de identidad 6a.
$= A$	Ley de identidad 5b.

6.10 Demuestre la identidad  $(\emptyset \cup A) \cap (B \cup A) = A$ .

Este es el dual de la identidad demostrada en el problema 6.9 y, por lo tanto, es verdadera por el principio de dualidad. En otras palabras, reemplazar cada paso en la prueba en el problema 6.9 por el enunciado dual nos da una demostración de esta identidad.

6.11 Sombree el conjunto  $A \cap B^c$  en el diagrama de Venn de la fig. 6-19(a).

Sombree  $A$  con líneas en una dirección (///), y sombree  $B^c$ , el área por fuera de  $B$ , con líneas en la otra dirección (\\), como se muestra en la fig. 6-19(b). El área cruzada en la fig. 6-19(b) es la intersección,  $A \cap B^c$ , que está sombreada en la fig. 6-19(c). Observe que  $A \cap B^c = A \setminus B$ .

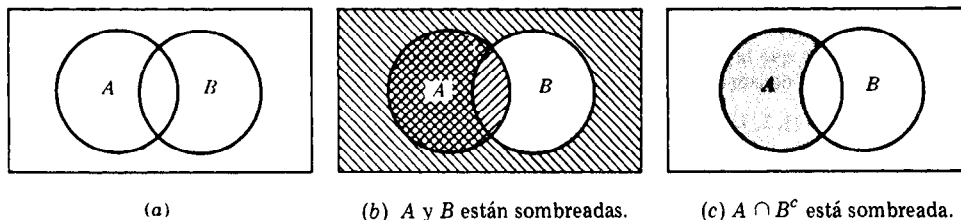


Figura 6-19

6.12 Ilustre la ley distributiva  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$  con diagramas de Venn.

Dibuje tres círculos que intersecten, rotulados  $A$ ,  $B$  y  $C$ , como en la fig. 6-20(a). Ahora, como en la fig. 6-20(b), sombree  $A$  con líneas en una dirección y sombree  $B \cup C$  con líneas en otra dirección; el área cruzada es  $A \cap (B \cup C)$ , como en la fig. 6-20(c). En seguida sombree  $A \cap B$  y luego  $A \cap C$ , como en la fig. 6-20(d); el área total sombreada es  $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ , como en la fig. 6-20(e).

Como es de esperar por la ley distributiva,  $A \cap (B \cup C)$  y  $(A \cap B) \cup (A \cap C)$  están representados ambos por los mismos conjuntos de puntos.

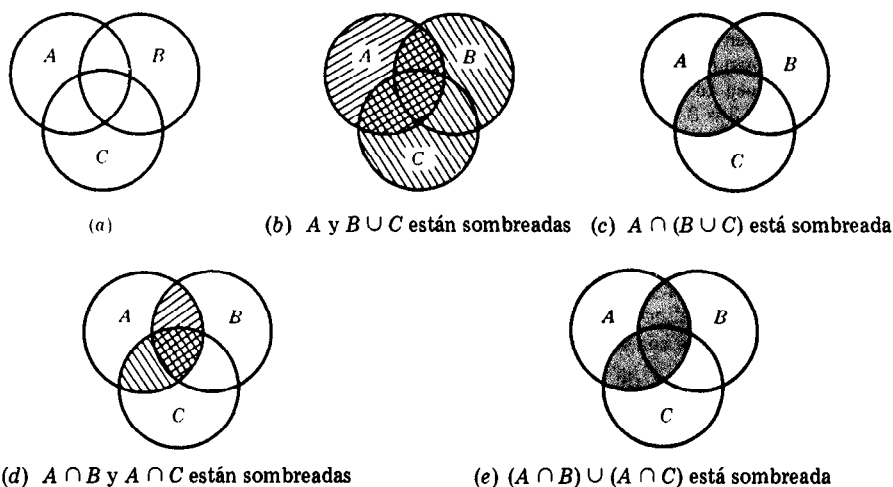


Figura 6-20

**6.13** En una encuesta de 60 personas, se encontró que 25 leen *El Tiempo*, 26 leen *La Prensa* y 26 leen *El Mundo*. También 9 leen tanto *El Tiempo* como *El Mundo*, 11 leen tanto *El Tiempo* como *La Prensa*, 8 leen tanto *La Prensa* como *El Mundo*, y 8 no leen ninguno de los tres periódicos.

- (a) Encuentre el número de personas que leen los tres periódicos.
- (b) Complete el diagrama de Venn de la fig. 6-21 con los números correctos de lectores en cada una de las ocho regiones. Aquí,  $T$ ,  $P$  y  $M$  denotan los conjuntos de personas que leen respectivamente *El Tiempo*, *La Prensa* y *El Mundo*.
- (c) Determine el número de personas que leen exactamente un periódico.
- (a) Tenemos  $n(N \cup T \cup F) = 60 - 8 = 52$ , porque 8 personas no leen ninguno de los periódicos. Por el corolario 6.4 o

$$n(N \cup T \cup F) = n(N) + n(T) + n(F) - n(N \cap T) - n(N \cap F) - n(T \cap F) + n(N \cap T \cap F)$$

$$\text{o} \quad 52 = 25 + 26 + 26 - 11 - 9 - 8 + n(N \cap T \cap F)$$

de donde,  $n(N \cap T \cap F) = 3$ .

- (b) El diagrama de Venn requerido, fig. 6-22 se obtiene de la siguiente manera:

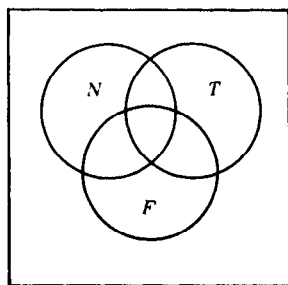


Figura 6-21

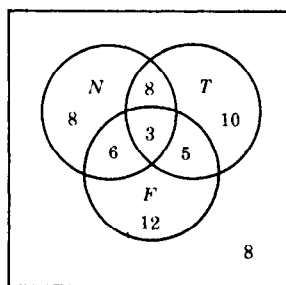


Figura 6-22

3 leen los tres periódicos.

$11 - 3 = 8$  leen *El Tiempo* y *La Prensa*, pero no todos los tres periódicos.

$9 - 3 = 6$  leen *El Tiempo* y *El Mundo*, pero no todos los tres periódicos.

$8 - 3 = 5$  leen *La Prensa* y *El Mundo*, pero no todos los tres periódicos.

$25 - 8 - 6 - 3 = 8$  leen solamente *El Tiempo*.

$26 - 8 - 5 - 3 = 10$  leen solamente *La Prensa*.

$26 - 6 - 5 - 3 = 12$  leen solamente *El Mundo*.

(c) Tenemos que  $8 + 10 + 12 = 30$  leen solamente un periódico.

6.14 Considere las siguientes suposiciones:

$S_1$ : Los poetas son gente feliz.

$S_2$ : Todo médico es rico.

$S_3$ : Nadie que sea feliz es también rico.

Determine la validez de cada una de las siguientes conclusiones: (a) Ningún poeta es rico. (b) Los médicos son gente feliz. (c) Nadie puede ser tanto poeta como médico.

Por  $S_1$ , el conjunto de los poetas está contenido en el conjunto de la gente feliz, y por  $S_3$ , el conjunto de la gente feliz es disjunto con el conjunto de los ricos. Así que dibuje el diagrama de Venn de la fig. 6-23.



Figura 6-23

Por  $S_2$ , el conjunto de los médicos está contenido en el conjunto de la gente rica. Dibuje, pues, el diagrama de Venn de la fig. 6-24. Según este diagrama resulta evidente que (a) y (c) son conclusiones válidas mientras que (b) no es válida.



Figura 6-24

## CLASES DE CONJUNTOS, PARTICIONES

6.15 Determine el conjunto potencia  $\mathcal{P}(S)$  de  $S = \{a, b, c, d\}$ .

Los elementos de  $\mathcal{P}(S)$  son los subconjuntos de  $S$ . Así que:

$$\mathcal{P}(S) = \{S, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \\ \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \emptyset\}$$

Observe que  $\mathcal{P}(S)$  tiene  $2^4 = 16$  elementos.

6.16 Dado  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ . Determine cuáles de los siguientes son particiones de  $X$ :

(a)  $\{\{1, 3, 6\}, \{2, 8\}, \{5, 7, 9\}\}$

(c)  $\{\{2, 4, 5, 8\}, \{1, 9\}, \{3, 6, 7\}\}$

(b)  $\{\{1, 5, 7\}, \{2, 4, 8, 9\}, \{3, 5, 6\}\}$

(d)  $\{\{1, 2, 7\}, \{3, 5\}, \{4, 6, 8, 9\}, \{3, 5\}\}$

(a) No; porque  $4 \in X$  no pertenece a ninguna célula. En otras palabras,  $X$  no es la unión de las células.

- (b) No; porque  $5 \in X$  pertenece a dos células distintas,  $\{1, 5, 7\}$  y  $\{3, 5, 6\}$ . En otras palabras, las dos células distintas no son disyuntas.
- (c) Sí; porque cada elemento de  $X$  pertenece exactamente a una célula. En otras palabras, las células son disyuntas y su unión es  $X$ .
- (d) Sí. Aunque 3 y 5 aparecen en dos partes, las células no son distintas.

**6.17** Encuentre todas las particiones de  $X = \{a, b, c, d\}$

Observe primero que cada partición de  $X$  contiene 1, 2, 3, ó 4 conjuntos distintos. Las particiones son las siguientes:

- (1)  $\{\{a, b, c, d\}\}$
- (2)  $\{\{a\}, \{b, c, d\}\}, \{\{b\}, \{a, c, d\}\}, \{\{c\}, \{a, b, d\}\}, \{\{d\}, \{a, b, c\}\},$   
 $\{\{a, b\}, \{c, d\}\}, \{\{a, c\}, \{b, d\}\}, \{\{a, d\}, \{b, c\}\}$
- (3)  $\{\{a\}, \{b\}, \{c, d\}\}, \{\{a\}, \{c\}, \{b, d\}\}, \{\{a\}, \{d\}, \{b, c\}\},$   
 $\{\{b\}, \{c\}, \{a, d\}\}, \{\{b\}, \{d\}, \{a, c\}\}, \{\{c\}, \{d\}, \{a, b\}\}$
- (4)  $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$

Hay quince particiones diferentes de  $X$ . Para una generalización de este resultado vea el problema 11.18.

## RELACIONES

**6.18** Dado  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{x, y, z\}$  y  $C = \{3, 4\}$ . Encuentre  $A \times B \times C$ .

$A \times B \times C$  consta de todas las triplas  $(a, b, c)$  en donde  $a \in A$ ,  $b \in B$ ,  $c \in C$ . Se puede obtener sistemáticamente estos elementos de  $A \times B \times C$  de un *diagrama de árbol* (fig. 6-25). Los elementos de  $A \times B \times C$  son precisamente las 12 triplas ordenadas a la derecha del diagrama de árbol.

Observe que  $n(A) = 2$ ,  $n(B) = 3$ , y  $n(C) = 2$  y, como es de esperar,

$$n(A \times B \times C) = 12 = n(A) \cdot n(B) \cdot n(C)$$

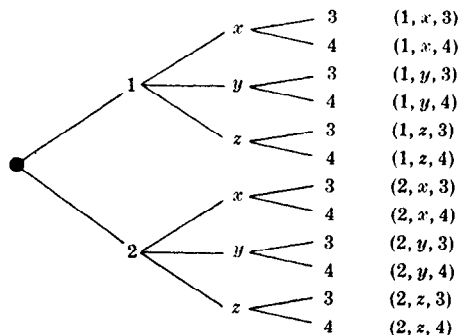


Figura 6-25

**6.19** Dado  $(2x, x + y) = (6, 2)$ . Encuentre  $x$  e  $y$ .

Dos parejas ordenadas son iguales si y solamente si las componentes correspondientes son iguales. Así que obtenemos las ecuaciones

$$2x = 6 \quad \text{y} \quad x + y = 2$$

Las dos ecuaciones dan  $x = 3$  e  $y = -1$ .

**6.20** Sea  $M = \{a, b, c, d\}$  y sea  $R$  la relación en  $M$  que consta de aquellos puntos que se muestran en el diagrama de coordenadas de  $M \times M$ , fig. 6-26.

- (a) Encuentre todos los elementos de  $M$  que están relacionados con  $b$ ; o sea,  $\{x : (x, b) \in R\}$ .
- (b) Encuentre todos los elementos de  $M$  con los cuales está relacionado  $d$ ; es decir,  $\{x : (d, x) \in R\}$ .
- (c) Encuentre la relación inversa  $R^{-1}$

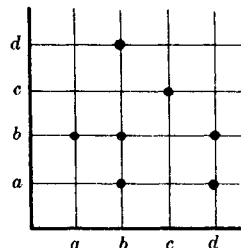


Figura 6-26

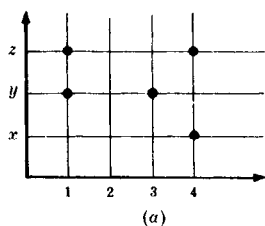
- (a) La horizontal a través de  $b$  contiene todos los puntos de  $R$  en los cuales aparece  $b$  como segundo elemento:  $(a, b)$ ,  $(b, b)$  y  $(d, b)$ . Así que el conjunto deseado es  $\{a, b, d\}$ .
- (b) La vertical a través de  $d$  contiene todos los puntos de  $R$  en los cuales aparece  $d$  como primer elemento:  $(d, a)$  y  $(d, b)$ . Así que  $\{a, b\}$  es el conjunto deseado.
- (c) Primero escriba  $R$  como un conjunto de parejas ordenadas y luego escriba las parejas en el orden inverso.

$$R^{-1} = \{(a, b), (a, d), (b, a), (b, b), (b, d), (c, c), (d, b)\}$$

6.21 Dado  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  y  $B = \{x, y, z\}$ . Considere la siguiente relación de  $A$  en  $B$ :

$$R = \{(1, y), (1, z), (3, y), (4, x), (4, z)\}$$

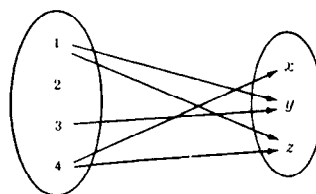
- (a) Grafique  $R$  en un diagrama de coordenadas de  $A \times B$ . (b) Determine la matriz de la relación. (c) Dibuje el diagrama de flechas de  $R$ . (d) Encuentre la relación inversa  $R^{-1}$  de  $R$ . (e) Determine el dominio y el recorrido de  $R$ .



(a)

$$\begin{matrix} & x & y & z \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

(b)



(c)

Figura 6-27

- (a) Vea la fig. 6-27(a).
- (b) Vea la fig. 6-27(b). Observe que las filas de la matriz se han rotulado por los elementos de  $A$  y las columnas por los elementos de  $B$ . Además, observe que la entrada en la matriz correspondiente a  $a \in A$  y  $b \in B$  es 1 si  $a$  está relacionado con  $b$  y 0 en caso contrario.
- (c) Vea la fig. 6-27(c). Observe que hay una flecha de  $a$  a  $b$  en  $B$  cuando y sólo cuando  $a$  está relacionado con  $b$ , o sea  $(a, b)$  pertenece a  $R$ .
- (d) Invierta las parejas ordenadas de  $R$  para obtener las parejas ordenadas de  $R^{-1}$ :

$$R^{-1} = \{(y, 1), (z, 1), (y, 3), (x, 4), (z, 4)\}$$

Observe que invirtiendo las flechas de la figura 6-27(c) obtenemos el diagrama de flechas de  $R$ , y que intercambiando las filas y las columnas de la fig. 6-27(b) obtenemos la matriz de  $R^{-1}$ .

- (e) El dominio de  $R$  consta de los primeros elementos de las parejas ordenadas de  $R$ , y que el recorrido de  $R$  consta de los segundos elementos. Así,

$$\text{dominio de } R = \{1, 3, 4\} \text{ y recorrido de } R = \{x, y, z\}.$$

6.22 Sean  $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ , y  $R$  la relación definida por “ $x$  divide a  $y$ ”, indicada como  $x | y$ . ( $x | y$  si y sólo si existe un entero  $z$  tal que  $xz = y$ .)

- (a) Escriba  $R$  como un conjunto de parejas ordenadas.  
 (b) Grafique  $R$  en un diagrama de coordenadas  $A \times A$ , y dibuje su grafo dirigido.  
 (c) Encuentre la relación inversa  $R^{-1}$  de  $R$ , y describa  $R^{-1}$  en palabras.  
 (a) Encuentre secuencialmente aquellos números de  $A$  que son divisibles por 1, 2, 3, 4, 6. Estos son:

$$1|1, 1|2, 1|3, 1|4, 1|6, 2|2, 2|4, 2|6, 3|3, 3|6, 4|4, 6|6$$

De donde  $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 6), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (6, 6)\}$ .

- (b) Vea la fig. 6-28.

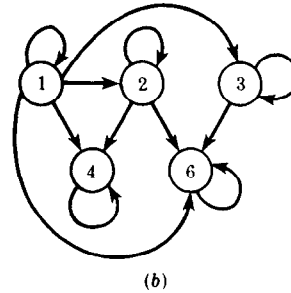
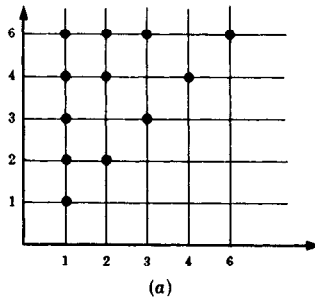


Figura 6-28

- (c) Invierta las parejas ordenadas de  $R$  para obtener parejas ordenadas de  $R^{-1}$ .

$$R^{-1} = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (6, 1), (2, 2), (4, 2), (6, 2), (3, 3), (6, 3), (4, 4), (6, 6)\}$$

$R^{-1}$  se puede describir por el enunciado “ $x$  es un múltiplo de  $y$ ”.

6.23 Sean  $R$  y  $S$  las siguientes relaciones en  $A = \{1, 2, 3\}$ :

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 3)\} \quad S = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 3)\}$$

Encuentre  $R \cap S$ ,  $R \cup S$  y  $R^c$ .

Trate  $R$  y  $S$  como simples conjuntos y tome la intersección y la unión usuales. Para  $R^c$ , use el hecho de que  $A \times A$  es la relación universal en  $A$ .

$$R \cap S = \{(1, 2), (3, 3)\}$$

$$R \cup S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 3)\}$$

$$R^c = \{(1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 2)\}$$

6.24 Considere las siguientes cinco relaciones en el conjunto  $A = \{1, 2, 3\}$ .

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 3)\}$$

$$S = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$$

$$T = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3)\}$$

$$\emptyset = \text{la relación vacía}$$

$$A \times A = \text{la relación universal}$$

Determine si es verdadero o no que cada una de las relaciones anteriores es (a) reflexiva, (b) simétrica, (c) transitiva, (d) una relación de equivalencia.

- (a)  $R$  no es reflexiva ya que  $2 \in A$ , pero  $(2, 2) \notin R$ .  $T$  no es reflexiva ya que  $(3, 3) \notin T$  y análogamente,  $\emptyset$  no es reflexiva,  $S$  y  $A \times A$  son reflexivas.  
 (b)  $R$  no es simétrica ya que  $(1, 2) \in R$  pero  $(2, 1) \notin R$ , y análogamente  $T$  no es simétrica.  $S$ ,  $\emptyset$  y  $A \times A$  son simétricas.



- (c)  $T$  no es transitiva ya que  $(1, 2)$  y  $(2, 3)$  pertenecen a  $T$ , pero  $(1, 3)$  no pertenece a  $T$ . Las otras cuatro relaciones son transitivas.
- (d) Solo  $S$  y  $A \times A$  son relaciones de equivalencia, ya que solamente ellas son reflexiva, simétrica y transitiva.

6.25 Sea  $R$  la siguiente relación de equivalencia en el conjunto  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ :

$$R = \{(1, 1), (1, 5), (2, 2), (2, 3), (2, 6), (3, 2), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (5, 1), (5, 5), (6, 2), (6, 3), (6, 6)\}$$

Encuentre la partición de  $A$  inducida por  $R$ , es decir, encuentre las clases de equivalencia que componen  $A/R$ .

Los elementos relacionados con 1 son 1 y 5; así que

$$[1] = \{1, 5\}$$

Escogemos un elemento que no pertenece a  $[1]$ , digamos 2. Los elementos relacionados con 2 son 2, 3 y 6; así que

$$[2] = \{2, 3, 6\}$$

El único elemento que no pertenece a  $[1]$  o a  $[2]$  es 4. El único elemento relacionado con 4 es 4. Así

$$[4] = \{4\}$$

Entonces

$$\{\{1, 5\}, \{2, 3, 6\}, \{4\}\}$$

es la partición de  $A$  inducida por  $R$ .

## FUNCIONES

6.26 Para cada diagrama de la fig. 6-29, diga si es verdadero o no que se define una función de  $A = \{a, b, c\}$  en  $B = \{x, y, z\}$ .

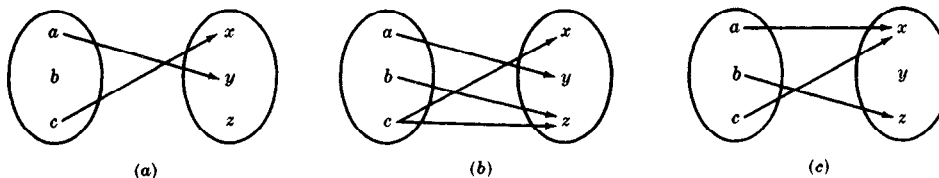


Figura 6-29

- (a) No. No hay nada asignado al elemento  $b \in A$ .
- (b) No. Se asignan dos elementos,  $x$  y  $z$ , a  $c \in A$ .
- (c) Sí.

6.27 Sean  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  y  $f: A \rightarrow A$  la función definida en la fig. 6-30. (a) Encuentre la imagen de  $f$ . (b) Encuentre la gráfica de  $f$ , es decir, escriba  $f$  como un conjunto de parejas ordenadas.

- (a) La imagen de  $f$  consta de todos los valores de imagen. Ahora, sólo 2, 3 y 5 aparecen como las imágenes de elementos de  $A$ ; así que

$$f(A) = \{2, 3, 5\}.$$

- (b) Las parejas ordenadas  $(a, f(a))$ , en donde  $a \in A$ , forman la gráfica de  $f$ . Ahora  $f(1) = 3$ ,  $f(2) = 5$ ,  $f(3) = 5$ ,  $f(4) = 2$  y  $f(5) = 3$ ; de donde,

$$f = \{(1, 3), (2, 5), (3, 5), (4, 2), (5, 3)\}$$

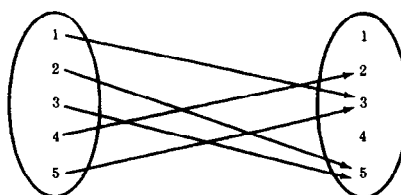


Figura 6-30

- 6.28 Determine si la relación (a)  $f = \{(2, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 2), (4, 4)\}$ , (b)  $g = \{(3, 1), (4, 2), (1, 1)\}$ , (c)  $h = \{(2, 1), (3, 4), (1, 4), (2, 1), (4, 4)\}$ , es una función de  $X = \{1, 2, 3, 4\}$  en  $X$ .

Recuerde que un subconjunto  $f$  de  $X \times X$  es una función  $f : X \rightarrow X$  si y sólo si cada  $a \in X$  aparece como la primera coordenada en, exactamente, una pareja ordenada en  $f$ .

- (a) No. Dos parejas ordenadas diferentes  $(2, 3)$  y  $(2, 1)$  en  $f$  tienen el mismo número 2 como su primera coordenada.  
 (b) No. El elemento  $2 \in X$  no aparece como la primera coordenada en ninguna pareja ordenada en  $g$ .  
 (c) Si. Aunque  $2 \in X$  aparece como la primera coordenada en dos parejas ordenadas en  $h$ , estas parejas son iguales.

- 6.29 Sea  $A$  el conjunto de estudiantes de un colegio. Determine cuáles de las siguientes asignaciones definen funciones en  $A$ . (a) A cada estudiante, su edad; (b) a cada estudiante, el profesor; (c) a cada estudiante, su sexo, y (d) a cada estudiante, su cónyuge.

Una colección de asignaciones es una función en  $A$  si y sólo si a cada elemento  $a$  en  $A$  se le asigna exactamente un miembro (de otro conjunto  $B$ ). Así que:

- (a) Sí, porque cada estudiante tiene una y solamente una edad.  
 (b) Sí, si cada estudiante tiene solamente un profesor; No, si algún estudiante tiene más de un profesor.  
 (c) Sí.  
 (d) No, si algún estudiante no está casado.

- 6.30 Sea  $f : R \rightarrow R$  definida por  $f(x) = x^3$ . (a) Encuentre: (i)  $f(3)$ , (ii)  $f(-2)$ , (iii)  $f(y)$ , (iv)  $f(y + 1)$ .

(b) Grafique  $f$  en un diagrama de coordenadas de  $R \times R$ .

- (a) (i)  $f(3) = 3^3 = 27$ , (ii)  $f(-2) = (-2)^3 = -8$ , (iii)  $f(y) = (y)^3 = y^3$   
 (iv)  $f(y + 1) = (y + 1)^3 = y^3 + 3y^2 + 3y + 1$

- (b) Como  $f$  es una función polinomial, es posible graficarla tabulando primero algunos de sus puntos y luego dibujando una curva suave a través de estos puntos, como en la fig. 6-31.

$x$	$f(x)$
-3	-27
-2	-8
-1	-1
0	0
1	1
2	8
3	27

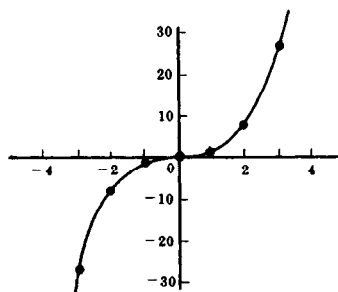
Gráfica de  $f(x) = x^3$ 

Figura 6-31

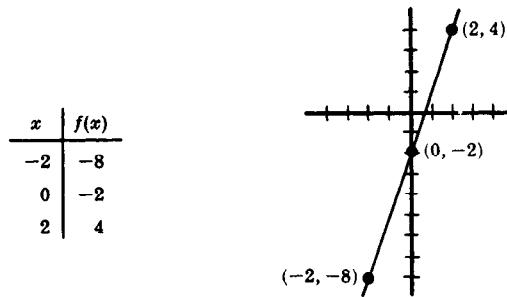
6.31 Dibuje las gráficas de

(a)  $f(x) = 3x - 2$       (b)  $g(x) = x^2 + x - 6$       (c)  $h(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$

En (a) la función es lineal; se necesitan solamente dos puntos (tres para seguridad) para dibujar su gráfica. Haga una tabla con tres valores de  $x$ , digamos,  $x = -2, 0, 2$  y encuentre los valores correspondientes de  $f(x)$ :

$$f(-2) = 3(-2) - 2 = -8 \quad f(0) = 3(0) - 2 = -2 \quad f(2) = 3(2) - 2 = 4$$

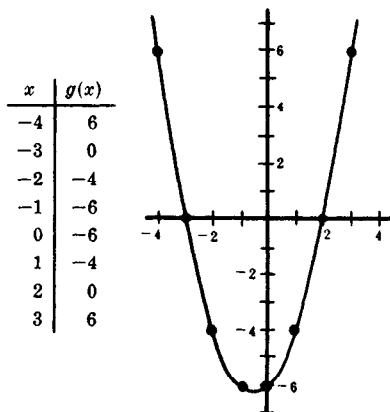
Dibuje la recta a través de estos puntos como en la fig. 6-32.



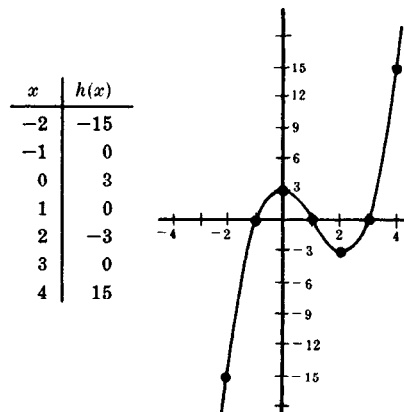
Gráfica de  $f$

Figura 6-32

En (b) y (c), haga una tabla de valores para  $x$  y luego encuentre los valores correspondientes de la función. Grafique los puntos en un diagrama de coordenadas y luego dibuje una curva continua y suave a través de los puntos, tal como en la fig. 6-33.



Gráfica de  $g$



Gráfica de  $h$

Figura 6-33

## Problemas suplementarios

### CONJUNTOS, OPERACIONES EN CONJUNTOS

6.32 ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son iguales?

$$\begin{aligned} & \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 1\}, \{3, 1, 3\}, \{1, 2, 1\} \\ A = \{x : x^2 - 4x + 3 = 0\} & \quad C = \{x : x \in \mathbb{N}, x < 3\} \\ B = \{x : x^2 - 3x + 2 = 0\} & \quad D = \{x : x \in \mathbb{N}, x \text{ es impar}, x < 5\} \end{aligned}$$

6.33 Haga una lista de los elementos de los siguientes conjuntos si el conjunto universal es  $U$

$U = \{a, b, c, \dots, y, z\}$ . ¿Cuáles de estos conjuntos, si hay alguno, son iguales?

$$\begin{aligned} A &= \{x : x \text{ es una vocal}\} \\ B &= \{x : x \text{ es una letra en la palabra "orca"}\} \\ C &= \{x : x \text{ precede a } f \text{ en el alfabeto}\} \\ D &= \{x : x \text{ es una letra en la palabra "arco"}\} \end{aligned}$$

6.34 Sea  $A = \{1, 2, \dots, 8, 9\}$ ,  $B = \{2, 4, 6, 8\}$ ,  $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ,  $D = \{3, 4, 5\}$  y  $E = \{3, 5\}$ . ¿Cuáles conjuntos pueden ser iguales a  $X$  si se nos da la siguiente información?

- (a)  $X$  y  $B$  son disyuntos. (b)  $X \subset D$  pero  $X \not\subset B$ .  
(c)  $X \subset A$  pero  $X \not\subset C$  (d)  $X \subset C$  pero  $X \not\subset A$ .

6.35 Considere los siguientes conjuntos:

$$\emptyset, \quad A = \{a\}, \quad B = \{c, d\}, \quad C = \{a, b, c, d\}, \quad D = \{a, b\}, \quad E = \{a, b, c, d, e\}$$

Inserte el símbolo correcto,  $\subset$  o  $\not\subset$ , entre cada pareja de conjuntos:

- (a)  $\emptyset, A$  (c)  $A, B$  (e)  $B, C$  (g)  $C, D$   
(b)  $D, E$  (d)  $D, A$  (f)  $D, C$  (h)  $B, D$

6.36 Dado:  $A = \{a, b, c, d, e\}$   $C = \{b, c, e, g, h\}$   
 $B = \{a, b, d, f, g\}$   $D = \{d, e, f, g, h\}$

Encuentre: (a)  $A \cup B$  (c)  $C \setminus D$  (e)  $(A \cap D) \cup B$   
(b)  $B \cap C$  (d)  $A \cap (B \cup D)$  (f)  $B \cap C \cap D$

6.37 La fórmula  $A \setminus B = A \cap B^c$  define la operación de diferencia en términos de las operaciones de intersección y complemento. Encuentre una fórmula que defina la unión de dos conjuntos,  $A \cup B$ , en términos de las operaciones de intersección y complemento.

6.38 Determine cuáles de los siguientes conjuntos son finitos:

- (a) El conjunto de las rectas paralelas al eje  $x$ .  
(b) El conjunto de letras en el alfabeto español.  
(c) El conjunto de números que son múltiplos de 5.  
(d) El conjunto de animales que viven en la Tierra.  
(e) El conjunto de números que son soluciones de la ecuación  $x^{27} + 26x^{18} - 17x^{11} + 7x^3 - 10 = 0$ .  
(f) El conjunto de círculos con centro en el origen  $(0, 0)$ .

### ALGEBRA DE CONJUNTOS, DIAGRAMAS DE VENN

6.39 Escriba el dual de cada ecuación de conjuntos:

- (a)  $A \cup (A \cap B) = A$   
(b)  $(A \cap B) \cup (A^c \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B^c) = U$

6.40 Use las leyes de la tabla 6-1 para demostrar cada identidad de conjuntos:

- (a)  $(A \cap B) \cup (A \cap B^c) = A$   
 (b)  $A \cup (A \cap B) = A$   
 (c)  $A \cup B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \cup (A \cap B)$

6.41 El diagrama de Venn de la fig. 6-34 muestra los conjuntos  $A$ ,  $B$ , y  $C$ . Sombree los siguientes conjuntos:

- (a)  $A \cap B \cap C$  (c)  $A \cup (B \cap C)$  (e)  $A^c \cap (B \cup C)$   
 (b)  $A \cap B^c \cap C$  (d)  $C \cap (A \cup B^c)$  (f)  $(A^c \cap B) \setminus C$

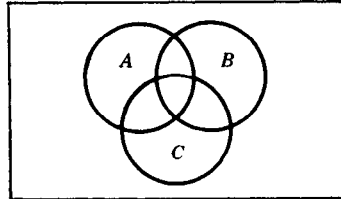


Figura 6-34

6.42 Una encuesta de 100 estudiantes produjo las siguientes estadísticas:

- 32 estudian matemáticas,  
 20 estudian física,  
 45 estudian biología,  
 15 estudian matemáticas y biología,  
 7 estudian matemáticas y física,  
 10 estudian física y biología,  
 30 no estudian ninguna de las tres.

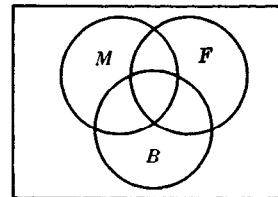


Figura 6-35

- (a) Encuentre el número de estudiantes que estudian todas las tres disciplinas.  
 (b) Llene cada una de las regiones del diagrama de Venn (fig. 6-35) con el número de estudiantes, en donde  $M$ ,  $F$  y  $B$  denotan los conjuntos de estudiantes que estudian matemáticas, física y biología respectivamente.  
 (c) Encuentre el número de estudiantes que toman exactamente una de las tres disciplinas.

6.43 Use diagramas de Venn para encontrar una conclusión producida por el siguiente conjunto de premisas (adaptado de un libro de lógica de Lewis Carroll).

- $S_1$ : Los bebés son ilógicos.  
 $S_2$ : A nadie que pueda controlar un cocodrilo se le desprecia.  
 $S_3$ : La gente ilógica es despreciada.

6.44 Considere las siguientes premisas:

- $S_1$ : Sembré todos mis árboles costosos el año pasado.  
 $S_2$ : Todos mis árboles frutales están en mi huerta  
 $S$ : No se sembró ningún árbol en mi huerta el año pasado.

Determine si es verdadero o no que cada uno de los siguientes enunciados es la conclusión en un argumento válido:

- (a) Los árboles frutales se sembraron el año pasado.  
 (b) No hay ningún árbol costoso en la huerta.  
 (c) Ningún árbol frutal es costoso.

## CLASES DE CONJUNTO, PARTICIONES

6.45 Encuentre el conjunto potencia,  $\mathcal{P}(S)$ , de  $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

6.46 Sea  $W = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Determine cuáles de los siguientes son particiones de  $W$ :

- (a)  $\{\{1, 3, 5\}, \{2, 4\}, \{3, 6\}\}$  (c)  $\{\{1, 5\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 5\}, \{3, 6\}\}$   
 (b)  $\{\{1, 5\}, \{2\}, \{3, 6\}\}$  (d)  $\{\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$

6.47 Encuentre todas las particiones de  $V = \{1, 2, 3\}$ .

6.48 Sea  $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$  y  $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$  particiones de un conjunto  $X$ . Demuestre que la colección de conjuntos

$$\{A_i \cap B_j : i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\} \setminus \emptyset$$

es también una partición (llamada la *partición cruz*) de  $X$ . (Observe que hemos excluido el conjunto vacío  $\emptyset$ .)

6.49 Sea  $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Considere las dos particiones siguientes de  $S$ :

$$A = \{\{1, 3, 4\}, \{2, 5\}\} \quad B = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}, \{5\}\}$$

Encuentre la partición cruz de  $S$ .

## CONJUNTOS PRODUCTOS

6.50 Sea  $A = \{a, b, c, d\}$ . Encuentre las parejas ordenadas que corresponden a los puntos  $P_1, P_2, P_3$  y  $P_4$  que aparecen en el diagrama de coordenadas adyacente de  $A \times A$  (fig. 6-36).

6.51 Encuentre  $x$  e  $y$  si: (a)  $(x + 2, 4) = (5, 2x + y)$ , (b)  $(y - 2, 2x + 1) = (x - 1, y + 2)$ .

6.52 Sean  $W = \{\text{Marcos, Eva, Pablo}\}$  y  $V = \{\text{Eva, David}\}$ . Encuentre: (a)  $W \times V$ ,  
 (b)  $V \times W$ , (c)  $V \times V$ .

6.53 Sean  $S = \{a, b, c\}$ ,  $T = \{b, c, d\}$  y  $W = \{a, d\}$ . Construya el diagrama de árbol de  $S \times T \times W$  y luego encuentre  $S \times T \times W$ .

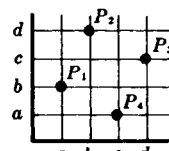


Figura 6-36

## RELACIONES

6.54 Sea  $R$  la siguiente relación en  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ :  $R = \{(1, 3), (1, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$ .

- (a) Encuentre el dominio y el recorrido de  $R$ .  
 (b) Dibuje el grafo dirigido de  $R$ .  
 (c) Encuentre la matriz,  $M_R$  de  $R$ .  
 (d) Encuentre  $R^{-1}$ .

6.55 Sea  $R$  la relación en  $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  dada por el conjunto de puntos que se muestran en el diagrama de coordenadas de  $C \times C$ , en la fig. 6-37.

(1) Diga si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa:

- (a)  $1 R 4$ , (b)  $2 R 5$ , (c)  $3 R 1$ , (d)  $5 R 3$ .

(2) Encuentre los elementos en cada uno de los siguientes subconjuntos de  $C$ :

- (a)  $\{x : 3 R x\}$  (c)  $\{x : (x, 2) \notin R\}$   
 (b)  $\{x : (4, x) \in R\}$  (d)  $\{x : x R 5\}$

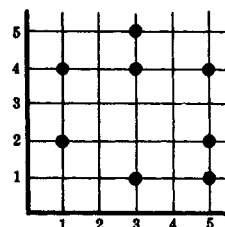


Figura 6-37

- (3) Encuentre (a) el dominio de  $R$ , (b) el recorrido de  $R$ , (c)  $R^{-1}$ .  
 (4) Dibuje el grafo dirigido de  $R$ .

6.56 Sean  $R$  y  $S$  las siguientes relaciones en  $B = \{a, b, c, d\}$ :

$$R = \{(a, a), (a, c), (c, b), (c, d), (d, b)\}$$

$$S = \{(b, a), (c, c), (c, d), (d, a)\}$$

Encuentre  $R \cup S$ ,  $R \cap S$ , y  $(R \cup S)^c$ .

6.57 Sea  $R$  la relación en los enteros positivos  $N$  definida por la ecuación  $x + 3y = 12$ ; es decir,

$$R = \{(x, y) : x + 3y = 12\}$$

- (a) Escriba  $R$  como un conjunto de parejas ordenadas.  
 (b) Encuentre (i) el dominio de  $R$ , (ii) el recorrido de  $R$ , y (iii)  $R^{-1}$ .

## RELACIONES DE EQUIVALENCIA

6.58 Sea  $W = \{1, 2, 3, 4\}$ . Considere las siguientes relaciones en  $W$ :

$$R_1 = \{(1, 1), (2, 1)\} \quad R_4 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$$

$$R_2 = \{(1, 3), (2, 3), (4, 1)\} \quad R_5 = \{(1, 3), (2, 4)\}$$

$$R_3 = \{(3, 4)\}$$

Determine cuáles de las relaciones son (a) reflexivas, (b) simétricas, (c) transitivas, (d) relaciones de equivalencia.

6.59 Sea  $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . La siguiente es una relación de equivalencia en  $S$ :

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5)\}$$

Encuentre la partición de  $S$  inducida por  $R$ .

6.60 Sea  $S = \{1, 2, 3, \dots, 19, 20\}$ . Sea  $R$  la relación de equivalencia en  $S$  definida por  $x \equiv y \pmod{5}$ , es decir,  $x - y$  es divisible por 5. Encuentre la partición de  $S$  inducida por  $R$ , es decir el conjunto cociente  $S/R$ .

6.61 Sean  $A = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$  y  $\sim$  la relación en  $A \times A$  definida por

$$(a, b) \sim (c, d) \quad \text{si } a + d = b + c$$

- (a) Demuestre que  $\sim$  es una relación de equivalencia.  
 (b) Encuentre  $[(2, 5)]$ , la clase de equivalencia de  $(2, 5)$ .

6.62 Demuestre que si  $R$  es una relación de equivalencia en un conjunto  $A$ , entonces  $R^{-1}$  es también una relación de equivalencia en  $A$ .

6.63 Sean  $R$  y  $S$  relaciones no vacías en un conjunto  $A$ . Suponiendo que  $A$  tiene por lo menos tres elementos, diga si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso. Si es falso, dé un contraejemplo en el conjunto  $A = \{1, 2, 3\}$ :

- (a) Si  $R$  y  $S$  son simétricas entonces  $R \cap S$  es simétrica.  
 (b) Si  $R$  y  $S$  son simétricas, entonces  $R \cup S$  es simétrica.  
 (c) Si  $R$  y  $S$  son reflexivas, entonces  $R \cap S$  es reflexiva.  
 (d) Si  $R$  y  $S$  son reflexivas, entonces  $R \cup S$  es reflexiva.  
 (e) Si  $R$  y  $S$  son transitivas, entonces  $R \cup S$  es transitiva.  
 (f) Si  $R$  es reflexiva, entonces  $R \cap R^{-1}$  no es vacío.  
 (g) Si  $R$  es simétrica, entonces  $R \cap R^{-1}$  no es vacío.

## FUNCIONES

6.64 Diga si cada diagrama de la fig. 6-38 define una función de  $\{1, 2, 3\}$  en  $\{4, 5, 6\}$ .

6.65 Defina cada función de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$  por una fórmula:

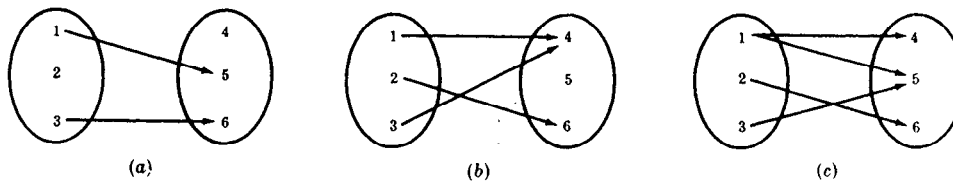


Figura 6-38

(a)  $f$  le asigna a cada número su cuadrado más 3.

(b)  $g$  le asigna a cada número su cubo más dos veces el número.

6.66 Sea  $W = \{a, b, c, d\}$ . Determine cuáles de los siguientes conjuntos de parejas ordenadas es una función de  $W$  en  $W$ .

- (a)  $\{(b, a), (c, d), (d, a), (c, d), (a, d)\}$  (c)  $\{(a, b), (b, b), (c, b), (d, b)\}$   
 (b)  $\{(d, d), (c, a), (a, b), (d, b)\}$  (d)  $\{(a, a), (b, a), (a, b), (c, d)\}$

6.67 Sea  $g$  la función que asigna a cada nombre en el conjunto  $\{\text{Beatriz, Martín, David, Adán, Rebeca}\}$  el número de letras diferentes necesarias para poder escribir el nombre. Encuentre la gráfica de  $g$ , o sea, escriba  $g$  como un conjunto de parejas ordenadas.

6.68 Sea  $V = \{1, 2, 3, 4\}$ . Determine si cada uno de los conjuntos de puntos en los diagramas de coordenadas de  $V \times V$  (fig. 6-39) es una función de  $V$  en  $V$ .

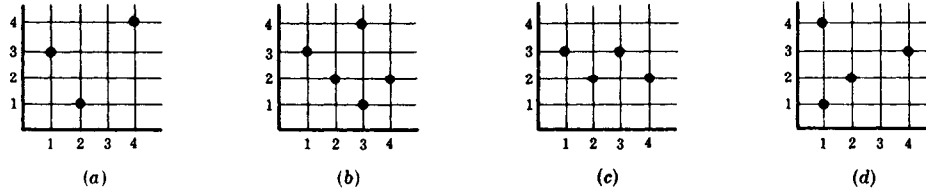


Figura 6-39

6.69 Sea  $W = \{1, 2, 3, 4\}$  y  $g : W \rightarrow W$  definida por la fig. 6-40. (a) Escriba  $g$  como un conjunto de parejas ordenadas. (b) Encuentre la imagen de  $g$ .

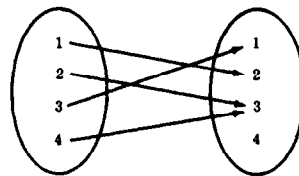


Figura 6-40



- 6.70 Considere las funciones  $f : A \rightarrow B$  y  $g : B \rightarrow C$ . La composición de  $f$  y  $g$ , escrita  $g \circ f$ , es la función de  $A$  en  $C$  definida por

$$(g \circ f)(a) = g(f(a))$$

Encuentre las funciones de composición  $f \circ g$ ,  $h \circ f$  y  $g \circ g$  (escrita  $g^2$ ), para las funciones  $f$ ,  $g$ , y  $h$  dibujadas en la fig. 6-41.

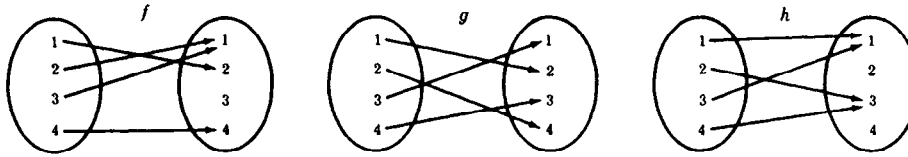


Figura 6-41

- 6.71 Considere las funciones  $f(x) = x^2 + 3x + 1$  y  $g(x) = 2x - 3$ . Encuentre fórmulas que definan las funciones compuestas (a)  $f \circ g$ , (b)  $g \circ f$ .
- 6.72 Determine el número de funciones diferentes de  $\{a, b\}$  en  $\{1, 2, 3\}$ .
- 6.73 Dibuje la gráfica de cada función:

$$(a) f(x) = \frac{1}{2}x - 1 \quad (b) g(x) = x^3 - 3x + 2 \quad (c) h(x) = \frac{1}{x}$$

### Respuestas a los problemas suplementarios

- 6.32  $\{1, 2\} = \{2, 1\} = \{1, 2, 1\} = B = C$ ,  $\{1, 3\} = \{3, 1, 3\} = A = D$
- 6.33  $A = \{a, e, i, o, u\}$ ,  $B = D = \{l, i, t, e\}$ ,  $C = \{a, b, c, d, e\}$
- 6.34 (a)  $C$  y  $E$ , (b)  $D$  y  $E$ , (c)  $A$ ,  $B$  y  $D$ , (d) ninguno
- 6.35 (a)  $\emptyset \subset A$ , (b)  $D \subset E$ , (c)  $A \not\subset B$ , (d)  $D \not\subset A$ , (e)  $B \subset C$ , (f)  $D \subset C$ , (g)  $C \not\subset D$ , (h)  $B \not\subset D$
- 6.36 (a)  $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$  (c)  $C \setminus D = \{b, c\}$  (e)  $(A \cap D) \cup B = \{a, b, d, e, f, g\}$   
 (b)  $B \cap C = \{b, g\}$  (d)  $A \cap (B \cup D) = \{a, b, d, e\}$  (f)  $B \cap C \cap D = \{g\}$
- 6.37  $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$
- 6.38 (a) infinito, (b) finito, (c) infinito, (d) finito, (e) finito, (f) infinito.
- 6.39 (a)  $A \cap (A \cup B) = A$ , (b)  $(A \cup B) \cap (A^c \cup B) \cap (A \cup B^c) \cap (A^c \cup B^c) = \emptyset$
- 6.41 Vea la fig. 6-42.

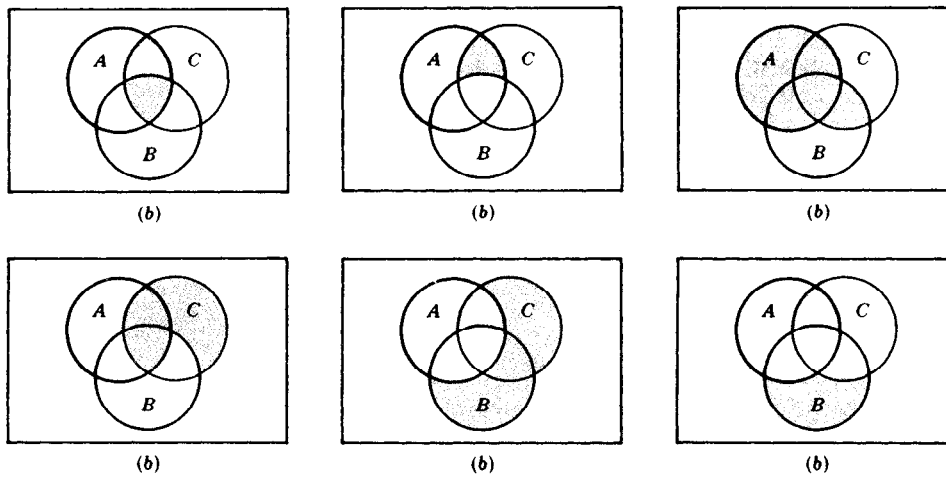


Figura 6-42

6.42 (a) 5. (b) Vea la fig. 6-43. (c) 48.

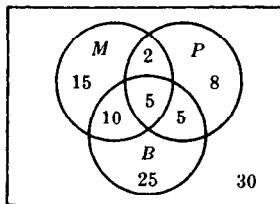


Figura 6-43

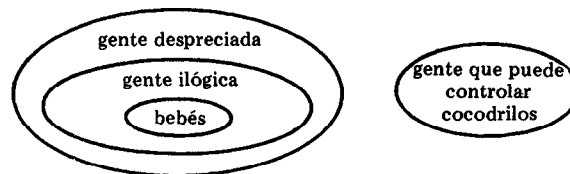


Figura 6-44

6.43 Las premisas indican el diagrama de Venn de la fig. 6-44. La conclusión evidentes es: “Los bebés no pueden controlar a los cocodrilos”. También se puede concluir que la gente que puede controlar a los cocodrilos es lógica.)

6.44 Las premisas indican el diagrama de Venn de la fig. 6-45. (a) no, (b) sí, (c) sí.



Figura 6-45

6.45  $\mathcal{P}(S) = [\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{3, 4, 5\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}, S]$

Hay  $2^5 = 32$  conjuntos en  $\mathcal{P}(S)$ .

6.46 (c) y (d)

6.47 Hay cinco:  $\{\{1, 2, 3\}\}, \{\{1\}, \{2, 3\}\}, \{\{2\}, \{1, 3\}\}, \{\{3\}, \{1, 2\}\},$  y  $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}.$

6.49  $\{\{1, 3\}, \{2\}, \{4\}, \{5\}\}$

6.50  $P_1 = (a, b), P_2 = (b, d), P_3 = (d, c), P_4 = (c, a)$

6.51 (a)  $x = 3, y = -2,$  (b)  $x = 2, y = 3$

6.52 (a)  $W \times V = \{(\text{Marcos}, \text{Eva}), (\text{Marcos}, \text{David}), (\text{Eva}, \text{Eva}), (\text{Eva}, \text{David}), (\text{Pablo}, \text{Eva}), (\text{Pablo}, \text{David})\}$

(b)  $V \times W = \{(\text{Eva}, \text{Marcos}), (\text{David}, \text{Marcos}), (\text{Eva}, \text{Eva}), (\text{David}, \text{Eva}), (\text{Eva}, \text{Pablo}), (\text{David}, \text{Pablo})\}$

(c)  $V \times V = \{(\text{Eva}, \text{Eva}), (\text{Eva}, \text{David}), (\text{David}, \text{Eva}), (\text{David}, \text{David})\}$

6.53 Vea la fig. 6-46.  $S \times T \times W = \{(a, b, a), (a, b, d), (a, c, a), (a, c, d), (a, d, a), (a, d, d), (b, b, a), (b, b, d), (b, c, a), (b, c, d), (b, d, a), (b, d, d), (c, b, a), (c, b, d), (c, c, a), (c, c, d), (c, d, a), (c, d, d)\}$

6.54 (a) dominio =  $\{1, 3\}$ , recorrido =  $\{2, 3, 4\}$

(b) Vea la fig. 6-47.

(c)  $M_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(d)  $R^{-1} = \{(3, 1), (4, 1), (2, 3), (3, 3), (4, 3)\}$

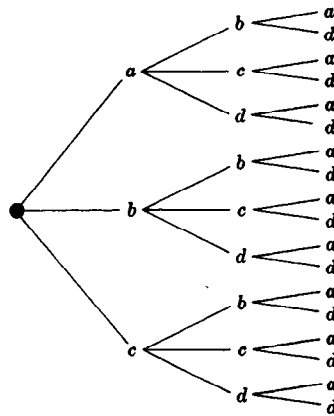


Figura 6-46

- 6.55 (1) (a) Verdadero, (b) Falso, (c) Falso, (d) Verdadero  
 (2) (a)  $\{1, 4, 5\}$ , (b)  $\emptyset$ , (c)  $\{2, 3, 4\}$ , (d)  $\{3\}$   
 (3) (a)  $\{1, 3, 5\}$ , (b)  $\{1, 2, 4, 5\}$ , (c)  $R^{-1} = \{(1, 3), (1, 5), (2, 1), (2, 5), (4, 1), (4, 3), (4, 5), (5, 3)\}$   
 (4) Vea la fig. 6-48.

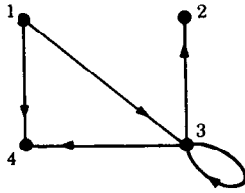


Figura 6-47

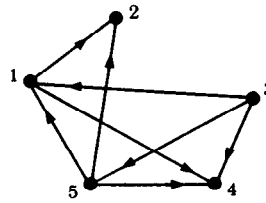
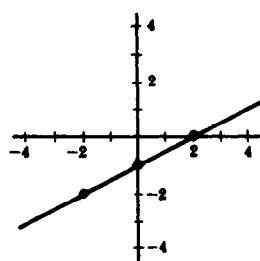


Figura 6-48

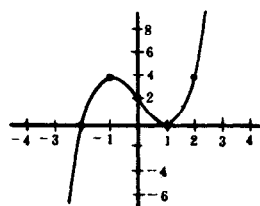
- 6.56  $R \cup S = \{(a, a), (a, c), (b, a), (c, b), (c, c), (c, d), (d, a), (d, b)\}$   
 $R \cap S = \{(c, d)\}$   
 $(R \cup S)^c = \{(a, b), (a, d), (b, b), (b, c), (b, d), (c, a), (d, c), (d, d)\}$
- 6.57 (a)  $\{(9, 1), (6, 2), (3, 3)\}$ ; (b) (i)  $\{9, 6, 3\}$ , (ii)  $\{1, 2, 3\}$ ; (iii)  $\{(1, 9), (2, 6), (3, 3)\}$ , o la relación definida por la ecuación  $3x + y = 12$ .
- 6.58 (a) ninguna, (b)  $R$  (c) todas excepto  $R$ , (d) ninguna
- 6.59  $S/R = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4, 5\}\}$
- 6.60  $\{\{1, 6, 11, 16\}, \{2, 7, 12, 17\}, \{3, 8, 13, 18\}, \{4, 9, 14, 19\}, \{5, 10, 15, 20\}\}$
- 6.61 (b)  $\{(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 7), (5, 8), (6, 9)\}$
- 6.63 Todos son verdaderos excepto (e); tome  $R = \{(1, 2)\}$ ,  $S = \{(2, 3)\}$ .
- 6.64 (a) No, (b) Si, (c) No
- 6.65 (a)  $f(x) = x^2 + 3$ , (b)  $g(x) = x^3 + 2x$
- 6.66 (a) Si, (b) No, (c) Si, (d) No
- 6.67  $g = \{(\text{Beatriz}, 7), (\text{Martín}, 6), (\text{David}, 4), (\text{Adán}, 3), (\text{Rebeca}, 5)\}$
- 6.68 (a) No, (b) No, (c) Si, (d) No
- 6.69 (a)  $g = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (4, 3)\}$ , (b)  $\{1, 2, 3\}$
- 6.70
- | $x$ | $(f \circ g)(x)$ | $(h \circ f)(x)$ | $g^2(x)$ |
|-----|------------------|------------------|----------|
| 1   | 1                | 3                | 4        |
| 2   | 4                | 1                | 3        |
| 3   | 2                | 1                | 2        |
| 4   | 1                | 3                | 1        |
- 6.71 (a)  $(f \circ g)(x) = 4x^2 - 6x + 1$ , (b)  $(g \circ f)(x) = 2x^2 + 6x - 1$
- 6.72 Nueve



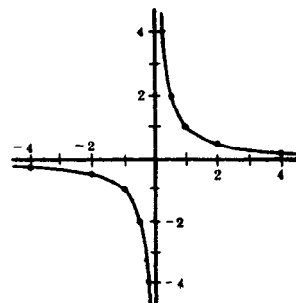
6.73 Vea la fig. 6-49.

Gráfica de  $f$ 

(a)

Gráfica de  $g$ 

(b)

Gráfica de  $h$ 

(c)

Figura 6-49

# Capítulo 7

## Álgebra de Boole, compuertas lógicas

### 7.1 INTRODUCCION

Tanto los conjuntos (capítulo 6) como las proposiciones (capítulo 4) tienen propiedades similares, como se puede ver comparando las tablas 6-1 y 4-1. Estas propiedades se usan para definir una estructura matemática llamada *álgebra de Boole*, en honor de George Boole (1813-1864). Este capítulo examina el álgebra de Boole primero en abstracto, y luego en dos casos concretos, los circuitos de interruptores y las compuertas lógicas.

### 7.2 ALGEBRA DE BOOLE

Sea  $B$  un conjunto en el cual se han definido dos operaciones binarias,  $+$  y  $*$ , y una operación unitaria, denotada  $'$ ; sean 0 y 1 dos elementos diferentes de  $B$ . Entonces a la sextupla

$$\langle B, +, *, ', 0, 1 \rangle$$

se le llama *álgebra de Boole* si se cumplen los siguientes axiomas para elementos  $a, b, c$  cualesquiera en el conjunto  $B$ :

[B<sub>1</sub>] Leyes conmutativas:

$$(1a) \quad a + b = b + a \qquad (1b) \quad a * b = b * a$$

[B<sub>2</sub>] Leyes distributivas:

$$(2a) \quad a + (b * c) = (a + b) * (a + c) \qquad (2b) \quad a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$$

[B<sub>3</sub>] Leyes de identidad:

$$(3a) \quad a + 0 = a \qquad (3b) \quad a * 1 = a,$$

[B<sub>4</sub>] Leyes de complemento:

$$(4a) \quad a + a' = 1 \qquad (4b) \quad a * a' = 0$$

La anterior álgebra de Boole se denota sencillamente  $B$  cuando se subentiende cuáles son las operaciones.

Al elemento 0 se le llama elemento *cero*, al elemento 1 se le llama elemento *unidad*, y a  $a'$  se le llama *complemento* de  $a$ . A los resultados de las operaciones  $+$  y  $*$  se les llama respectivamente *suma* y *producto*. Frecuentemente omitimos el símbolo  $*$ , usándose en lugar yuxtaposición. Entonces, (2b) y (2c) se escriben:

$$(2b) \quad a(b + c) = ab + ac \qquad (2a) \quad a + bc = (a + b)(a + c)$$

La primera es la identidad familiar, pero la segunda no es una identidad del álgebra ordinaria.

Adoptamos la convención usual de que, a no ser que se indique otra cosa con paréntesis, tiene precedencia sobre  $*$ , y  $*$  tiene precedencia sobre  $+$ . Por ejemplo,

$$a + b * c \text{ significa } a + (b * c) \text{ y no } (a + b) * c$$

$$a * b' \text{ significa } a * (b') \text{ y no } (a * b)'.$$

Por supuesto que cuando escribimos  $a + b * c$  en la forma  $a + bc$ , está claro lo que se quiere decir.

#### EJEMPLO 7.1

(a) Sea  $B$  el conjunto de dos elementos,  $\{0, 1\}$ , con operaciones  $+$  y  $*$  definidas en la fig. 7-1. Supongamos que los complementos se definen por  $1' = 0$  y  $0' = 1$ .  $B$  es entonces un álgebra de Boole.  $\sim$

+	1	0
1	1	1
0	1	0

(a)

*	1	0
1	1	0
0	0	0

(b)

Figura 7-1

- (b) Ahora una generalización de (a). Sea  $B_n$  el conjunto de sucesiones de  $n$  bits. Defina la suma, producto y complementos de estas sucesiones bit por bit como en (a). Por ejemplo, dados los elementos

$$a = 1101010 \quad b = 1011011$$

de  $B_7$ , tenemos

$$a + b = 1111011 \quad a * b = 1001010 \quad a' = 0010101$$

O sea, en una posición dada,  $a + b$  contiene 1 si  $a$  o  $b$  contiene 1;  $a * b$  contiene 1 si  $a$  y  $b$  contienen 1; y  $a'$  contiene 1 si  $a$  no contiene 1, o sea si  $a$  contiene 0.  $B_n$  es entonces un álgebra de Boole.

- (c) Sea  $\mathcal{C}$  una colección de conjuntos cerrados bajo uniones, intersecciones y complementos.  $\mathcal{C}$  es entonces un álgebra de Boole, con el conjunto vacío  $\phi$  como el elemento cero y el conjunto universal  $U$  como el elemento unidad.
- (d) Sea  $\Pi$  el conjunto de las proposiciones.  $\Pi$  es entonces un álgebra de Boole bajo las operaciones  $\vee$  y  $\wedge$ , con la negación  $\sim$  como complemento. (Las proposiciones en  $\Pi$  que son lógicamente equivalentes, o sea que tienen la misma tabla de verdad, se toman como idénticas.) Como se ve de la tabla 4-1, una contradicción  $f$  es el cero, y una tautología  $t$  es el elemento unidad.
- (e) Sean  $D_{70} = \{1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70\}$ , los divisores de 70. Defina  $+$ ,  $*$  y  $'$  en  $D_{70}$  por

$$a + b \equiv \text{MCM}(a, b) = \text{mínimo común múltiplo de } a \text{ y } b$$

$$a * b \equiv \text{mcd}(a, b) = \text{máximo común divisor de } a \text{ y } b$$

$$a' \equiv \frac{70}{a}$$

Por ejemplo,

$$10 + 14 = \text{mcm}(10, 14) = 70 \quad 10 * 14 = \text{mcd}(10, 14) = 2 \quad 10' = \frac{70}{10} = 7$$

$D_{70}$  es entonces un álgebra de Boole, con 1 como el elemento cero y 70 como elemento unidad.

### 7.3 DUALIDAD

El *dual* de cualquier enunciado en un álgebra de Boole  $B$  es el enunciado obtenido al intercambiar las operaciones  $+$  y  $*$ , e intercambiar los correspondientes elementos identidad 0 y 1, en el enunciado original. Por ejemplo, el dual de

$$(1 + a) * (b + 0) = b \quad \text{es} \quad (0 * a) + (b * 1) = b$$

Observe la simetría de los axiomas de una álgebra de Boole  $B$ . Resulta que el dual de los axiomas de  $B$  es el mismo conjunto original de axiomas. De esta manera, tenemos

**Teorema 7.1 (Principio de Dualidad):** El dual de cualquier teorema en un álgebra de Boole es también un teorema.

En otras palabras, si cualquier enunciado es una consecuencia de los axiomas de un álgebra de Boole, entonces el dual también es una consecuencia de estos axiomas, ya que el enunciado dual se puede probar usando el dual de cada paso en la demostración del enunciado original.

### 7.4 TEOREMAS BASICOS

Usando los axiomas  $[B_1]$  a  $[B_4]$ , demostramos (problema 7.15) el siguiente teorema.





- (c) La relación  $\leq$  también es un orden parcial en los enteros positivos  $N$ . (En efecto  $\leq$  es un orden parcial en cualquier subconjunto de los números reales.) A esta relación se le llama a veces orden usual de  $N$ . Observe que  $N$  es totalmente ordenado por  $\leq$ , ya que para dos enteros  $a$  y  $b$ , o  $a \leq b$  o  $b \leq a$ .

La noción de conjunto parcialmente ordenado se incluye en el contexto de las álgebras de Boole debido al siguiente teorema:

**Teorema 7.5:** Sea  $B$  un álgebra de Boole.  $B$  es entonces parcialmente ordenado, siendo  $a \leq b$  si y sólo si  $a + b = b$ .

### EJEMPLO 7.3

- (a) Sea  $B$  cualquier álgebra de Boole. Entonces, para cualquier elemento  $a$  de  $B$ ,

$$0 \leq a \leq 1$$

ya que  $0 + a = a$  y  $a + 1 = 1$ .

- (b) Considere el álgebra de Boole de conjuntos [ejemplo 7.1(c)]. Entonces el conjunto  $A$  precede al conjunto  $B$  si  $A$  es un subconjunto de  $B$ .
- (c) Considere el álgebra de Boole del cálculo proposicional [ejemplo 7.1(d)]. Entonces, la proposición  $P$  precede a la proposición  $Q$  si  $P$  implica lógicamente a  $Q$  (véase la sec. 4.10).

Un conjunto finito parcialmente ordenado  $S$  y, en particular, un álgebra de Boole finita  $S$ , se puede representar por un diagrama de la siguiente manera. Un elemento  $B$  de  $S$  se dice que es un *sucesor inmediato* de un elemento  $a$ , escrito  $a << b$ , si  $a < b$ , pero no hay ningún elemento  $x$  de  $S$  tal que  $a < x < b$ . En el diagrama  $S$ , los elementos se representan por puntos y habrá una flecha, o una línea dirigida hacia arriba, de un elemento  $a$  a un elemento  $b$  cada vez que  $a << b$ . En caso de que  $S$  sea un álgebra de Boole, el elemento cero estará en la parte más baja del diagrama y el elemento unidad en la parte más alta.

**EJEMPLO 7.4** Sea  $A = \{a, b, c\}$  y sea  $\mathcal{P}(A)$  la colección de todos los subconjuntos de  $A$ :

$$\mathcal{P}(A) = [A, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \emptyset]$$

$\mathcal{P}(A)$  es, entonces, un álgebra de Boole de conjuntos cuyo diagrama se da en la fig. 7-2. Observe que  $\emptyset$  está abajo en el diagrama y  $A$  está arriba.

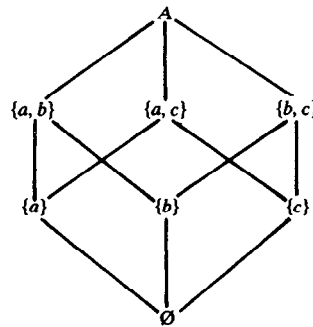


Figura 7-2

Sea  $B$  una álgebra de Boole. Un elemento  $a$  de  $B$  se llama *átomo* de  $B$  si es un sucesor inmediato del elemento cero. Así, en el ejemplo 7.4; los átomos son los tres conjuntos con un sólo elemento  $\{a\}$ ,  $\{b\}$  y  $\{c\}$ . Observe que  $\mathcal{P}(A)$  contiene  $2^3 = 8$  elementos, y que todo conjunto no vacío en  $\mathcal{P}(A)$  es la unión de una colección única de átomos. Este resultado es verdadero en general; o sea,

**Teorema 7.6:** Sea  $B$  un álgebra de Boole finita con  $n$  átomos.  $B$  tiene entonces  $2^n$  elementos, y todo elemento no nulo de  $B$  es la suma de un conjunto único de átomos.

## 7.6 EXPRESIONES DE BOOLE: FORMA SUMA DE PRODUCTOS

Considere un conjunto de variables (o de letras o de símbolos), digamos  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Una *expresión Booleana*  $E$  en estas variables, algunas veces escrito  $E(x_1, \dots, x_n)$ , es una variable o una expresión construida con estas variables que usan las operaciones Booleanas  $+$ ,  $*$  y  $'$ . Por ejemplo,

$$E = (x + y'z)' + (xyz' + x'y)' \quad \text{y} \quad F = ((xy'z' + y)' + x'z)'$$

son expresiones de Boole en  $x, y$  y  $z$ .

Un *literal* es una variable o una variable complementada, como  $x, x', y, y'$ . Un producto fundamental es un literal o un producto de dos o más literales en los cuales no hay dos literales con una misma variable. Por ejemplo,  $xz', xy'z, x, y', yz', x'yz$  son productos fundamentales. Sin embargo,  $xyx'z$  y  $xyzy$  no lo son; el primero contiene  $x$  y  $x'$  y el segundo contiene  $y$  en dos sitios. Observe que

$$xyx'z = xx'yz = 0yz = 0$$

(ya que  $x * x' = 0$ , por la ley de complemento) y

$$xyzy = xyyz = xyz$$

(ya que  $y * y = y$ , por la ley de idempotencia). En otras palabras, todo producto de Boole se puede reducir a 0 o a un producto fundamental.

Un producto fundamental,  $P_1$ , se dice que está *incluido* o *contenido* en otro producto fundamental,  $P_2$ , si los literales de  $P_1$  son también literales de  $P_2$ . Por ejemplo,  $x'z$  está incluido en  $x'yz$ , ya que  $x'$  y  $z$  son literales de  $x'yz$ . Sin embargo,  $x'z$  no está contenido en  $xy'z$ , ya que  $x'$  no es un literal de  $xy'z$ . En caso de que  $P_1$  esté incluido en  $P_2$ , entonces por la ley de absorción

$$P_1 + P_2 = P_2$$

Por ejemplo,  $x'z + x'yz = x'z$ .

Una expresión de Boole  $E$  se dice que está en forma de *suma de productos* o en forma *min-term* si  $E$  es un producto fundamental, o es la suma de dos o más productos fundamentales, ninguno de los cuales está incluido en otro. Por ejemplo, considere las expresiones

$$E_1 = xz' + y'z + xyz' \quad \text{y} \quad E_2 = xz' + x'yz' + xy'z$$

Aunque la primera expresión,  $E_1$ , es una suma de productos, no está en la forma de suma de productos, ya que  $xz'$  está contenida en  $xyz'$ . Sin embargo, por la ley de absorción,  $E_1$  se puede expresar como

$$E_1 = xz' + y'z + xyz' = xz' + xyz' + y'z = xz' + y'z$$

que está en forma de suma de productos. La segunda expresión  $E_2$ , ya está en forma de suma de productos.

Toda expresión de Boole no nula  $E$  se puede poner en forma de suma de productos con el siguiente procedimiento:

- (1) Usando las leyes de DeMorgan y la involución, podemos mover la operación de complemento dentro de cualquier paréntesis hasta que finalmente se aplique solamente a variables.  $E$  consistirá entonces solamente en sumas y productos de literales.
- (2) Usando la ley distributiva, podemos transformar  $E$  en una suma de productos.

- (3) Usando las leyes conmutativa, de idempotencia y de complemento, podemos transformar cada producto en  $E$  en 0 o en un producto fundamental. Finalmente, usando la ley de absorción, podemos poner  $E$  en forma de suma de productos.

**EJEMPLO 7.5** Considere la expresión Booleana  $E = ((ab)'c)((a' + c)(b' + c'))'$ . Aplicando el anterior algoritmo,

$$(1) \quad E = ((ab)' + c')((a' + c)' + (b' + c')') = (ab + c')(ac' + bc)$$

$$(2) \quad E = abac' + abbc + ac'c' + bcc'$$

$$(3) \quad E = abc' + abc + ac' + 0 = ac' + abc$$

Una expresión de Boole (no nula)  $E(x_1, x_2, \dots, x_n)$  se dice que está en *forma completa de suma de productos* si  $E$  está en forma de suma de productos, y en cada producto se usan todas las variables (obsérvese que máximo hay  $2^n$  tales productos). Cualquier expresión de Boole  $E$  que sea una suma de productos se puede escribir en forma completa de suma de productos. En efecto, si un producto fundamental  $P$  de  $E$  no usa  $x_i$ , entonces podemos multiplicar  $P$  por  $x_i + x_i'$ ; éste se puede hacer ya que  $x_i + x_i' = 1$ . Continuamos hasta que todos los productos usen todas las variables. Otra consideración demuestra que la forma completa de suma de productos es única. En resumen:

**Teorema 7.7:** Toda expresión Booleana no nula  $E(x_1, x_2, \dots, x_n)$  se puede poner en forma completa de suma de productos, y tal representación es única.

## 7.7 COMPUERTAS LOGICAS

En esta sección estudiamos cierto tipo de circuitos llamados *circuitos lógicos*. Estos circuitos pueden visualizarse como máquinas que contienen uno o más dispositivos de entrada y exactamente un dispositivo de salida. En cada instante cada dispositivo de entrada tiene exactamente un bit de información, o sea, un 0 o un 1; estos datos son procesados por el circuito para dar un bit de salida, o sea, un 0 o un 1 en el dispositivo de salida. Así, a los dispositivos de entrada se les pueden asignar sucesiones de bits (todas las sucesiones con el mismo número de bits) que son procesados por el circuito bit por bit para producir una sucesión con el mismo número de bits.

Podemos interpretar un bit como un voltaje a través de un dispositivo de entrada/salida; aún más, una sucesión de bits, digamos 1000110, se representa frecuentemente como sigue:

$$\overline{1} \boxed{000} \boxed{11} \overline{0}$$

Podemos suponer que el circuito siempre procesa la sucesión de izquierda a derecha o de derecha a izquierda. A no ser que se diga otra cosa, adoptaremos la primera convención.

Los circuitos lógicos se construyen a partir de ciertos circuitos elementales llamados *compuertas lógicas*, tres de las cuales estudiaremos ahora. En la sec. 7.8 examinaremos los circuitos lógicos en general.

### Compuerta OR

La figura 7-3(a) muestra una compuerta OR con entradas  $A$  y  $B$  y salida  $Y$ . Denotamos la salida de una compuerta OR en la forma

$$Y = A + B$$

en donde “la adición” está definida en la fig. 7-1(a). Es decir,  $Y = 1$  si  $A = 1$  o  $B = 1$ , y  $Y = 0$  sólo si tanto  $A = 0$  como  $B = 0$ . Por ejemplo, supongamos que a  $A$  y a  $B$  se les asignan las siguientes sucesiones de bits:

$$A = 11000110$$

$$B = 10010101$$

Entonces la compuerta OR producirá la sucesión

$$A + B = 11010111$$

(Este resultado se puede obtener leyendo  $A$  y  $B$  de derecha a izquierda o de izquierda a derecha.)

Comúnmente queremos saber la salida de un circuito lógico para todas las combinaciones diferentes posibles de bits de entrada. Para dos entradas,  $A$  y  $B$ , las *sucesiones especiales* que dan estas diferentes combinaciones contienen cuatro bits, como sigue:

$$\begin{array}{ll} A = 0011 & \text{o} & A = 0011 \\ B = 0101 & & B = 1001 \end{array}$$

(En general, sucesiones especiales para  $n$  entradas contendrán  $2^n$  bits.) El valor de la salida para estas sucesiones especiales se llama *tabla de verdad* para el circuito. La fig. 7-3(b) es la tabla de verdad para la compuerta OR de la fig. 7-3(a); las sucesiones en esta tabla de verdad se escriben vertical y no horizontalmente. Cuando el número de entradas es grande, por lo común escribimos tales sucesiones horizontalmente, como antes.

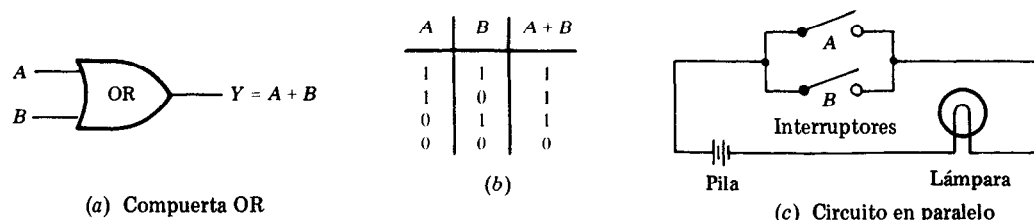


Figura 7-3

La figura 7.3(c) ilustra, para la compuerta OR de la figura 7-3(a), la estrecha relación entre los circuitos lógicos y los circuitos eléctricos de interruptores. Un circuito eléctrico de interruptores normalmente contiene alguna fuente de energía (por ejemplo, una pila), un dispositivo de salida (por ejemplo, una lámpara), y uno o más interruptores —todos ellos conectados por alambres. Un interruptor es un dispositivo de dos estados que está cerrado (encendido) o abierto (apagado), y la corriente puede pasar a través del interruptor solamente cuando el interruptor está cerrado. En la fig. 7-3(c) dos interruptores,  $A$  y  $B$ , están conectados en paralelo. Observe que la lámpara encenderá, si el interruptor  $A$  está cerrado o si el interruptor  $B$  está cerrado, o si ambos interruptores están cerrados. Pero ésta es precisamente la propiedad descrita en la tabla de verdad para la compuerta OR, en donde 1 denota que el interruptor ( $A$ ,  $B$ ) o la lámpara ( $A + B$ ) está encendido y un 0 denota que está apagado.

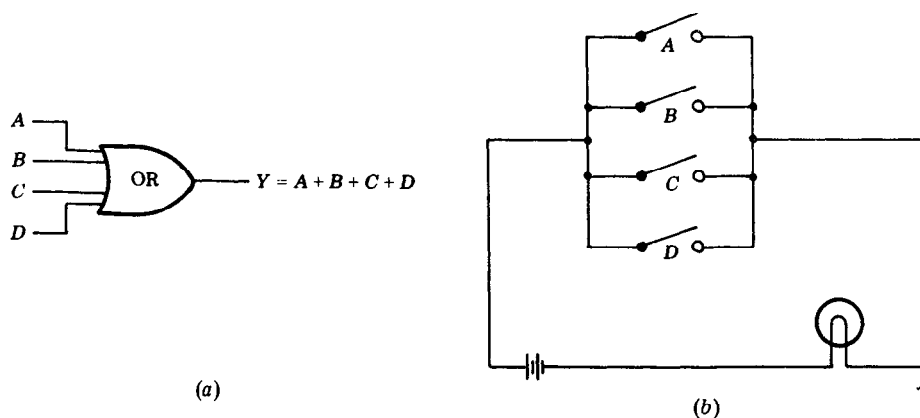


Figura 7-4

Las compuertas OR pueden tener más de dos entradas. La figura 7-4(a) muestra una compuerta OR con cuatro entradas,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , y  $D$ , y salida

$$Y = A + B + C + D$$

La salida es 0 si y sólo si todas las entradas son 0. Así que las cuatro sucesiones de entrada

$$\begin{aligned} A &= 1000101 \\ B &= 1010001 \\ C &= 00100100 \\ D &= 10010101 \end{aligned}$$

dan

$$Y = 10110101$$

como la sucesión de salida. El circuito análogo de interruptores aparece en la fig. 7-4(b); claramente, la lámpara estará encendida si y sólo si uno (o más) de los cuatro interruptores están encendidos.

### Compuerta AND

La figura 7-5(a) representa una compuerta AND, con entradas  $A$  y  $B$  y salida  $Y$ . Designamos la salida de una compuerta AND como el producto de las entradas,

$$Y = A \cdot B$$

o, sencillamente  $Y = AB$ . El valor de  $Y$  está determinado por la tabla de "multiplicación" de la fig. 7-1(b). Es decir,  $Y = 1$  cuando tanto  $A = 1$  como  $B = 1$ ; de otro modo,  $Y = 0$ . Por ejemplo, suponga que a  $A$  y a  $B$  se les asignan las siguientes sucesiones de bits:

$$\begin{aligned} A &= 11000110 \\ B &= 01101101 \end{aligned}$$

La compuerta AND producirá la sucesión

$$A \cdot B = 01000100$$

La tabla de verdad para esta compuerta AND aparece en la fig. 7-5(b), en donde de nuevo se escriben las sucesiones verticalmente.

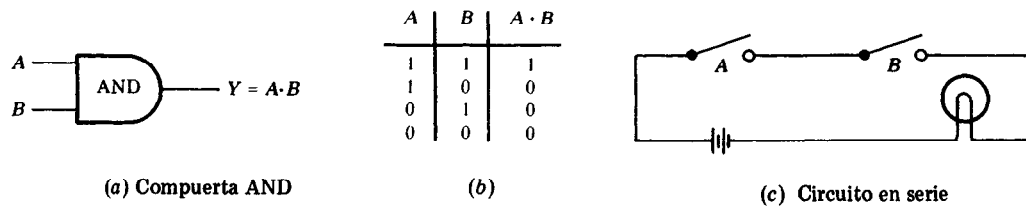


Figura 7-5

La figura 7-5(c) es un circuito de interruptores que muestra dos interruptores,  $A$  y  $B$ , conectados en serie. Observe que la lámpara encenderá solamente cuando están cerrados tanto  $A$  como  $B$ . Esta es exactamente la propiedad descrita por la tabla de verdad para la compuerta AND, si una vez más denotamos por 1 que el elemento del circuito está encendido y por 0 si está apagado.

Una compuerta AND también puede tener más de dos entradas. La figura 7-7(a) muestra una compuerta AND con cuatro entradas,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , y  $D$ , y la salida

$$Y = A \cdot B \cdot C \cdot D \quad \text{o} \quad Y = ABCD$$

La salida es 1 si y sólo si todas las entradas son 1. Así, las cuatro sucesiones de entrada

$A = 11100111$   
 $B = 01111011$   
 $C = 01110011$   
 $D = 11101110$

dan

$Y = 01100010$

como la sucesión de salida. El circuito análogo de interruptores aparece en la fig. 7-6(b); claramente, la lámpara se encenderá cuando todos los interruptores están prendidos.

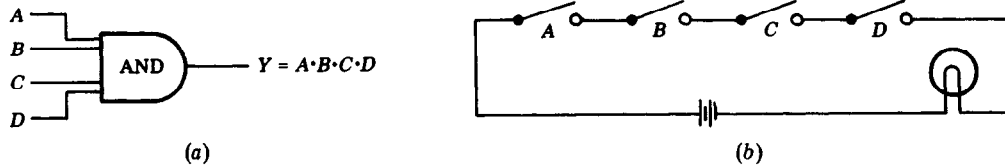


Figura 7-6

### Compuerta NOT

La figura 7-7(a) muestra una compuerta NOT, también llamada *inversor*, con entrada  $A$  y salida  $Y$ . La compuerta NOT puede tener solamente una entrada, y su salida se representa colocando una barra sobre la entrada.

$$Y = \bar{A}$$

El valor de la salida  $Y$  es el opuesto (complemento a unos) del valor de la entrada  $A$ ; o sea  $Y = 1$  cuando  $A = 0$ , y  $Y = 0$  cuando  $A = 1$ . Así que si a  $A$  se le asigna la sucesión de bits

$A = 11000110$

la compuerta NOT producirá la sucesión

$\bar{A} = 00111001$

La tabla de verdad para la compuerta NOT aparece en la fig. 7-7(b).

Los circuitos de interruptores también contienen el análogo de la compuerta NOT. Específicamente, junto con cualquier interruptor  $A$  podemos incluir un interruptor  $\bar{A}$  que está abierto cuando  $A$  está cerrado, y está cerrado cuando  $A$  está abierto. Este interruptor  $\bar{A}$ , representado en la fig. 7-7(c), se llama *complemento* del interruptor  $A$ . (También podríamos representar a  $\bar{A}$ , como una lámpara en paralelo con el interruptor  $A$ , estando la combinación en serie con una pila. Con el interruptor cerrado, la lámpara quedaría en corto circuito (apagada); con el interruptor abierto, la lámpara estaría encendida.)

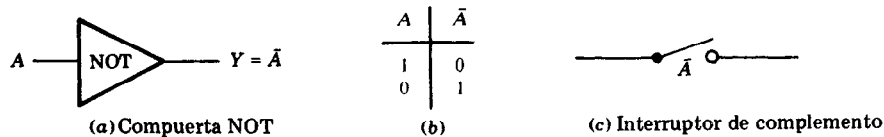


Figura 7-7

## 7.8 CIRCUITOS LOGICOS

Las tablas de verdad para las compuertas OR, AND y NOT, figuras 7-3(b), 7-5(b), y 7-7(b), son respectivamente idénticas a las correspondientes a las proposiciones  $p \vee q$  (disyunción, “ $p$  o  $q$ ”),  $p \wedge q$  (conjunción, “ $p$  y  $q$ ”), y  $\sim p$  (negación, “no  $p$ ”), las cuales aparecen en la secs. 4.3,

4.2, y 4.4. La única diferencia es que aquí se usan el 1 y el 0 en vez de V y F. Así que los circuitos lógicos, de los cuales estas compuertas son los circuitos elementos, satisfacen las mismas leyes de las proposiciones, y así forman un álgebra de Boole. Escribimos este resultado formalmente.

**Teorema 7.8:** Los circuitos lógicos forman un álgebra de Boole.

Los circuitos lógicos vienen en varios patrones. Trataremos especialmente un patrón que corresponde a una expresión de Boole de suma de productos. Específicamente, un circuito AND-OR tiene varias entradas, con algunas de las entradas o sus complementos alimentando cada compuerta AND. Las salidas de todas las compuertas AND alimentan una sola compuerta OR, la cual da la salida para el circuito. (En los casos límites, puede haber una sola compuerta AND y ninguna compuerta OR, o una sola compuerta OR y ninguna compuerta AND.) La fig. 7-8(a) es un típico circuito AND-OR, con tres entradas,  $A$ ,  $B$ , y  $C$ . (Frecuentemente, para economizar espacio, omitimos la palabra del interior del símbolo de la compuerta.)

Dado cualquier circuito lógico  $L$ , queremos averiguar el efecto de  $L$  en cualquier entrada arbitraria; usualmente esto se especifica por medio de una tabla de verdad. La tabla de verdad de  $L$  se obtiene escribiendo primero  $L$  como una expresión de Boole  $L(A, B, C, \dots)$ , con entradas  $A, B, C, \dots$ , y calculando entonces la tabla de verdad paso por paso, como hicimos para las tablas de verdad de las proposiciones. Se obtiene la expresión de Boole en sí del circuito siguiendo las entradas a través de todas las compuertas, rotulando cuando sea necesario cada compuerta con sus entradas y su salida. En un circuito AND-OR, solamente tenemos que rotular cada compuerta AND con sus entradas y su salida, y luego rotular la salida de la compuerta OR, la cual es la salida del circuito, con la suma de las salidas de las compuertas AND.

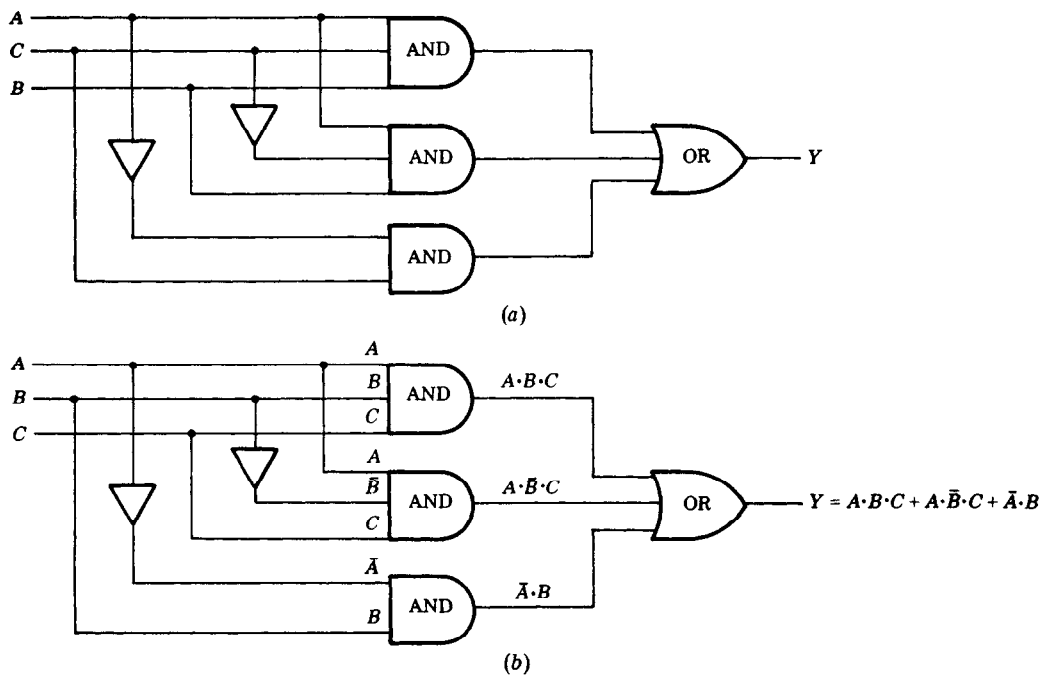


Figura 7-8

**EJEMPLO 7.6** Considere el circuito lógico de la fig. 7-8(a). Rotulamos la primera compuerta AND con las entradas  $A$ ,  $B$ , y  $C$ , y la salida  $A \cdot B \cdot C$ ; la segunda compuerta AND con las entradas  $A$ ,  $B$ , y  $C$ , y la salida

$A \cdot B \cdot C$ ; y la tercera compuerta AND con las entradas  $A$  y  $B$ , y la salida  $\bar{A} \cdot B$ . Véase la fig. 7-8(b). Entonces la salida de la compuerta OR, que es la salida del circuito, es la expresión de Boole.

$$Y = A \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot C + \bar{A} \cdot B$$

Observe que ésta es una suma de productos.

Ahora se puede encontrar la tabla de verdad del circuito substituyendo en la expresión de Boole las tres sucesiones especiales

$$\begin{aligned} A &= 00001111 \\ B &= 00110011 \\ C &= 01010101 \end{aligned}$$

Un bit dado en  $A \cdot B \cdot C$  será 1 si y sólo si  $A$ ,  $B$ , y  $C$  tienen un 1 en esta posición. De donde,

$$A \cdot B \cdot C = 00000001$$

Análogamente,

$$A \cdot \bar{B} \cdot C = 00000100$$

$$\bar{A} \cdot B = 00110000$$

Así que,

$$Y = 00110101$$

es la salida. La tabla de verdad consta de las sucesiones de entrada junto con la sucesión de salida:

$A$	00001111
$B$	00110011
$C$	01010101
$Y$	00110101

Como los circuitos lógicos forman una álgebra de Boole, se puede usar los teoremas del álgebra de Boole para simplificar los circuitos. Por ejemplo, la salida  $Y$  de la fig. 7-8 puede ser simplificada de la siguiente manera:

$$Y = A \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot C + \bar{A} \cdot B = AC(B + \bar{B}) + \bar{A}B = AC \cdot 1 + \bar{A}B = AC + \bar{A}B$$

Así el circuito lógico de la fig. 7-8 puede ser reemplazado por el circuito lógico más sencillo que se muestra en la fig. 7-9, cuya salida es  $Y = A \cdot C + \bar{A} \cdot B$ . Resaltamos que los dos circuitos son equivalentes, es decir, tienen la misma tabla de verdad. El problema de circuitos más sencillos y cómo obtenerlos será el tema principal del capítulo 8.

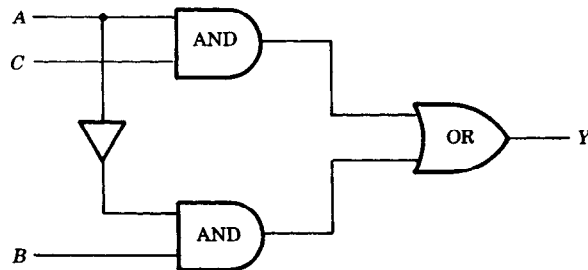


Figura 7-9

Aunque primero se introdujeron las tablas de verdad en conexión con las proposiciones, y luego en conexión con los circuitos lógicos, realmente son una propiedad de las expresiones de Boole en general. En efecto, la tabla de verdad (única) de una expresión de Boole equivale a la única forma completa de suma de productos dada por el teorema 7.7. Esta correspondencia



surge del hecho (véase el problema 7.11) que se asigna cualquier combinación de 1s y 0s a las variables, uno y sólo uno de los productos fundamentales que involucren todas las variables toma el valor 1; todos los demás toman el valor 0. Por lo tanto, de la tabla de verdad se puede obtener, por inspección, la forma completa de suma de productos, y recíprocamente.

**EJEMPLO 7.7** La forma completa de suma de productos para la expresión Booleana del Ejemplo 7.6 es

$$\begin{aligned} Y &= A \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot (C + \bar{C}) \\ &= A \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} \end{aligned}$$

Cuando  $A = 1, B = 1, C = 1$ , el primer producto fundamental,  $A \cdot B \cdot C$ , y junto con él  $Y$ , es igual a 1; todos los demás productos fundamentales completos son iguales a 0. Análogamente,  $Y = 1$  cuando  $A = 1, B = 1$  o  $B = 0, C = 1$ ; cuando  $A = 0, B = 1, C = 1$ ; y cuando  $A = 0, B = 1, C = 0$ . Para todas las demás combinaciones de 1s y de 0s,  $Y = 0$ . Así tenemos la tabla de verdad

A	1 1 0 0 . . . .
B	1 0 1 1 . . . .
C	1 1 1 0 . . . .
Y	1 1 1 1 0 0 0 0

la cual, excepto por el orden de las columnas, coincide con la tabla de verdad encontrada en el ejemplo 7.6.

Recíprocamente, comenzando con la tabla de verdad, uno va leyendo los productos fundamentales correspondientes a los 1s en la fila  $Y$  y de allí obtiene la forma completa de suma de productos de  $Y$ .

## Problemas resueltos

### ALGEBRA DE BOOLE

- 7.1 Considere el álgebra de Boole  $D_{70}$  definida en el ejemplo 7.1(e).
- Encuentre el valor de: (1)  $A = 35 * (2 + 7)$ , (2)  $B = (35 * 10) + 14'$ , (3)  $C = (2 + 7) * (14 * 10)'$ .
  - ¿Cómo están ordenados los elementos  $D_{70}$ ? Dibuje el diagrama de  $D_{70}$ .
  - Encuentre los átomos de  $D_{70}$ .
- Calcule cada expresión paso por paso, utilizando las definiciones de  $a + b$ ,  $a * b$  y  $a'$ .
    - $7' = 10, 2 + 10 = 10$ ; así que,  $A = 35 * 10 = 5$ .
    - $35 * 10 = 5, 14' = 5$ ; así que,  $B = 5 + 5 = 5$ .
    - $2 + 7 = 14, 14 * 10 = 2, 2' = 35$ ; así que,  $C = 14 * 35 = 7$ .
  - Observe que  $a + b = \text{mcm}(a, b) = b$  si y sólo si  $b$  es un múltiplo de  $a$ . Así que  $2 \leq 14$ , pero 2 y 5 no son comparables. La fig. 7-10 es el diagrama de  $D_{70}$ .
  - Los átomos de  $D_{70}$  son los sucesores inmediatos de 1; éstos son 2, 5 y 7 (los primos en  $D_{70}$ ).

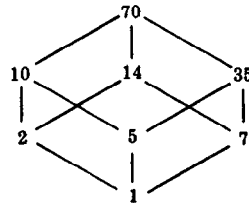


Figura 7-10

## 7.2 Escriba el dual de cada ecuación de Boole:

- (a) Para obtener la ecuación dual, intercambie
- $+$
- y
- $*$
- , e intercambie 0 y 1. Así que

$$(a + 0) + (1 * a') = 1$$

- (b) Primero escriba la ecuación usando
- $*$
- :
- $a + (a' * b) = a + b$
- . Luego el dual es:
- $a * (a' + b) = a * b$
- , lo cual se puede escribir como

$$a(a' + b) = ab$$

7.3 Ponga las siguientes expresiones de Boole  $E(x, y, z)$  en forma de suma de productos, y luego en forma completa de suma de productos: (a)  $E_1 = x(y'z)'$ , (b)  $E_2 = z(x' + y) + y'$ .

Use el algoritmo dado en la sec. 7.6.

- (a) Primero tenemos

$$E_1 = x(y'z)' = x(y + z') = xy + xz'$$

y  $E_1$  está en forma de suma de productos. Luego tenemos

$$\begin{aligned} E_1 &= xy + xz' = xy(z + z') + x(y + y')z' = xyz + xyz' + xyz' + xy'z' \\ &= xyz + xyz' + xy'z' \end{aligned}$$

lo que está en forma completa de suma de productos.

- (b) Primero tenemos

$$E_2 = z(x' + y) + y' = x'z + yz + y'$$

Luego,

$$\begin{aligned} E_2 &= x'z + yz + y' = x'z(y + y') + yz(x + x') + y'(x + x')(z + z') \\ &= x'y'z + x'y'z + xyz + x'y'z + xy'z' + xy'z' + x'y'z' + x'y'z' \\ &= xyz + xy'z' + xy'z' + x'y'z + x'y'z + x'y'z' \end{aligned}$$

7.4 Expresé  $E(x, y, z) = (x' + y)' + x'y$  en forma completa de suma de productos.

Tenemos  $E = (x' + y)' + x'y = xy' + x'y$ , lo que sería la forma completa de suma de productos de  $E$  si  $E$  fuera una expresión de Boole en  $x$  e  $y$ . Sin embargo, está especificado que  $E$  es una expresión de Boole en las tres variables  $x, y, z$ . Así que,

$$E = xy' + x'y = xy'(z + z') + x'y(z + z') = xy'z + xy'z' + x'yz + x'yz'$$

es la forma completa de suma de productos para  $E$ .7.5 Sea  $E = xy' + xyz' + x'yz'$ . Demuestre que (a)  $xz' + E = E$ , (b)  $x + E \neq E$ , (c)  $z' + E \neq E$ .

Como la forma completa de suma de productos es única (teorema 7.7),  $A + E = E$ , en donde  $A \neq 0$ , si y sólo si los sumandos de la forma completa de suma de productos para  $A$  están entre los sumandos de la forma completa de la suma de productos para  $E$ . Así, primero encuentre la forma completa de suma de productos para  $E$ :

$$E = xy'(z + z') + xyz' + x'yz' = xy'z + xy'z' + xyz' + x'yz'$$

- (a) Expresé
- $xz'$
- en forma completa de suma de productos:

$$xz' = xz'(y + y') = xyz' + xy'z'$$

como los sumandos de  $xz'$  están entre los de  $E$ , tenemos  $xz' + E = E$ .

- (b) Expresé
- $x$
- en forma completa de suma de productos:

$$x = x(y + y')(z + z') = xyz + xyz' + xy'z + xy'z'$$

el sumando  $xyz$  de  $x$  no es un sumando de  $E$ ; así que  $x + E \neq E$ .

- (c) Expresé  $z'$  en forma completa de suma de productos:

$$z' = z'(x + x')(y + y') = xyz' + xy'z' + x'yz' + x'y'z'$$

El sumando  $x'y'z'$  de  $z'$  no es un sumando de  $E$ ; así que  $z' + E = E$ .

- 7.6** Considere el diagrama de Venn de los conjuntos  $A$ ,  $B$ , y  $C$  dados en la fig. 7-11. Observe que el conjunto universal  $U$  (el rectángulo) está particionado en  $2^3 = 8$  conjuntos, los cuales están rotulados (1) a (8). (a) Expresé cada uno de los conjuntos en términos de  $A$ ,  $B$ , y  $C$ . (b) En el álgebra de Boole  $\mathcal{P}(U)$ , sea  $E(A, B, C)$  cualquier expresión de Boole que use las letras  $A$ ,  $B$  y  $C$ . Dé una interpretación geométrica de la forma completa de suma de productos de  $E$ .

- (a) Usando la notación de Boole  $AB$  en lugar de  $A \cap B$  y  $A'$  en lugar de  $A^c$ , cada uno de los ocho conjuntos es un producto fundamental que usa  $A$ ,  $B$ , y  $C$ :

$$\begin{array}{llll} (1) = AB'C' & (3) = A'BC' & (5) = ABC & (7) = A'B'C \\ (2) = ABC' & (4) = AB'C & (6) = A'BC & (8) = A'B'C' \end{array}$$

- (b) La expresión de Boole  $E$  se representa por la unión de una o más de las áreas (1) a (8) en la fig. 7.11. La unión (suma) es única, y da la forma completa de suma de productos de  $E$ .

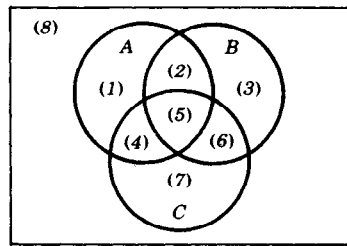


Figura 7-11

## CIRCUITOS LOGICOS

- 7.7** Considere las siguientes tres parejas de sucesiones de bits:

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} & 110001 & \text{(ii)} & 10001111 & \text{(iii)} & 101100111000 \\ & 101101 & & 00111100 & & 000111001101 \end{array}$$

¿Cómo se procesaría cada par de sucesiones por (a) una compuerta OR? (b) una compuerta AND?

- (a) Recuerde que ocurre un 0 como una salida de una compuerta OR sólo si ambas entradas son 0. En (i), esto ocurre solamente en la posición 5; en (ii), solamente en la posición 2; en (iii), solamente en las posiciones 2 y 11. Así que las salidas son

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} & 111101 & \text{(ii)} & 10111111 & \text{(iii)} & 101111111101 \end{array}$$

- (b) Recuerde que ocurre un 1 como una salida de una compuerta AND solamente cuando ambas entradas son 1. En (i), esto ocurre solamente en las posiciones primera y última; en (ii), solamente en las posiciones 5 y 6; en (iii), solamente en las posiciones 4 y 9. Así que las salidas son

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} & 100001 & \text{(ii)} & 00001100 & \text{(iii)} & 000100001000 \end{array}$$

## 7.8 ¿Cómo procesaría una compuerta NOT cada sucesión?

- (i) 110001      (ii) 10001111      (iii) 101100111000

Una compuerta NOT cambia 0 a 1 y 1 a 0. Así que las salidas son

- (i) 001110      (ii) 01110000      (iii) 010011000111

## 7.9 Dado

$$A = 1100110110$$

$$B = 1110000111$$

$$C = 1010010110$$

Encuentre (a)  $A + B + C$ , (b)  $A \cdot B \cdot C$ , (c)  $C(\bar{A} + B)$ , (d)  $A(\overline{B + C})$ .

- (a) Un 0 ocurre en una suma representando una compuerta OR, solamente en donde todas las entradas son 0s. Observe que hay tres 0s solamente en las posiciones 4 y 7. Así que

$$A + B + C = 1110110111$$

- (b) Un 1 ocurre en un producto, representando una compuerta AND, solamente cuando todas las entradas son 1s. Esto sucede solamente en las posiciones 1, 8 y 9. Así que

$$A \cdot B \cdot C = 1000000110$$

- (c) Calcule paso por paso:

$$\bar{A} = 0011001001$$

$$\bar{A} + B = 1111001111$$

$$C(\bar{A} + B) = 1010000110$$

- (d) Calcule paso por paso:

$$B + C = 1110010111$$

$$\overline{B + C} = 0001101000$$

$$A(\overline{B + C}) = 0000100000$$

7.10 Dadas cinco entradas  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  y  $E$ , encuentre las sucesiones especiales que dan todas las diferentes combinaciones posibles de bits de entrada.

Cada sucesión tendrá  $2^5 = 32$  bits. Un esquema de asignación es el siguiente:

- (i) Supongamos que a  $A$  se le asignan  $2^4 = 16$  bits que sean 0s, seguidos por  $2^4 = 16$  bits que sean 1s.  
 (ii) Supongamos que a  $B$  se le asignan  $2^3 = 8$  bits que sean 0s, seguidos por  $2^3 = 8$  bits que sean 1s; y luego repita una vez.  
 (iii) Supongamos que a  $C$  se le asignan  $2^2 = 4$  bits que sean 0s, seguidos por  $2^2 = 4$  que sean 1s; y luego repita tres veces.  
 (iv) Supongamos que a  $D$  se le asignan  $2^1 = 2$  bits que sean 0s, seguidos por  $2^1 = 2$  bits que sean 1s; luego repita siete veces.  
 (v) Supongamos que a  $E$  se le asigna  $2^0 = 1$  bit que sea 0, seguido por  $2^0 = 1$  bit que sea 1; y luego repita quince veces.

Las sucesiones especiales que resultan son

$$A = 000000000000000111111111111111$$

$$B = 00000000111111110000000011111111$$

$$C = 00001111000011110000111100001111$$

$$D = 00110011001100110011001100110011$$

$$E = 010101010101010101010101010101$$

(Observando que las columnas del arreglo de arriba son, de izquierda a derecha, los primeros 32 enteros binarios en orden ascendente, tenemos otro esquema de asignaciones tal vez más simple.)

- 7.11 Dadas tres entradas  $A$ ,  $B$ , y  $C$ , encuentre las tablas de verdad de los primeros ocho productos fundamentales:

$$\begin{array}{llll} A \cdot B \cdot C & A \cdot B \cdot \bar{C} & A \cdot \bar{B} \cdot C & A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \\ \bar{A} \cdot B \cdot C & \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} & \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C & \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \end{array}$$

Observe primero que las sucesiones especiales para  $A$ ,  $B$ , y  $C$  contienen cada uno  $2^3 = 8$  bits. Tenemos:

$$\begin{array}{l} A = 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \\ B = 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \\ C = 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \end{array}$$

Luego

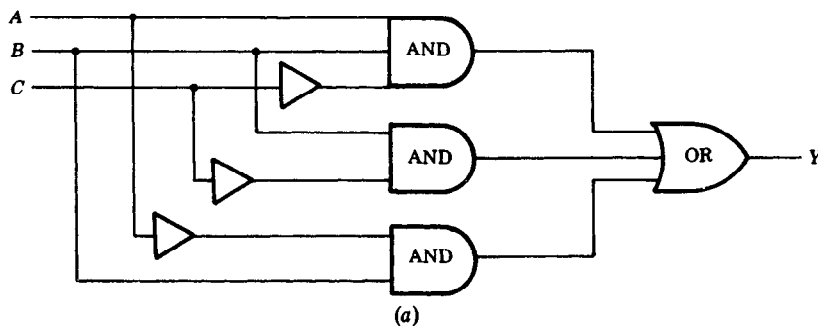
$$\begin{array}{l} \bar{A} = 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\ \bar{B} = 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \\ \bar{C} = 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \end{array}$$

y

$$\begin{array}{l} A \cdot B \cdot C = 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \\ A \cdot B \cdot \bar{C} = 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \\ A \cdot \bar{B} \cdot C = 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \\ A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} = 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \\ \bar{A} \cdot B \cdot C = 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\ \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} = 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\ \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C = 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\ \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} = 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \end{array}$$

Se ve que para cada combinación de entrada, exactamente uno de los ocho productos fundamentales asume el valor de 1. Así que, para  $A = 0, B = 1, C = 1$  (o sea  $\bar{A} = B = C = 1$ ), solamente el producto  $\bar{A} \cdot B \cdot C$  es igual a 1. Además, un producto dado toma el valor 1 para solamente una combinación de entradas; es decir, su tabla de verdad tiene 1 en exactamente una posición y 0s en las demás.

- 7.12 Encuentre una expresión de Boole y la tabla de verdad para el circuito lógico de la fig. 7.12(a).



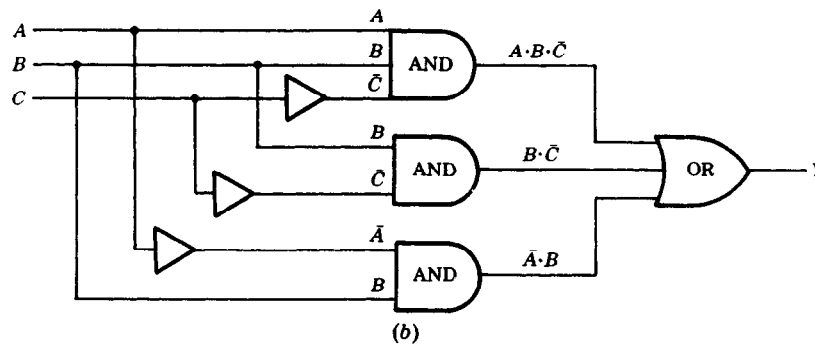


Figura 7-12

Observe primero que el circuito tiene un patrón AND-OR. Rotule las entradas y la salida de cada compuerta AND como en la fig. 7-12(b). Luego la salida Y del circuito es la suma de las salidas de las compuertas AND.

$$Y = ABC\bar{C} + B\bar{C} + \bar{A}B$$

#### Método 1.

Como hay tres entradas, la tabla de verdad del circuito constará de sucesiones de 8 bits. Calculemos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} A &= 00001111 \\ B &= 00110011 \\ C &= 01010101 \\ \bar{A} &= 11110000 \\ \bar{C} &= 10101010 \\ ABC\bar{C} &= 00000010 \\ B\bar{C} &= 00100010 \\ \bar{A}B &= 00110000 \\ Y &= 00110010 \end{aligned}$$

Es decir, la tabla de verdad del circuito es

A	00001111
B	00110011
C	01010101
Y	00110010

#### Método 2.

La forma completa de suma de productos para Y es

$$\begin{aligned} Y &= ABC\bar{C} + B\bar{C}(A + \bar{A}) + \bar{A}B(C + \bar{C}) \\ &= ABC\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC \end{aligned}$$

de la cual, por inspección, la tabla de verdad es

<i>A</i>	1 0 0 ······
<i>B</i>	1 1 1 ······
<i>C</i>	0 0 1 ······
<i>Y</i>	1 1 1 0 0 0 0 0

- 7.13 Definimos dos compuertas nuevas. Una *compuerta NAND* es equivalente a una compuerta AND seguida por una compuerta NOT, y una *compuerta NOR* es equivalente a una compuerta OR seguida por una compuerta NOT. (Véase la fig. 7-13.) Dadas dos entradas, *A*, *B*, encuentre la tabla de verdad para (a) la compuerta NAND, (b) la compuerta NOR.

(a) La salida de la compuerta NAND es  $Y = \overline{A \cdot B}$ . Calcule la tabla de verdad de la siguiente manera:

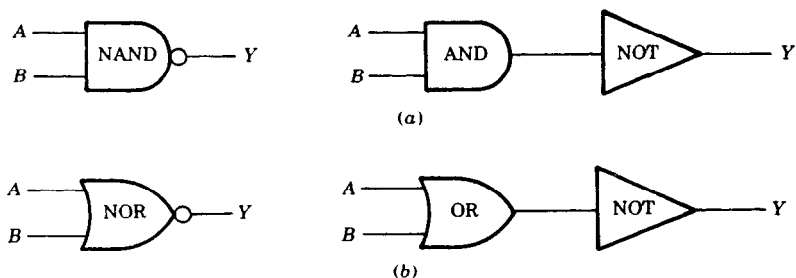


Figura 7-13

$$\begin{aligned} A &= 0011 \\ B &= 0101 \\ A \cdot B &= 0001 \\ Y &= 1110 \end{aligned}$$

(b) La salida de la compuerta NOR es  $Y = \overline{A + B}$ . Calcule su tabla de verdad como sigue:

$$\begin{aligned} A &= 0011 \\ B &= 0101 \\ A + B &= 0111 \\ Y &= 1000 \end{aligned}$$

- 7.14 Determine una expresión de Boole para cada circuito de interruptores en la fig. 7-14.

Recuerde que usamos una suma para un circuito en paralelo y un producto para un circuito en serie. Así:

$$(a) A \cdot (B + \bar{A}) \cdot C \quad (b) A \cdot (C + \bar{B}) + B \cdot \bar{C}$$

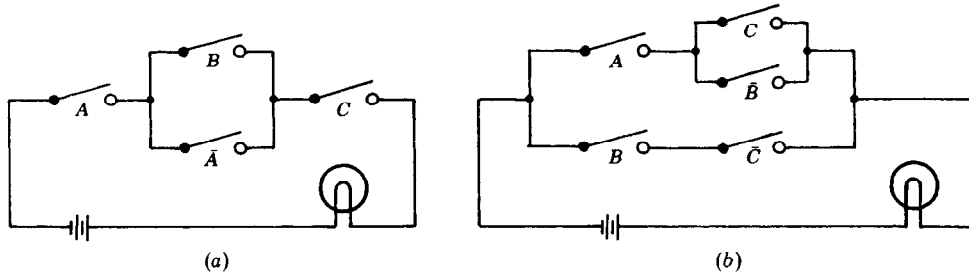


Figura 7-14

## DEMOSTRACION DE TEOREMAS

7.15 Demuestre el teorema 7.2:

(i) Leyes de idempotencia:

(5a)  $a + a = a$

(5b)  $a * a = a$

(ii) Leyes de acotamiento:

(6a)  $a + 1 = 1$

(6b)  $a * 0 = 0$

(iii) Leyes de absorción:

(7a)  $a + (a * b) = a$

(7b)  $a * (a + b) = a$

(iv) Leyes asociativas:

(8a)  $(a + b) + c = a + (b + c)$

(8b)  $(a * b) * c = a * (b * c)$

(5b)  $a = a * 1 = a * (a + a') = (a * a) + (a * a') = (a * a) + 0 = a * a$

(5a) Se obtiene a partir de (5b) y de la dualidad.

(6b)  $a * 0 = (a * 0) + 0 = (a * 0) + (a * a') = a * (0 + a') = a * (a' + 0) = a * a' = 0$

(6a) Se obtiene a partir de (6b) y de la dualidad.

(7b)  $a * (a + b) = (a + 0) * (a + b) = a + (0 * b) = a + (b * 0) = a + 0 = a$ , en donde se usó la ley de acotamiento en el penúltimo paso.

(7a) Se obtiene a partir de (7b) y de la dualidad.

(8b) Sea  $L = (a * b) * c$  y  $R = a * (b * c)$ . Tenemos que demostrar que  $L = R$ . Primero demostramos que  $a + L = a + R$ . Usando las leyes de absorción en los últimos dos pasos,

$$a + L = a + ((a * b) * c) = (a + (a * b)) * (a + c) = a * (a + c) = a$$

También, usando la ley de absorción en el último paso y la ley de idempotencia en el penúltimo paso,

$$a + R = a + (a * (b * c)) = (a + a) * (a + (b * c)) = a * (a + (b * c)) = a$$

Así,  $a + L = a + R$ . Luego demostramos que  $a' + L = a' + R$ . Tenemos que,

$$\begin{aligned}
 a' + L &= a' + ((a * b) * c) \\
 &= (a' + (a * b)) * (a' + c) \\
 &= ((a' + a) * (a' + b)) * (a' + c) \\
 &= (1 * (a' + b)) * (a' + c) \\
 &= (a' + b) * (a' + c) \\
 &= a' + (b * c)
 \end{aligned}$$





También,

$$\begin{aligned}
 a' + R &= a' + (a * (b * c)) \\
 &= (a' + a) * (a' + (b * c)) \\
 &= 1 * (a' + (b * c)) \\
 &= a' + (b * c)
 \end{aligned}$$

De donde,  $a' + L = a' + R$ . En consecuencia,

$$L = L + 0 = L + (a * a') = (L + a) * (L + a') = (a + L) * (a' + L) = (a + R) * (a' + R) = R$$

(8a) Se obtiene a partir de (8b) y de la dualidad.

### 7.16 Demuestre el teorema 7.3:

(i) (Unicidad del complemento) Si  $a + x = 1$  y  $a * x = 0$ , entonces  $x = a'$ .

(ii) (Ley de involución)  $(a')' = a$ .

(iii) (9a)  $0' = 1$  (9b)  $1' = 0$

(i) Tenemos que:

$$\begin{aligned}
 a' &= a' + 0 = a' + (a * x) = (a' + a) * (a' + x) \\
 &= 1 * (a' + x) = a' + x
 \end{aligned}$$

También,

$$x = x + 0 = x + (a * a') = (x + a) * (x + a') = 1 * (x + a') = x + a'$$

Así que

$$x = x + a' = a' + x = a'$$

(ii) Por definición de complemento,  $a + a' = 1$  y  $a * a' = 0$ . Por conmutatividad,  $a' + a = 1$  y  $a' * a = 0$ . Por unicidad del complemento,  $a$  es el complemento de  $a'$ , o sea,  $a = (a')'$ .

(iii) Por la ley de acotamiento (6a),  $0 + 1 = 1$ , y por el axioma de identidad (3b).  $0 * 1 = 0$ . Por la unicidad del complemento,  $1$  es el complemento de  $0$ , es decir,  $1 = 0'$ . Por la dualidad,  $0 = 1'$ .

### 7.17 Demuestre el teorema 7.4 (Leyes de DeMorgan):

(10a)  $(a + b)' = a' * b'$  (10b)  $(a * b)' = a' + b'$

(10a) Tenemos que mostrar que  $(a + b) + (a' * b') = 1$  y  $(a + b) * (a' * b') = 0$ ; luego por la unicidad del complemento,  $a' * b' = (a + b)'$ . Tenemos:

$$\begin{aligned}
 (a + b) + (a' * b') &= b + a + (a' * b') = b + (a + a') * (a + b') \\
 &= b + 1 * (a + b') = b + a + b' = b + b' + a = 1 + a = 1
 \end{aligned}$$

También,

$$\begin{aligned}
 (a + b) * (a' * b') &= ((a + b) * a') * b' \\
 &= ((a * a') + (b * a')) * b' = (0 + (b * a')) * b' \\
 &= (b * a') * b' = (b * b') * a' = 0 * a' = 0
 \end{aligned}$$

Así  $a' * b' = (a + b)'$ .

(10b) El principio de la dualidad (teorema 7.1).

## Problemas suplementarios

### ALGEBRA DE BOOLE

7.18 Considere  $D_{110} = \{1, 2, 5, 10, 11, 22, 55, 110\}$ , el álgebra de Boole de los divisores de 110. Las operaciones son las definidas en el ejemplo 7.1(e).

(a) Evalúe

$$\begin{array}{lll} X_1 = 2 + 11' & X_3 = 22 * (5 + 10) & X_5 = (55 * 10)' + 2 \\ X_2 = 5 * 10 + 2 & X_4 = 5' * 55 & X_6 = (2 + 11') * 22 \end{array}$$

(b) Dibuje el diagrama de  $D_{110}$ .

(c) Encuentre los átomos de  $D_{110}$ .

7.19 Para el álgebra de Boole del ejemplo 7.1(a), evalúe

$$X = 1 * (0 + 1') \quad Y = (1 + 1) * (0' + 0) \quad Z = (1' + 0)' + (1 * 0')'$$

7.20 Un elemento  $M$  de una álgebra de Boole  $B$  se llama *maxterm* si el elemento unidad 1 es su único sucesor estricto.

(a) Encuentre los maxterms del álgebra de Boole en el problema 7.1.

(b) Encuentre los maxterms del álgebra de Boole en el problema 7.18.

(c) Demuestre que los complementos de los átomos son maxterms. (Sugerencia:  $x = y$  si y sólo si  $x' = y'$ .)

7.21 Escriba el dual de cada ecuación de Boole:

$$(a) \quad a(a' + b) = ab \quad (b) \quad (a + 1)(a + 0) = a \quad (c) \quad (a + b)(b + c) = ac + b$$

7.22 Escriba cada expresión de Boole  $E(x, y, z)$  como suma de productos, y luego la forma completa de suma de productos:

$$\begin{array}{lll} (a) \quad x(xy' + x'y + y'z) & (c) \quad (x + y'z)(y + z') & (e) \quad (x' + y)' + y'z \\ (b) \quad (x'y)'(x' + xyz') & (d) \quad (x + y)'(xy')' & (f) \quad y(x + yz)' \end{array}$$

7.23 Escriba el siguiente conjunto de expresiones que usan  $A$ ,  $B$  y  $C$  como uniones de intersecciones:

$$(a) \quad (A \cup B)^c \cap (C^c \cup B) \quad (b) \quad (B \cap C)^c \cap (A^c \cup C)^c$$

### COMPUERTAS LOGICAS

7.24 Determine la salida de cada compuerta en la fig. 7-15.

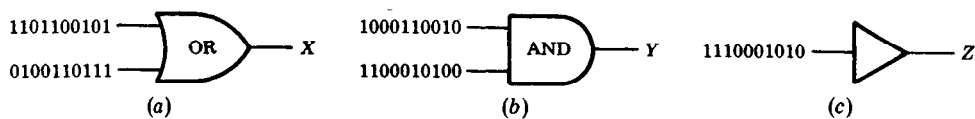


Figura 7-15

7.25 Si  $A = 1100110111$ ,  $B = 0001110110$ ,  $C = 1010110011$ , evalúe

$$\begin{array}{llll} (a) \quad A + B & (c) \quad \bar{A} & (e) \quad A \cdot C & (g) \quad \bar{A} + B \cdot \bar{C} \\ (b) \quad A + C & (d) \quad \bar{C} & (f) \quad B \cdot C & (h) \quad B(\bar{A} + \bar{C}) \end{array}$$

7.26 Dadas cuatro entradas  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ , encuentre sucesiones especiales que den todas las posibles combinaciones diferentes de entradas.

- 7.27 Considere el circuito lógico en la fig. 7-16. (a) Dé la salida  $Y$  como una expresión de Boole con entradas  $A$ ,  $B$  y  $C$ . (b) Encuentre la tabla de verdad del circuito.
- 7.28 Considere el circuito lógico de la fig. 7-17. (a) Dé la salida  $Y$  como una expresión de Boole con entradas  $A$ ,  $B$  y  $C$ . (b) Encuentre la tabla de verdad del circuito.

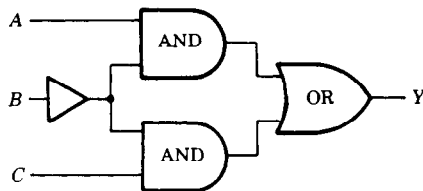


Figura 7-16

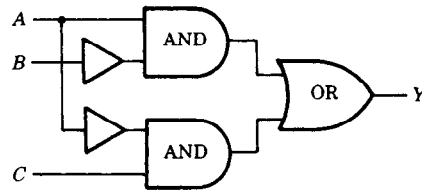


Figura 7-17

- 7.29 Considere el circuito lógico de la fig. 7-18. (a) Dé la salida  $Y$  como una expresión de Boole con entradas  $A$ ,  $B$ , y  $C$ . (b) Encuentre la tabla de verdad del circuito.
- 7.30 El circuito lógico de la fig. 7-19 contiene una compuerta NAND y una compuerta NOR (problema 7.13), entre otras. (a) Escriba la salida  $Y$  como una expresión de Boole con entradas  $A$ ,  $B$ , y  $C$ . (b) Encuentre la tabla de verdad del circuito.

- 7.31 Dibuje el circuito lógico que corresponde a cada expresión de Boole:

$$(a) E_1 = A\bar{B} + ABC \quad (b) E_2 = \overline{A + BC} + B \quad (c) E_3 = \overline{\bar{A}B} + \overline{A + C}$$

- 7.32 Encuentre la expresión de Boole que corresponde a cada circuito de interruptores de la fig. 7-20.

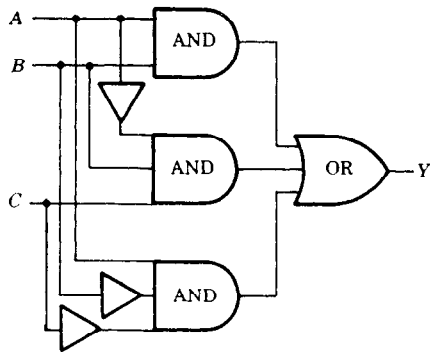


Figura 7-18

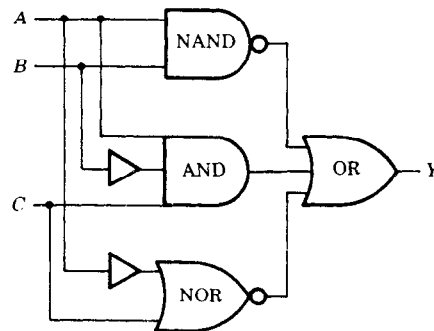
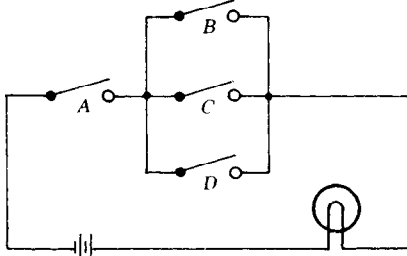
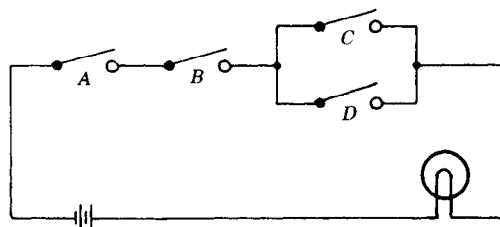


Figura 7-19



(a)



(b)

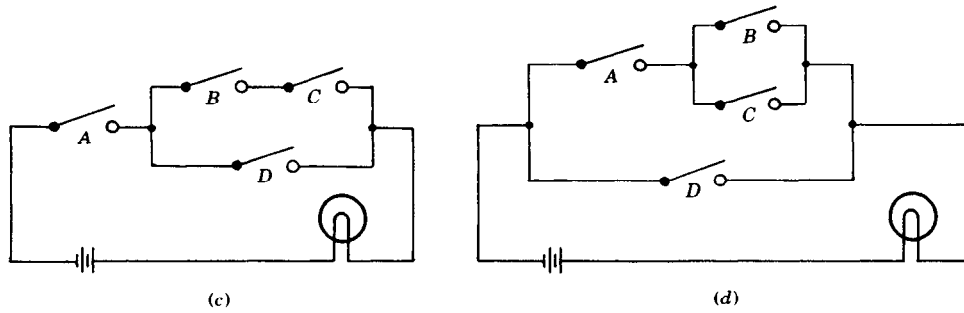


Figura 7-20

### Respuestas a los problemas suplementarios

- 7.18 (a)  $X_1 = 10, X_2 = 10, X_3 = 2, X_4 = 11, X_5 = 22, X_6 = 2$   
 (b) Vea la fig. 7-21.  
 (c) 2, 5, 11

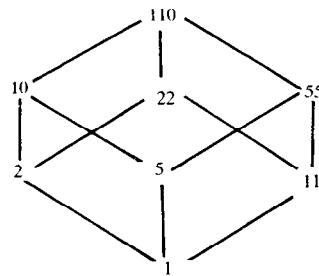


Figura 7-21

- 7.19  $X = 0, Y = 1, Z = 1$
- 7.20 (a) 10, 14, 35; (b) 10, 22, 55
- 7.21 (a)  $a + a'b = a + b$ , (b)  $a * 0 + a * 1 = a$ , (c)  $ab + bc = (a + c)b$
- 7.22 (a)  $xy' + xy'z = xy'z' + xy'z$  (d)  $x'y' = x'y'z + x'y'z'$   
 (b)  $xyz' + x'y' = xyz' + x'y'z + x'y'z'$  (e)  $xy' + y'z = xy'z + xy'z' + x'y'z$   
 (c)  $xy + xz' = xyz + xyz' + xy'z'$  (f)  $x'yz'$
- 7.23 (a)  $A^c \cap B^c \cap C^c$ , (b)  $(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A \cap C^c)$
- 7.24 (a) 1101110111, (b) 1000010000, (c) 0001110101
- 7.25 (a) 1101110111, (b) 1110110111, (c) 0011001000, (d) 0101001100,  
 (e) 1000110011, (f) 0000110010, (g) 0011001100, (h) 0001000000

7.26 Una posibilidad es:

$A = 1111111100000000$   
 $B = 1111000011110000$   
 $C = 1100110011001100$   
 $D = 1010101010101010$

7.27 (a)  $Y = A\bar{B} + \bar{B}C$ , (b)  $Y = A\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C$

7.28 (a)  $Y = A\bar{B} + \bar{A}C$ , (b)  $Y = A\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}C$

7.29 (a)  $Y = AB + \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C}$ , (b)  $Y = ABC + AB\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C}$

7.30 (a)  $Y = \overline{AB + A\bar{B}C + \bar{A} + C}$   
 (b)  $Y = \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + ABC$

7.31 Vea la fig. 7-21.

7.32 (a)  $A(B + C + D)$ , (b)  $AB(C + D)$ , (c)  $A(D + BC)$ , (d)  $A(B + C) + D$

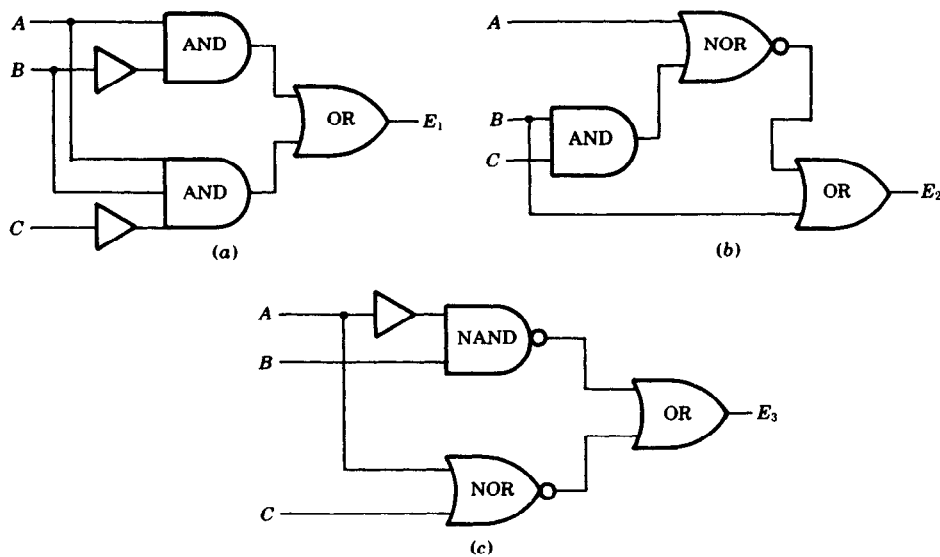


Figura 7-22

## Simplificación de circuitos lógicos

### 8.1 EXPRESIONES BOOLEANAS MINIMALES

Considere una expresión  $E$  en un álgebra de Boole  $B$ . Como  $E$  puede representar un circuito lógico, es posible que queramos una representación de  $E$  que en algún sentido sea *minimal*. Ahora definimos e investigamos las formas minimales de sumas de productos para  $E$ . (Existen otros tipos de formas minimales, tales como las formas minimales de producto de sumas, pero su estudio se sale del alcance de este libro.)

Si  $E$  es una expresión de Boole de suma de productos,  $E_L$  denotará el número de literales en  $E$  (contados de acuerdo con la multiplicidad), y  $E_S$  denotará el número de sumandos en  $E$ . Por ejemplo, si

$$E = abc' + a'b'd + ab'c'd + a'bcd$$

entonces  $E_L = 14$  y  $E_S = 4$ . Sea ahora  $F$  una expresión de Boole de suma de productos equivalente a  $E$ . Decimos que  $E$  es más simple que  $F$  si

$$E_L \leq F_L \quad \text{y} \quad E_S \leq F_S$$

y por lo menos una de las relaciones es una desigualdad estricta.

**Definición:** Una expresión de Boole está en forma minimal de suma de productos (o sencillamente, es una suma minimal) si está en forma de suma de productos y no hay ninguna otra expresión equivalente en forma de suma de productos que sea más simple que  $E$ .

Antes de discutir la estructura de sumas minimales, tenemos que presentar la noción de implicantes primos. Un producto fundamental  $P$  se llama *implicante primo* de una expresión de Boole  $E$  si

$$P + E = E$$

pero ningún otro producto fundamental incluido en  $P$  tiene esta propiedad. (Observe que, en la álgebra de Boole de proposiciones, la condición  $P + E = E$  se interpreta como “ $P$  implica lógicamente a  $E$ ”; de donde resulta el término “implicante”.) Por ejemplo, el problema 7.5 muestra que  $P = xz'$  es un implicante primo de

$$E = xy' + xyz' + x'yz'$$

La importancia de los implicantes primos se demuestra a continuación.

**Teorema 8.1:** Si una expresión de Boole  $E$  está en forma minimal de suma de productos, entonces cada sumando de  $E$  es un implicante primo de  $E$ .

El así llamado *método de consenso*, discutido en los problemas 8.3 y 8.4, se puede usar para representar cualquier expresión de Boole como la suma de todos sus implicantes primos. Una manera de encontrar una suma minimal para  $E$  es expresar cada implicante primo en forma completa de suma de productos, y quitar uno por uno aquellos implicantes primos cuyos sumandos aparecen entre los sumandos de los implicantes primos que quedan. Por ejemplo, demostramos en el problema 8.4 que

$$E = x'z' + xy + x'y' + yz'$$

está expresado como la suma de todos sus implicantes primos. Tenemos

$$\begin{aligned} x'z' &= x'z'(y + y') = x'yz' + x'y'z' \\ xy &= xy(z + z') = xyz + xyz' \\ x'y' &= x'y'(z + z') = x'y'z + x'y'z' \\ yz' &= yz'(x + x') = xyz' + x'yz' \end{aligned}$$

Ahora se puede quitar  $x'z'$ , puesto que sus sumandos  $x'yz'$  y  $x'y'z'$ , aparecen entre los otros. Así que

$$E = xy + x'y' + yz'$$

y esto está en forma de suma minimal para  $E$ , ya que ninguno de los implicantes primos es superfluo, es decir, se puede quitar sin cambiar  $E$ . Observe que, en vez de  $x'z'$ , se pudo haber eliminado a  $yz'$  —lo cual muestra que la suma minimal para una expresión de Boole no es necesariamente única.

El método anterior para encontrar formas de suma minimal para expresiones de Boole  $E$  es directo, pero ineficiente. En la siguiente sección, damos un método geométrico para encontrar formas de sumas minimales cuando el número de variables no es muy grande.

## 8.2 MAPAS DE KARNAUGH

Los *mapas de Karnaugh* son maneras pictóricas de encontrar implicantes primos y formas minimales de sumas para las expresiones de Boole que involucran máximo seis variables. Solamente trataremos los casos de dos, tres o cuatro variables.

En nuestros mapas de Karnaugh, se representarán por cuadrados los productos fundamentales en las mismas variables. Decimos que dos de tales productos fundamentales  $P_1$  y  $P_2$  son *adyacentes* si  $P_1$  y  $P_2$  difieren en exactamente un literal, lo cual tiene que ser una variable complementada en un producto y no complementada en el otro. Así que la suma de dos productos adyacentes será un producto fundamental con un literal menos. Por ejemplo,

$$xyz' + xy'z' = xz'(y + y') = xz'(1) = xz'$$

$$x'yz't + x'yz't' = x'yt(z + z') = x'yt(1) = x'yt$$

Observe que  $x'yz't$  y  $xyz't$  no son adyacentes. Note también que  $xyz'$  y  $xyz't$  no aparecerán en el mismo mapa de Karnaugh, ya que involucran distintas variables. En el contexto de los mapas de Karnaugh, a veces intercambiaremos los términos “cuadrados” y “productos fundamentales”.

### Caso de dos variables

El mapa de Karnaugh que corresponde a las expresiones de Boole  $E(x, y)$  se visualiza en la fig. 8-1(a). Podemos ver el mapa de Karnaugh como un diagrama de Venn en el que  $x$  está representado por los puntos en la mitad superior del mapa, sombreada de la fig. 8-1(b), y  $y$  está representado por los puntos en la mitad izquierda del mapa, sombreada de la fig. 8-1(c). Así que  $x'$  está representado por los puntos de la mitad inferior del mapa, y  $y'$  está representado por los puntos de la mitad derecha del mapa. De esta manera, los cuatro posibles productos fundamentales con dos literales,

$$xy \quad xy' \quad x'y \quad x'y'$$

están representados por los cuatro cuadrados en el mapa, tal como se han rotulado en la fig. 8-1(d). Observe que dos de tales cuadrados son adyacentes en el sentido definido anteriormente si y sólo si están geoméricamente adyacentes (tienen un lado en común).

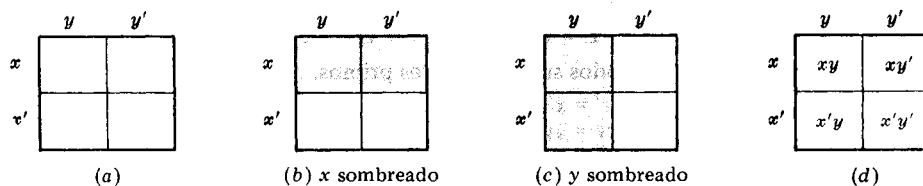


Figura 8-1

Cualquier expresión de Boole completa de suma de productos  $E(x, y)$  está representada en un mapa de Karnaugh marcando los cuadrados apropiados. Por ejemplo,

$$E_1 = xy + xy' \quad E_2 = xy + x'y + x'y' \quad E_3 = xy + x'y'$$

están representados respectivamente en las figs. 8-2(a), (b), y (c). (Los óvalos se explicarán más adelante,

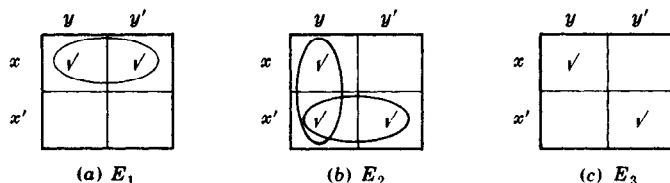


Figura 8-2

Un implicante primo de  $E(x, y)$  será una pareja de cuadrados adyacentes o un cuadrado aislado, es decir, un cuadrado que no está adyacente a ningún otro cuadrado de  $E(x, y)$ . Por ejemplo,  $E_1$  consta de dos cuadrados adyacentes designados por el óvalo en la fig. 8.2(a). Esta pareja de cuadrados adyacentes representa la variable  $x$ , así que  $x$  es un implicante primo (el único) de  $E_1$  y

$$E_1 = x$$

es su suma minimal. Observe que  $E_2$  contiene dos parejas de cuadrados adyacentes (designadas por los dos óvalos) que incluyen todos los cuadrados de  $E_2$ . La pareja vertical representa a  $y$ , y la pareja horizontal a  $x'$ ; así que  $y$  y  $x'$  son implicantes primos de  $E_2$  y

$$E_2 = x' + y$$

es su suma minimal. Por otra parte,  $E_3$  está formado por dos cuadrados aislados que representan  $xy$  y  $x'y'$ ; así que  $xy$  y  $x'y'$  son implicantes primos de  $E_3$  y

$$E_3 = xy + x'y'$$

es su suma minimal.

#### Caso de tres variables

El mapa de Karnaugh que corresponde a las expresiones de Boole  $E(x, y, z)$  se representa en la fig. 8-3(a). De nuevo podemos considerar el mapa de Karnaugh como un diagrama de Venn, con la variable  $x$  aún representada por los puntos de la mitad superior del mapa, como en la fig. 8-3(b), y la variable  $y$  aún representada por los puntos de la mitad izquierda del mapa, como en la fig. 8-3(c). La nueva variable  $z$  está representada por los puntos de los cuartos izquierdo y derecho del mapa, sombreados en la fig. 8-3(d). Así,  $x'$  está representado por los puntos de la mitad inferior del mapa,  $y'$  por los puntos de la mitad derecha del mapa, y  $z'$  por los puntos de los dos cuartos de la mitad del mapa. Observe que hay exactamente ocho productos fundamentales con tres literales,

$$xyz \quad xyz' \quad xy'z \quad xy'z' \quad x'yz \quad x'yz' \quad x'y'z \quad x'y'z'$$

y que estos ocho productos fundamentales corresponden a los ocho cuadrados en el mapa de Karnaugh, fig. 8-3(a) de la manera obvia. Para que puedan ser geoméricamente adyacentes, cada pareja de productos adyacentes de la fig. 8-3(a), es necesario identificar los bordes izquierdo y derecho del mapa. En otras palabras, si fuéramos a recortar, doblar, y pegar por los bordes identificados, deberíamos obtener un cilindro (fig. 8-4) con la propiedad de que productos adyacentes están representados por "cuadrados" con un borde en común.

Por un *rectángulo básico* en el mapa de Karnaugh de tres variables, figura 8-3(a) o figura 8-4, queremos decir un cuadrado, dos cuadrados adyacentes, o cuatro cuadrados que forman un



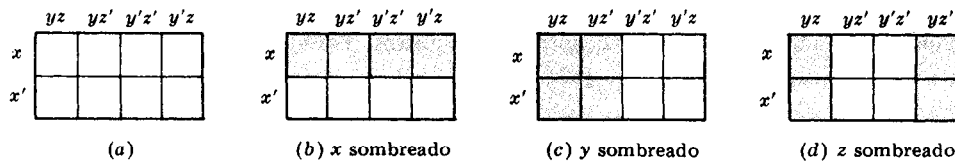


Figura 8-3

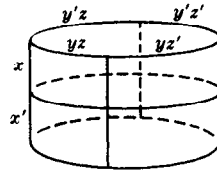


Figura 8-4

rectángulo de o uno por cuatro o dos por dos. Estos rectángulos básicos corresponden a los productos fundamentales de tres, dos, y un literal, respectivamente. Además, el producto fundamental representado por un rectángulo básico es el producto de exactamente aquellos literales que aparecen en cada cuadrado del rectángulo.

Cualquier expresión Booleana completa de suma de productos  $E(x, y, z)$  está representada en el mapa de Karnaugh marcando los cuadrados apropiados. Un implicante primo de  $E$  será un rectángulo básico maximal de  $E$ , es decir, un rectángulo básico que no está contenido en ningún otro rectángulo básico más grande. Una suma minimal para  $E$  consistirá de un recubrimiento minimal de  $E$ , es decir, un número minimal de rectángulos básicos maximales que juntos incluyen todos los cuadrados de  $E$ .

**EJEMPLO 8.1** Considere las tres expresiones de Boole completas siguientes de suma de productos en las variables  $x, y$  y  $z$ :

$$E_1 = xyz + xy'z' + x'yz' + x'y'z$$

$$E_2 = xyz + xyz' + xy'z + x'yz + x'y'z$$

$$E_3 = xyz + xyz' + x'yz' + x'y'z' + x'y'z$$

$E_1$ ,  $E_2$ , y  $E_3$  están representados en la fig. 8-5 marcando los cuadrados apropiados en los mapas de Karnaugh. Mostramos cómo usar estos mapas para encontrar las sumas minimales para las expresiones.

- (a) Observe que  $E_1$  tiene tres implicantes primos (rectángulos básicos maximales), que han sido marcados con un óvalo (o con un círculo); éstos son  $xy$ ,  $xz'$  y  $x'y'z$ . Se necesitan todos tres para recubrir  $E_1$ ; así que la suma minimal para  $E_1$  es

$$E_1 = xy + yz' + x'y'z$$

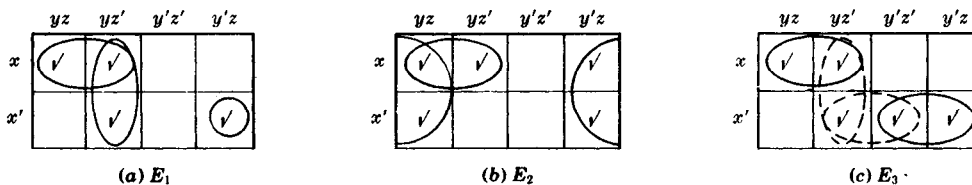


Figura 8-5

- (b) Observe que  $E_2$  tiene dos implicantes primos, que han sido encerrados. Uno es los dos cuadrados adyacentes que representa a  $xy$ , y el otro es el cuadrado de dos por dos (que abarca los bordes identificados) que representa a  $z$ . Se necesitan ambos para recubrir a  $E_2$ , así que la suma minimal para  $E_2$  es

$$E_2 = xy + z$$

- (c) Como está indicado por los óvalos,  $E_3$  tiene cuatro implicantes primos,  $xy$ ,  $yz'$ ,  $x'z'$ , y  $x'y'$ . Sin embargo, sólo se necesita uno de los dos que han sido encerrados de una manera punteada, o sea, uno de  $yz'$  o  $x'z'$  para un recubrimiento minimal de  $E_3$ . Así,  $E_3$  tiene dos sumas minimales:

$$E_3 = xy + yz' + x'y' = xy + x'z' + x'y'$$

(como se determinó previamente en la sec. 8.1).

#### Caso de cuatro variables

El mapa de Karnaugh que corresponde a las expresiones de Boole  $E(x, y, z, t)$  está representado en la fig. 8-6. Cada uno de los dieciséis cuadros del mapa corresponde a uno de los dieciséis productos fundamentales.

$$xyzt \quad xyz't' \quad xyz't \quad xyz't' \quad xy'zt \quad \dots \quad x'yz't$$

tal como lo indican los rótulos de la fila y la columna del cuadrado. Observe que las líneas superior e izquierda están rotuladas de tal manera que los productos adyacentes difieran en, precisamente, un literal. De nuevo tenemos que identificar el borde izquierdo con el borde derecho (tal como hicimos con las tres variables), pero también tenemos que identificar el borde superior con el borde inferior. (Estas identificaciones hacen surgir una superficie en forma de roscón que se llama *toro* y podemos considerar nuestro mapa como un auténtico toro.)

Un rectángulo básico es un cuadrado, dos cuadrados adyacentes, cuatro cuadrados que forman un rectángulo de uno por cuatro o dos por dos, u ocho cuadrados que forman un rectángulo de dos por cuatro. Estos rectángulos corresponden a productos fundamentales con cuatro, tres, dos y un literal, respectivamente. De nuevo, los rectángulos básicos maximales son los implicantes primos. La técnica de minimización para una expresión de Boole  $E(x, y, z, t)$  es la misma que antes.

	$zt$	$zt'$	$z't'$	$z't$
$xy$				
$xy'$				
$x'y'$				
$x'y$				

Figura 8-6

**EJEMPLO 8.2** Considere las tres expresiones de Boole  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  en las variables  $x, y, z, t$  que están dadas en los mapas de Karnaugh en la fig. 8-7, por ejemplo,

$$E_1 = xyz't' + xyz't + xy'zt + xy'zt' + x'y'zt + x'y'zt' + x'yz't'$$

Usamos estos mapas para encontrar las formas de suma minimal.

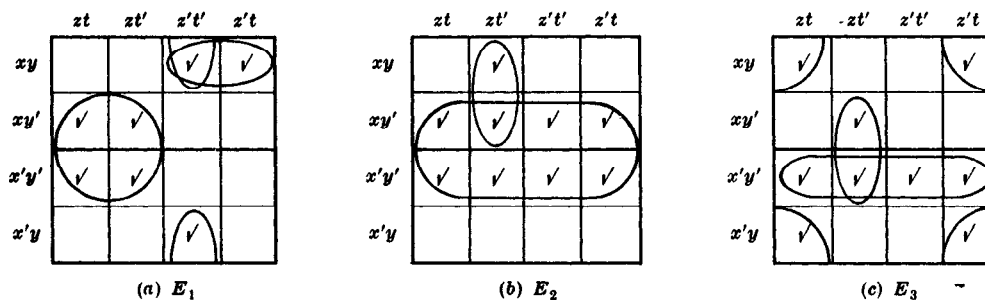


Figura 8-7



- (a) El rectángulo básico maximal de dos por dos representa a  $y'z$  ya que solamente  $y'$  y  $z$  aparecen en todos los cuatro cuadrados. La pareja horizontal de cuadrados adyacentes representa a  $xyz'$ , y los cuadrados adyacentes que traslapan los bordes superior e inferior representan a  $yz't'$ . Como se necesitan todos los tres rectángulos para un recubrimiento minimal,

$$E_1 = y'z + xyz' + yz't'$$

es la suma minimal para  $E_1$ .

- (b) Solamente  $y'$  aparecen en todos los ocho cuadrados del rectángulo básico maximal de dos por cuatro y la pareja designada de cuadrados adyacentes representa a  $xzt'$ . Como se necesitan ambos rectángulos para un recubrimiento minimal,

$$E_2 = y' + xzt'$$

es la suma minimal para  $E_2$ .

- (c) Los cuatro cuadrados de las esquinas forman un rectángulo básico maximal dos por dos que representa  $yt$ , ya que solamente  $y$  y  $t$  aparecen en todos los cuatro cuadrados. El rectángulo básico maximal cuatro por uno representa  $x'y'$ , y los dos cuadrados adyacentes representan  $y'zt'$ . Como se necesitan todos los tres rectángulos para un recubrimiento minimal,

$$E_3 = yt + x'y' + y'zt'$$

es la suma minimal de  $E_3$ .

*Observación:* Suponga que una expresión de Boole  $E$  es una suma de productos fundamentales. Hagamos hincapié en que no es necesario poner  $E$  en forma completa de suma de productos para representarlo por un mapa de Karnaugh. Sea,

$$E = xy' + xyz + x'y'z' + x'yz't'$$

Simplemente marcamos todos los cuadrados que representan cada producto fundamental. Es decir, marcamos todos los cuatro cuadrados que representan a  $xy'$ , los dos cuadrados que representan a  $xyz$ , los dos cuadrados que representan a  $x'y'z'$ , y el cuadrado que representa a  $x'yz't'$ , como en la fig. 8-8. (En este caso particular, no surgen marcas múltiples. En general, no se marcan los cuadrados que han sido previamente marcados porque pertenecen a otro producto fundamental.) Un recubrimiento minimal del mapa consiste en los tres rectángulos básicos maximales designados. Así que

$$E = xz + y'z' + yzt'$$

es una suma minimal para  $E$ .

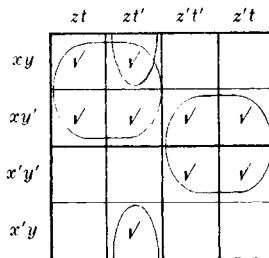


Figura 8-8

### 8.3 CIRCUITOS MINIMALES AND-OR

Se puede aplicar la anterior teoría a un importante problema de diseño de circuitos, que tiene dos versiones un poco diferentes: (1) La construcción de un circuito AND-OR cuya expresión de Boole está en la forma de suma minimal (un circuito minimal AND-OR) y que es



equivalente a un circuito lógico dado  $L$ . (2) La construcción de un circuito minimal AND-OR que tendrá una tabla de verdad prescrita.

El ejemplo 8.3 muestra cómo se maneja la versión (2). En cuanto a la versión (1), podríamos reducirla a la versión (2) (poniendo la expresión de Boole para  $L$  en forma completa de suma de productos o usando sucesiones especiales para generar la tabla de verdad) o podríamos comenzar sencillamente con una forma de suma de productos para  $L$  (obtenida, por ejemplo, por el algoritmo de la sec. 7.6). Véase el problema 8.11.

**EJEMPLO 8.3** Diseñe un circuito minimal AND-OR  $L$  de tres entradas que tenga la tabla de verdad.

$A$	0 0 0 0 1 1 1 1
$B$	0 0 1 1 0 0 1 1
$C$	0 1 0 1 0 1 0 1
$L$	1 1 0 0 1 1 0 1

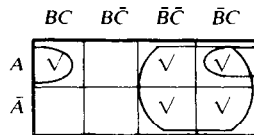
De la tabla de verdad (véase la sec. 7.8) podemos obtener la forma completa de suma de productos para  $L$ :

$$L = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot C + A \cdot B \cdot C$$

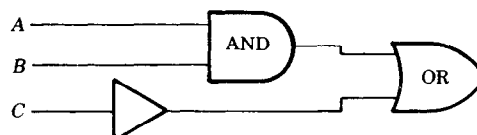
El correspondiente mapa de Karnaugh aparece en la fig. 8-9(a). Observe que  $L$  tiene dos implicantes primos  $\bar{B}$  y  $AC$ , en su recubrimiento minimal; así que

$$L = \bar{B} + AC$$

es una suma minimal para  $L$ . La fig. 8-9(b) da el correspondiente circuito minimal AND-OR para  $L$ .



(a)



(b)

Figura 8-9

**EJEMPLO 8.4** Considere la compuerta NOR [problema 7.13(b)]. Para la compuerta NOR se logran dos expresiones de Boole equivalentes (por la ley de DeMorgan), como lo ilustra la fig. 8-10. De los dos circuitos, la fig. 8-10(b) es un circuito minimal AND-OR, porque  $L = \bar{A} \cdot \bar{B}$  es una suma minimal; sin embargo, la fig. 8-10(a) involucra el mínimo número de elementos de circuito! Este ejemplo muestra que el circuito AND-OR “más simple” puede no permanecer “el más simple” cuando se compara con un circuito equivalente pero no AND-OR.

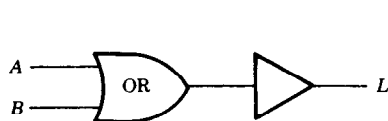
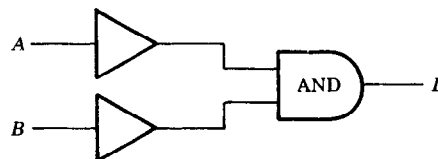
(a)  $L = \overline{A + B}$ (b)  $L = \bar{A} \cdot \bar{B}$ 

Figura 8-10

## Problemas resueltos

### SUMAS MINIMALES

8.1 Encuentre  $E_L$ , el número de literales y  $E_S$ , el número de sumandos, para cada expresión de Boole  $E$ :

$$\begin{array}{ll} (a) & E = xy'z + x'z' + yz' + x \\ (b) & E = x'y'z + xyz + y + yz' + x'z \\ (c) & E = xyt' + x'y'zt + xz't \\ (d) & E = (xy' + z)' + xy' \end{array}$$

Sencillamente, sume el número de literales, distinguiendo entre las formas complementadas y no complementadas, y el número de sumandos en cada expresión:

$$(a) \quad E_L = 3 + 2 + 2 + 1 = 8 \quad E_S = 4$$

$$(b) \quad E_L = 3 + 3 + 1 + 2 + 2 = 11 \quad E_S = 5$$

$$(c) \quad E_L = 3 + 4 + 3 = 10 \quad E_S = 3$$

(d) Debido a que no se escribe  $E$  como una suma de productos,  $E_L$  y  $E_S$  no están definidas.

8.2 Dado que  $E$  y  $F$  está cada uno en una forma de suma de productos y son expresiones de Boole equivalentes, defina: (a)  $E$  es más simple que  $F$ , (b) es minimal.

(a)  $E$  es más simple que  $F$  si  $E_L < F_L$  y  $E_S < F_S$ , o si  $E_L < F_L$  y  $E_S = F_S$ .

(b)  $E$  es minimal si no hay ninguna expresión de suma de productos equivalente que sea más simple que  $E$ .

8.3 Sean  $F_1$  y  $F_2$  productos fundamentales, tales que exactamente una variable, por ejemplo  $x_k$ , aparezca complementada en sólo uno de  $P_1$  y  $P_2$  y no complementada en el otro. El *consenso* de  $P_1$  y  $P_2$  es, entonces, el producto (sin repetición) de los literales de  $P_1$  y los literales de  $P_2$  después de que  $x_k$  y  $x'_k$  sean suprimidas. (No definimos un consenso de  $P_1 = x$  y  $P_2 = x'$ .) (a) Encuentre el consenso de:

$$\begin{array}{ll} (1) & xyz's \text{ y } xy't \\ (2) & xy' \text{ y } y \\ (3) & x'yz \text{ y } x'yt \\ (4) & x'yz \text{ y } xyz' \end{array}$$

(b) Demuestre que si  $Q$  es el consenso de  $P_1$  y  $P_2$ ,

(a) (1)  $xz'st$

(2)  $x$

(3) No tienen ningún consenso ya que ninguna variable aparece no complementada en uno de los productos y complementada en el otro.

(4) No tienen ningún consenso, ya que tanto  $x$  como  $z$  aparecen complementadas en uno de los productos y no complementadas en el otro.

(b) Como los literales conmutan, podemos suponer sin perder generalidad que

$$P_1 = a_1 a_2 \cdots a_i t \quad P_2 = b_1 b_2 \cdots b_i t' \quad Q = a_1 a_2 \cdots a_i b_1 b_2 \cdots b_i$$

Ahora,  $Q = Q(t + t') = Qt + Qt'$ . Debido a que  $Qt$  contiene a  $P_1$ ,  $P_1 + Qt = P_1$ ; y porque  $Qt'$  contiene a  $P_2$ ,  $P_2 + Qt' = P_2$ . Así

$$P_1 + P_2 + Q = P_1 + P_2 + Qt + Qt' = (P_1 + Qt) + (P_2 + Qt') = P_1 + P_2$$

8.4 Considere una expresión de Boole  $E = P_1 + P_2 + \cdots + P_n$ , en donde las  $P$ s son productos fundamentales. Se llamará *método de consenso* a la aplicación de los dos pasos siguientes a  $E$ :

Paso (1): Suprima cualquier producto fundamental  $P_i$  que incluya cualquier otro producto fundamental  $P_j$ . (Permisible por la ley de absorción.)

Paso (2): Sume el consenso  $Q$  de  $P_i$  y  $P_j$  cualesquiera, siempre y cuando  $Q$  no incluya ninguno de las  $P$ s. [Permisible por el problema 8.3(b).]



Un teorema fundamental en el álgebra de Boole dice que el método de consenso, aplicado a cualquier  $E$  suma de Boole de productos, parará eventualmente, y luego  $E$  será la suma de todos sus implicantes primos. Aplique el método de consenso a

$$E = xyz + x'z' + xyz' + x'y'z + x'yz'$$

Tenemos

$$\begin{aligned} E &= xyz + x'z' + xyz' + x'y'z && (x'yz' \text{ incluye a } x'z') \\ &= xyz + x'z' + xyz' + x'y'z + xy && (\text{Consenso de } xyz \text{ y } xyz') \\ &= x'z' + x'y'z + xy && (xyz \text{ y } xyz' \text{ incluyen a } xy) \\ &= x'z' + x'y'z + xy + x'y' && (\text{Consenso de } x'z' \text{ y } x'y'z) \\ &= x'z' + xy + x'y' && (x'y'z \text{ incluye a } x'y') \\ &= x'z' + xy + x'y' + yz' && (\text{Consenso de } x'z' \text{ y } xy) \end{aligned}$$

Observe que ahora ninguno de los dos pasos del método de consenso se puede aplicar. (El consenso de los primeros dos productos incluye —en realidad es igual— al último producto; el consenso de los últimos dos productos es igual al primer producto.) Así que ahora se expresa  $E$  como la suma de sus implicantes primos,  $x'z'$ ,  $xy$ ,  $x'y'$ , y  $yz'$ .

- 8.5 Use el método de consenso para encontrar los implicantes primos y una suma minimal para

$$E = xy' + xyz' + x'yz'$$

Tenemos:

$$\begin{aligned} E &= xy' + xyz' + x'yz' + xz' && (\text{Consenso de } xy' \text{ y } xyz') \\ &= xy' + x'yz' + xz' && (xyz' \text{ incluye a } xz') \\ &= xy' + x'yz' + xz' + yz' && (\text{Consenso de } x'yz' \text{ y } xz') \\ &= xy' + xz' + yz' && (x'yz' \text{ incluye a } yz') \end{aligned}$$

Ningún paso del método de consenso se puede aplicar ahora. Así,  $xy'$ ,  $xz'$ , y  $yz'$  son los implicantes primos de  $E$ . Al escribir estos implicantes primos en la forma completa de suma de productos, obtenemos:

$$\begin{aligned} xy' &= xy'(z + z') = xy'z + xy'z' \\ xz' &= xz'(y + y') = xyz' + xy'z' \\ yz' &= yz'(x + x') = xyz' + x'yz' \end{aligned}$$

Solamente los sumandos  $xyz'$  y  $xy'z'$  de  $xz'$  aparecen entre los otros sumandos y así se puede eliminar  $xz'$  como superfluo. Por lo tanto

$$E = xy' + yz'$$

es una suma minimal para  $E$ .

- 8.6 Use el método de consenso para encontrar los implicantes primos y una suma minimal para

$$E = xy + y't + x'yz' + xy'zt'$$

$$\begin{aligned} E &= xy + y't + x'yz' + xy'zt' + xzt' && (\text{Consenso de } xy \text{ y } xy'zt') \\ &= xy + y't + x'yz' + xzt' && (xy'zt' \text{ incluye a } xzt') \\ &= xy + y't + x'yz' + xzt' + yz' && (\text{Consenso de } xy \text{ y } x'yz') \\ &= xy + y't + xzt' + yz' && (x'yz' \text{ incluye a } yz') \\ &= xy + y't + xzt' + yz' + xt && (\text{Consenso de } xy \text{ y } y't) \\ &= xy + y't + xzt' + yz' + xt + xz && (\text{Consenso de } xzt' \text{ y } xt) \\ &= xy + y't + yz' + xt + xz && (xzt' \text{ incluye a } xz) \\ &= xy + y't + yz' + xt + xz + z't && (\text{Consenso de } y't \text{ y } yz') \end{aligned}$$

Ningún paso en el método de consenso se puede aplicar ahora. Así, los implicantes primos de  $E$  son  $xy$ ,  $y't$ ,  $yz'$ ,  $xt$ ,  $xz$ , y  $z't$ . Escribiendo estos implicantes primos en forma completa de suma de productos y suprimiendo uno por uno aquellos que son superfluos, finalmente obtenemos

$$E = y't + xz + yz'$$

como una suma minimal para  $E$ .

### MAPAS DE KARNAUGH

8.7 Encuentre el producto fundamental  $P$  representado por cada rectángulo básico en los mapas de Karnaugh que se muestran en la fig. 8-11.

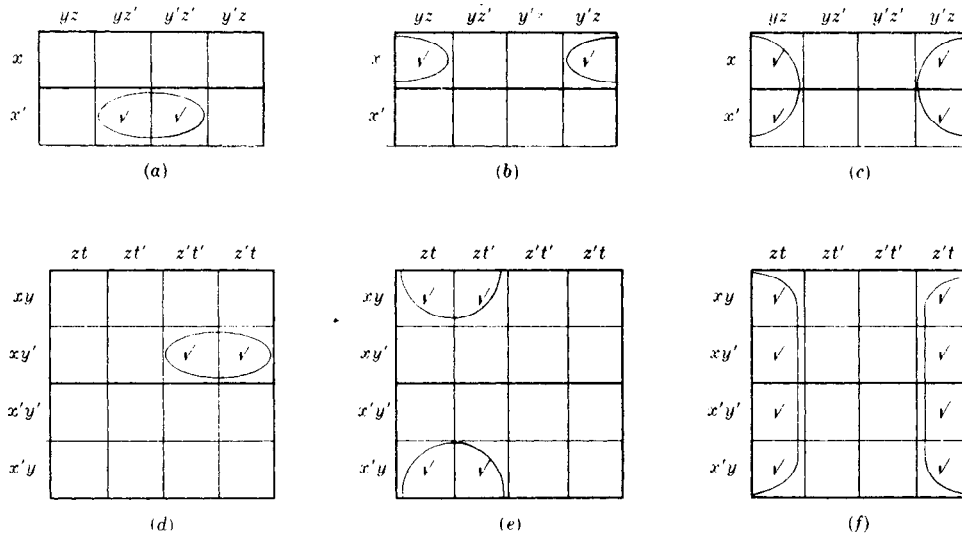


Figura 8-11

En cada caso encuentre aquellos literales que aparecen en todos los cuadrados del rectángulo básico;  $P$  es el producto de tales literales.

- (a)  $x'$  y  $z'$  aparecen en ambos cuadrados; así  $P = x'z'$ .
- (b)  $x$  y  $z$  aparecen en ambos cuadrados; así  $P = xz$ .
- (c) Solamente  $z$  aparece en todos los cuatro cuadrados; así  $P = z$ .
- (d)  $x$ ,  $y'$  y  $z'$  aparecen en ambos cuadrados; así  $P = x'y'z'$ .
- (e) Solamente  $y$  y  $z$  aparecen en todos los cuatro cuadrados; así  $P = yz$ .
- (f) Solamente  $t$  aparece en todos los ocho cuadrados; así  $P = t$ .

8.8 Encuentre una suma minimal para cada expresión  $E$ , cuyo mapa de Karnaugh se muestra en la fig. 8-12.

- (a) Hay cinco implicantes primos, señalados por los cuatro óvalos y el círculo punteado de la fig. 8-13(a). Sin embargo, no se necesita el círculo punteado para recubrir todos los cuadrados mientras que sí se necesitan los cuatro óvalos. Así que los cuatro óvalos dan la suma minimal para  $E$ :

$$E = xzt' + xy'z' + x'y'z + x'z't'$$

- (b) En la fig. 8-13(b) se muestra un recubrimiento minimal para  $E$  por medio de los tres óvalos. Así es una suma minimal para  $E$ .

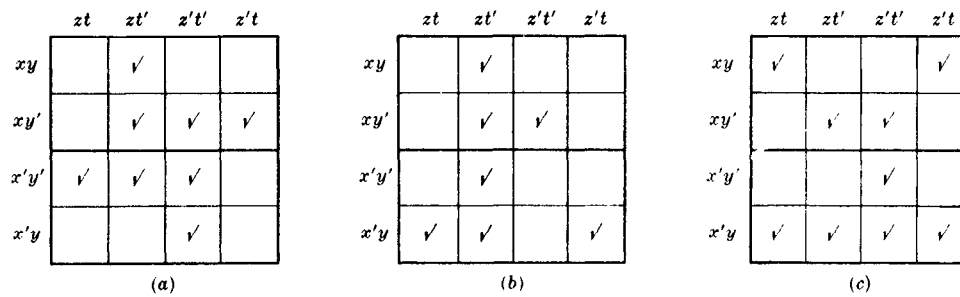


Figura 8-12

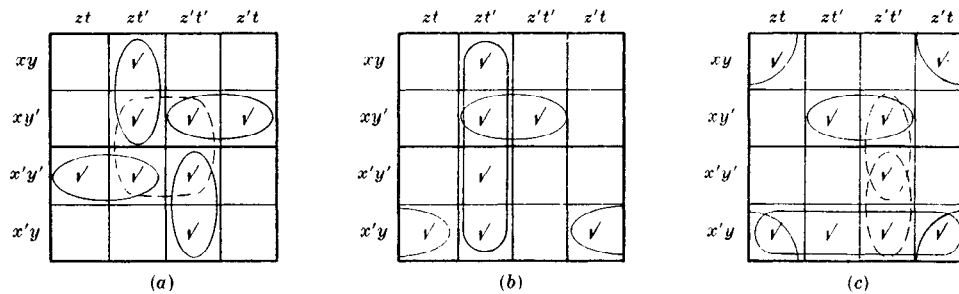


Figura 8-13

(c) Hay dos maneras de recubrir el cuadrado  $x'y'z't'$  como se indica en la figura 8-13(c). Así,

$$E = x'y + yt + xy't' + y'z't' = x'y + yt + xy't' + x'z't'$$

son dos sumas minimales para  $E$ .

8.9 Use un mapa de Karnaugh para encontrar una suma minimal para

$$E = y't' + y'z' + yzt' + x'y'zt$$

Marque los cuatro cuadrados correspondientes al producto fundamental  $y't'$ , los cuatro cuadrados correspondientes a  $yzt'$ , y el cuadrado correspondiente a  $x'y'zt$ . Esto da el mapa de Karnaugh en la fig. 8-14. Un recubrimiento minimal consta de los tres rectángulos básicos maximales marcados.

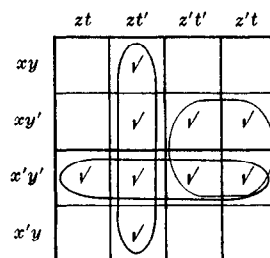


Figura 8-14



Así

$$E = zt' + y'z' + x'y'$$

es una suma minimal para  $E$ .

### CIRCUITOS MINIMALES AND-OR

8.10 Dibuje un circuito AND-OR minimal que dé la siguiente tabla de verdad:

$A$	0 0 0 0 1 1 1 1
$B$	0 0 1 1 0 0 1 1
$C$	0 1 0 1 0 1 0 1
$L$	1 0 1 0 1 0 0 1

De la tabla de verdad obtenemos la representación como suma de productos.

$$L = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + A \cdot B \cdot C$$

El mapa de Karnaugh de  $L$  aparece en la fig. 8-15(a). Hay tres implicants primos, como se indica con los tres óvalos. Así

$$L = ABC + \bar{A}\bar{C} + \bar{B}\bar{C}$$

es una suma minimal para  $L$ ; el correspondiente circuito AND-OR minimal aparece en la fig. 8-15(b).

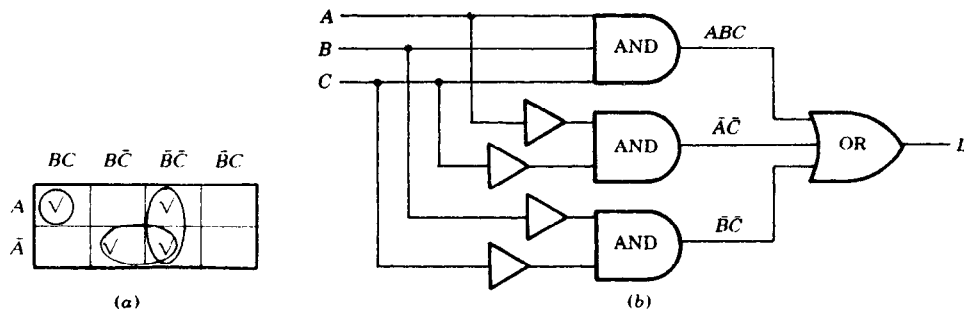


Figura 8-15

8.11 Rediseñe el circuito  $L$  de la fig. 8-16(a) para que sea un circuito minimal AND-OR.

Primero, encuentre la salida del circuito rotulando sucesivamente la(s) entrada(s) y salida de cada compuerta hasta llegar a la salida del circuito, como en la fig. 8-16(b). Luego, reduzca  $L$  a una suma de productos, aplicando las leyes del álgebra de Boole:

$$L = AB + (\bar{A} + \bar{B}) + \bar{A}\bar{B} = AB + \bar{A}\bar{B} + A + \bar{B} = A + \bar{B}$$

en donde en el último paso se ha usado dos veces la ley de absorción. La expresión final es, obviamente, una suma minimal para  $L$ . La fig. 8-16(c) muestra el correspondiente circuito minimal AND-OR.

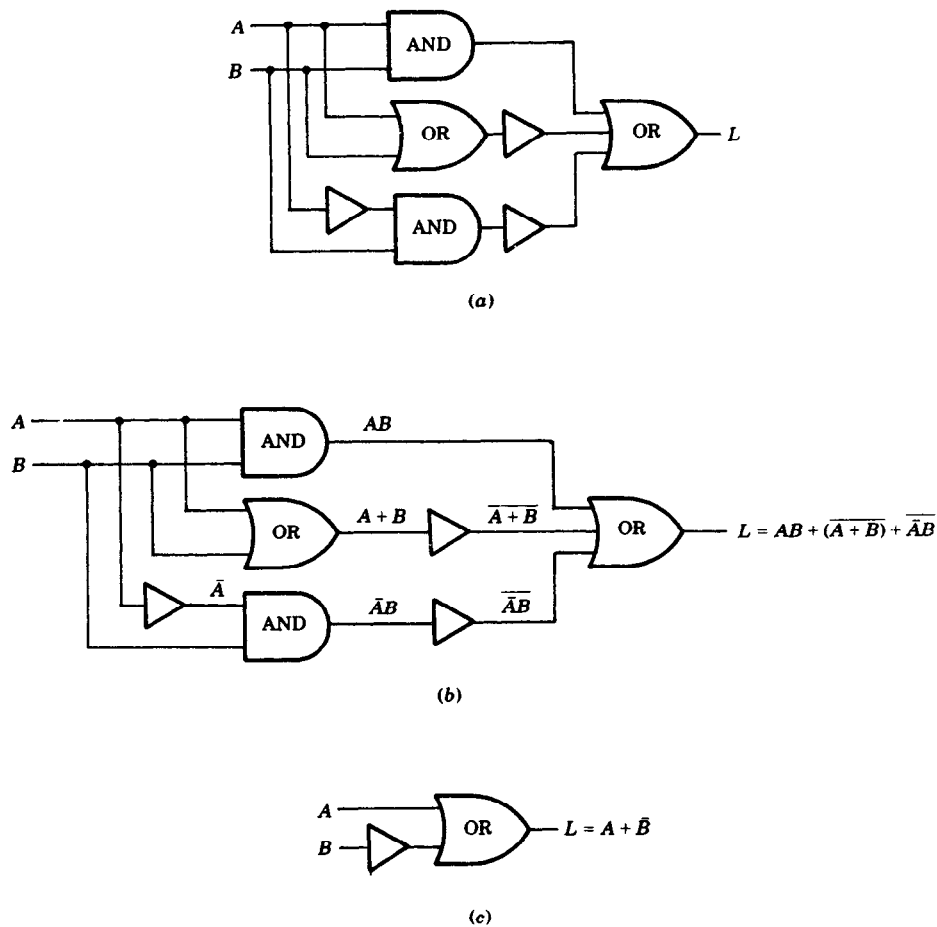


Figura 8-16

8.12 Diseñe un circuito minimal AND-OR  $L$  para que tres interruptores  $A$ ,  $B$ , y  $C$ , puedan controlar una misma luz de un corredor.

Un interruptor dado puede estar “encendido” (cerrado) o “apagado” (abierto), respectivamente denotado por 1 y 0. Cualquiera que sea el estado de los tres circuitos, un cambio en cada interruptor cambiará la paridad del número de 1s. El circuito, por lo tanto, logrará la función buscada si se asocia paridad impar con la luz “encendida” (representado por un 1) y paridad par con la luz apagada (representada por 0), según la siguiente tabla.

A	00001111
B	00110011
C	01010101
L	01101001

De la tabla de verdad,

$$L = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + ABC$$

y ésta es una suma minimal para  $L$ , como se puede verificar del mapa de Karnaugh, fig. 8-17(a). El circuito correspondiente minimal AND-OR aparece en la fig. 8-17(b).

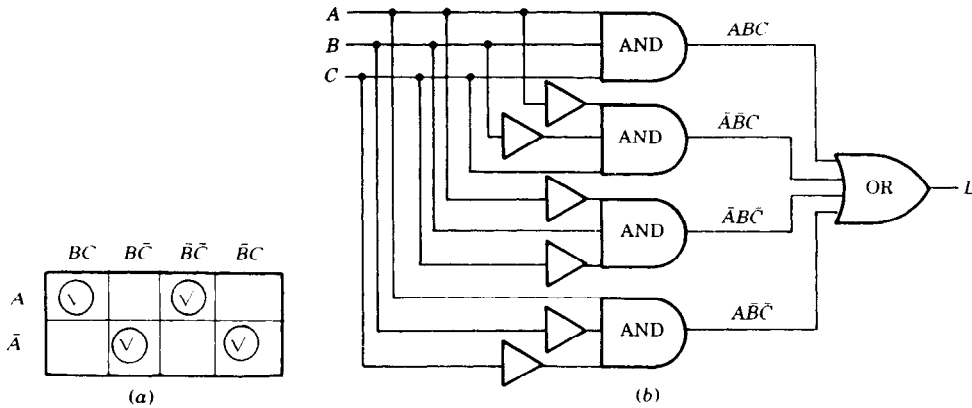


Figura 8-17

## Problemas suplementarios

### SUMAS MINIMALES, MAPAS DE KARNAUGH

8.13 Encuentre el consenso (véase el problema 8.4) de cada par de productos fundamentales:

- (a)  $xz$  y  $xz'$       (c)  $xy$  y  $x'zs't$       (e)  $xy'zt$  y  $xzs't$   
 (b)  $x'yt$  y  $y'z$       (d)  $xs't$  y  $xy'st$       (f)  $xy'zt$  y  $x'yst$

8.14 Use el método del consenso (véase el problema 8.4) para encontrar los implicants primos de:

- (a)  $E_1 = xy'z' + x'y + x'y'z' + x'yz$   
 (b)  $E_2 = xy' + x'z't + xyz't' + x'y'zt'$   
 (c)  $E_3 = xyz't + xyz't' + xz't' + x'y'z' + x'yz't$

8.15 Encuentre todas las posibles sumas minimales para cada expresión de Boole  $E$ , dado el mapa de Karnaugh de la fig. 8-18.

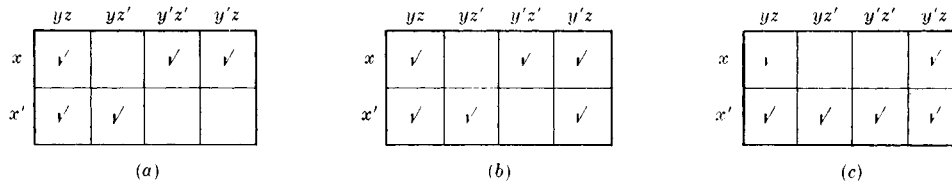


Figura 8-18

- 8.16 Encuentre todas las posibles sumas minimales para cada expresión de Boole  $E$  dada por el mapa de Karnaugh de la fig. 8-9.

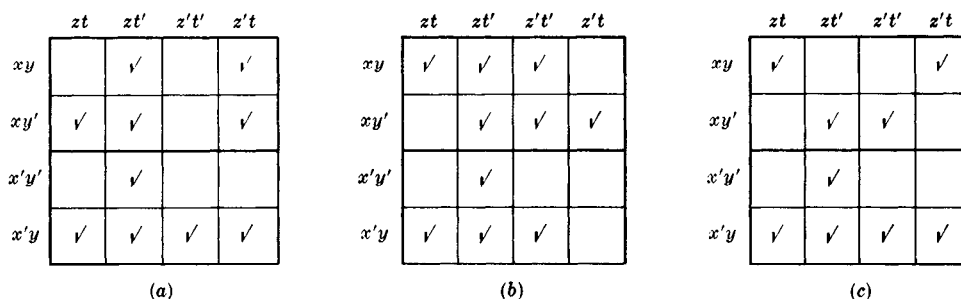


Figura 8-19

- 8.17 Encuentre una suma minimal para cada expresión de Boole:

$$\begin{array}{ll}
 (a) E_1 = xy + x'y + x'y' & (c) E_3 = y'z + y'z't' + z't \\
 (b) E_2 = x + x'yz + xy'z' & (d) E_4 = y'zt + xzt' + xy'z'
 \end{array}$$

### CIRCUITOS MINIMALES AND-OR

- 8.18 Escriba expresiones de Boole para circuitos minimales AND-OR con entrada  $A, B, C$ , que den las tablas de verdad de la fig. 8-20.

$A$	1	1	1	1	0	0	0	0
$B$	1	1	0	0	1	1	0	0
$C$	1	0	1	0	1	0	1	0
$Y_1$	1	1	0	0	1	0	0	0
$Y_2$	1	1	1	0	0	0	1	1
$Y_3$	0	0	1	1	1	1	0	1

Figura 8-20

- 8.19 Rediseñe el circuito  $L$  de la fig. 8-21, de tal manera que se transforme en un circuito minimal AND-OR.

- 8.20 Rediseñe el circuito  $L$  de la fig. 8-22, de tal manera que se transforme en un circuito minimal AND-OR.

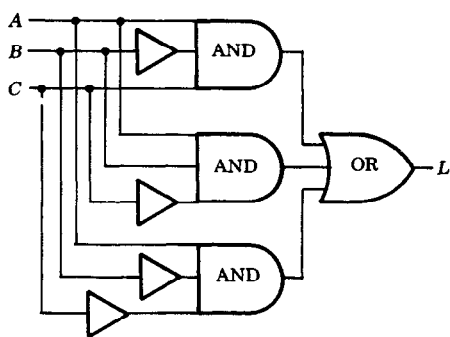


Figura 8-21

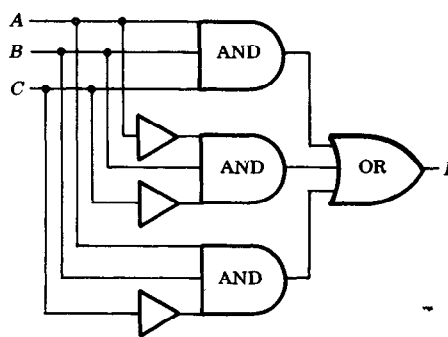


Figura 8-22

### Respuestas a los problemas suplementarios

8.13 (a)  $x$ , (b)  $x'zt$ , (c)  $yzs't$ , (d)  $xy't$ , (e) no hay consenso (f) no hay consenso.

8.14 (a)  $x'y$ ,  $x'z$ ,  $y'z'$ ; (b)  $xy'$ ,  $xzt'$ ,  $y'zt'$ ,  $x'z't$ ,  $y'z't$ ; (c)  $xyzt$ ,  $xz't'$ ,  $y'z't'$ ,  $x'y'z'$ ,  $x'z't$

8.15 (a)  $E = xy' + x'y + yz = xy' + x'y + xz$ , (b)  $E = xy' + x'y + z$ , (c)  $E = x' + z$

8.16 (a)  $E = x'y + zt' + xz't + xy'z = x'y + zt' + xz't + xy't$

(b)  $E = yz + yt' + zt' + xy'z'$

(c)  $E = x'y = yt + xy't' + x'zt = x'y + yt + xy't' + y'zt$

8.17 (a)  $E_1 = x' + y$  (c)  $E_3 = y' + z't$

(b)  $E_2 = xz' + yz$  (d)  $E_4 = xy' + zt' + y'zt$

8.18  $Y_1 = AB + BC$ ,  $Y_2 = AB + \bar{A}\bar{B} + \bar{B}C = AB + \bar{A}\bar{B} + AC$ ,  $Y_3 = A\bar{B} + \bar{A}B + \bar{B}C$

8.19  $Y = A\bar{B} + A\bar{C}$

8.20  $Y = AB + B\bar{C}$

## Vectores, matrices, variables subindizadas

### 9.1 INTRODUCCION

Suponga que la siguiente es una lista de los pesos (en libras) de ocho estudiantes:

134    156    127    145    203    186    145    138

Se pueden denotar todos los valores en la lista usando un solo símbolo, digamos  $w$ , pero con diferentes subíndices:

$w_1$      $w_2$      $w_3$      $w_4$      $w_5$      $w_6$      $w_7$      $w_8$

Obsérvese que los subíndices denotan la posición del valor en la lista, por ejemplo

$w_1 = 134$ , el primer número     $w_2 = 156$ , el segundo número . . .

Esta lista lineal de valores se llama *vector* o *arreglo lineal*.

Usando esta notación de subíndices, es posible escribir la suma y el promedio de los pesos como

$$\sum_{i=1}^8 w_i = w_1 + w_2 + \cdots + w_8 \quad \text{y} \quad \left( \sum_{i=1}^8 w_i \right) / 8$$

(véase la sec. 9.5). La notación con subíndices es indispensable para desarrollar expresiones concisas para manipulaciones aritméticas.

Análogamente, se podría hacer un listado de las ventas semanales (aproximadas de una cadena de 28 almacenes, cada almacén con 4 departamentos, tal como en la tabla 9-1. De nuevo, uno solamente necesita usar un símbolo, digamos  $s$ , pero ahora, con dos subíndices, para denotar las entradas en la tabla como

$s_{1,1}$      $s_{1,2}$      $s_{1,3}$      $s_{1,4}$      $s_{2,1}$      $s_{2,2}$     . . .     $s_{28,4}$

en donde  $s_{i,j}$  denota las ventas en el almacén  $i$ -ésimo, departamento  $j$ -ésimo. (Escribiremos simplemente  $s_{ij}$  en lugar de  $s_{i,j}$  cuando no haya posibilidad de confusión.) Así,

$s_{11} = \$2872$      $s_{12} = \$805$      $s_{13} = \$3211$     . . .

se llama *matriz* o *arreglo* de dos dimensiones tal *arreglo rectangular*.

En este capítulo investigaremos vectores y matrices, y ciertas operaciones algebraicas que los usan. En un tal contexto, a los números mismos se les llama *escalares*. Terminamos el capítulo con una discusión de variables subindizadas y la manera de manejar los vectores y las matrices en programas de computadores.

Tabla 9.1

Dept. Almacén	1	2	3	4
1	2872	805	3211	1560
2	2196	1223	2525	1744
3	3257	1017	3686	1951
...	...	...	...	...
28	2618	931	2333	982

## 9.2 VECTORES

Con un vector,  $u$ , simplemente queremos decir una lista de números (o una  $n$ -tupla):

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$$

A los números  $u_i$  se les llama *componentes* de  $u$ . Si todos los  $u_i = 0$ , entonces a  $u$  se le llama *vector cero*. Dos vectores,  $u$  y  $v$ , son *iguales*, escrito  $u = v$ , si tienen el mismo número de componentes y si las componentes correspondientes son iguales.

### EJEMPLO 9.1

(a) Los siguientes son vectores:

$$(3, -4) \quad (6, 8) \quad (0, 0, 0) \quad (2, 3, 4)$$

Los primeros dos vectores tienen dos componentes, mientras que los dos últimos vectores tienen tres componentes. El tercer vector es el vector cero con tres componentes.

(b) Aunque los vectores  $(1, 2, 3)$  y  $(2, 3, 1)$  contienen los mismos números, no son iguales, ya que las componentes correspondientes no son iguales.

Si dos vectores,  $u$  y  $v$ , tienen el mismo número de componentes, su suma, escrita  $u + v$ , es el vector obtenido al sumar componentes correspondientes de  $u$  y de  $v$ :

$$\begin{aligned} u + v &= (u_1, u_2, \dots, u_n) + (v_1, v_2, \dots, v_n) \\ &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n) \end{aligned}$$

El *producto* de un escalar  $k$  y un vector  $u$ , escrito  $ku$ , es el vector obtenido al multiplicar cada componente de  $u$  por  $k$ :

$$ku = k(u_1, u_2, \dots, u_n) = (ku_1, ku_2, \dots, ku_n)$$

También definimos:

$$-u = (-1)u$$

y

$$u - v = u + (-v)$$

y hacemos que  $0$  denote el vector cero.

**EJEMPLO 9.2** Sea  $u = (2, 3, -4)$  y  $v = (1, -5, 8)$ . Entonces

$$u + v = (2 + 1, 3 - 5, -4 + 8) = (3, -2, 4)$$

$$5u = (5 \cdot 2, 5 \cdot 3, 5 \cdot (-4)) = (10, 15, -20)$$

$$-v = (-1)(1, -5, 8) = (-1, 5, -8)$$

$$2u - 3v = (4, 6, -8) + (-3, 15, -24) = (1, 21, -32)$$

Bajo las operaciones de adición vectorial y multiplicación escalar, los vectores tienen varias propiedades, por ejemplo,

$$k(u + v) = ku + kv$$

en donde  $k$  es un escalar y  $u$  y  $v$  son vectores. Como los vectores pueden ser considerados como un caso especial de matrices, el teorema 9.1 (véase la sec. 9.4) contiene una lista de tales propiedades.

## 9.3 MATRICES

Una *matriz*,  $A$ , es un arreglo rectangular de números:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Las  $m$   $n$ -tuplas horizontales

$$(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) \quad (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}) \quad \dots \quad (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$$

se llaman *filas* de  $A$ , y las  $n$   $m$ -tuplas verticales,

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \quad \dots \quad \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

sus *columnas*. Observe que el elemento  $a_{ij}$  llamado la *entrada*  $ij$ , aparece en la fila  $i$  y en la columna  $j$ . Frecuentemente denotamos tal matriz sencillamente por  $A = (a_{ij})$ .

Una matriz con  $m$  filas y  $n$  columnas se dice que es una matriz  $m$  por  $n$ , escrito  $m \times n$ . La pareja de números  $m$  y  $n$  se llama *tamaño* de la matriz. Dos matrices,  $A$  y  $B$ , son *iguales*, escrito  $A = B$ , si tienen el mismo tamaño y si los elementos correspondientes son iguales.

A veces a una matriz que tiene solamente un fila se le llama, *vector fila*, y a una matriz que tiene solamente una columna, *vector columna*. Se llama *matriz cero* a una matriz cuyas entradas son todas cero y generalmente se le denota por 0.

## EJEMPLO 9.3

(a) El arreglo rectangular

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

es una matriz  $2 \times 3$ . Sus filas son  $(1, -3, 4)$  y  $(0, 5, -2)$ , y sus columnas son

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(b) La matriz cero  $2 \times 4$  es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) El enunciado

$$\begin{pmatrix} x+y & 2z+w \\ x-y & z-w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

es equivalente al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \\ 2z+w=5 \\ z-w=4 \end{cases}$$

(La solución del sistema de ecuaciones es  $x = 2$ ,  $y = 1$ ,  $z = 3$ ,  $w = -1$ .)



### 9.4 ADICION MATRICIAL Y MULTIPLICACION ESCALAR

Sean  $A$  y  $B$  dos matrices del mismo tamaño. La *suma* de  $A$  y  $B$ , escrita  $A + B$ , es la matriz obtenida al sumar los elementos correspondientes de  $A$  y de  $B$ :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

El *producto* de un escalar  $k$  y una matriz  $A$ , escrito  $kA$  o  $Ak$ , es la matriz obtenida al multiplicar cada elemento de  $A$  por  $k$ :

$$k \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

También definimos

$$-A = (-1)A \quad \text{y} \quad A - B = A + (-B)$$

A la matriz  $-A$  se le llama el *negativo* de la matriz  $A$ .

#### EJEMPLO 9.4

$$(a) \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 & -2+0 & 3+(-6) \\ 0+2 & 4+(-3) & 5+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad 3 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot (-2) & 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot 3 & 3 \cdot (-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 12 & 9 & -15 \end{pmatrix}$$

$$(c) \quad 2 \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 8 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -10 \\ -5 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ 3 & 27 \end{pmatrix}$$

Las matrices tienen las siguientes propiedades para la adición matricial y la multiplicación escalar.

**Teorema 9.1:** Sean  $A$ ,  $B$  y  $C$  matrices del mismo tamaño y sean  $k$  y  $k'$  escalares. Entonces

- (i)  $(A + B) + C = A + (B + C)$ , o sea que la adición es asociativa.
- (ii)  $A + B = B + A$ , o sea que la adición es conmutativa.
- (iii)  $A + 0 = 0 + A = A$
- (iv)  $A + (-A) = (-A) + A = 0$
- (v)  $k(A + B) = kA + kB$
- (vi)  $(k + k')A = kA + k'A$
- (vii)  $(kk')A = k(k'A)$
- (viii)  $1A = A$

Como los vectores con  $n$  componentes se pueden identificar como matrices  $1 \times n$  o matrices  $n \times 1$ , este teorema también vale para vectores con adición vectorial y multiplicación escalar.

### 9.5 SIMBOLO DE SUMATORIA

Antes de definir multiplicación matricial, resultará conveniente introducir el símbolo de sumatoria  $\Sigma$  (la letra griega sigma).

Supongamos que  $f(k)$  es una expresión algebraica con la variable  $k$ . La expresión.

$$\sum_{k=1}^n f(k) \quad \text{o equivalentemente} \quad \sum_{k=1}^n f(k)$$

tiene entonces el siguiente significado. Primero hacemos  $k = 1$  en  $f(k)$ , obteniendo

$$f(1)$$

Luego hacemos  $k = 2$  en  $f(k)$ , obteniendo  $f(2)$ , y sumamos esto a  $f(1)$ , obteniendo

$$f(1) + f(2)$$

En seguida hacemos  $k = 3$  en  $f(k)$ , obteniendo  $f(3)$ , y sumamos esto a la suma anterior, obteniendo

$$f(1) + f(2) + f(3)$$

Continuamos este proceso hasta obtener la suma

$$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n-1) + f(n)$$

Observe que en cada paso el valor de  $k$  se incrementa en 1 hasta que  $k$  sea igual a  $n$ . Naturalmente, podríamos usar otra variable en lugar de  $k$ .

También generalizamos nuestra definición haciendo que la suma vaya de cualquier entero  $n_1$ , a cualquier entero  $n_2$ , tales que  $n_1 \leq n_2$ ; o sea, definimos

$$\sum_{k=n_1}^{n_2} f(k) = f(n_1) + f(n_1 + 1) + f(n_1 + 2) + \cdots + f(n_2)$$

Así tenemos, por ejemplo,

$$\sum_{k=1}^5 x_k = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

$$\sum_{j=2}^5 j^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 4 + 9 + 16 + 25 = 54$$

$$\sum_{i=0}^n a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

$$\sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + a_{i3} b_{3j} + \cdots + a_{ip} b_{pj}$$

## 9.6 MULTIPLICACION MATRICIAL

Supongamos ahora que  $A$  y  $B$  son dos matrices tales, que el número de columnas de  $A$  es igual al número de filas de  $B$ , digamos que  $A$  es una matriz  $m \times p$  y  $B$  es una matriz  $p \times n$ . El producto de  $A$  y  $B$ , escrito  $AB$ , es entonces la matriz  $m \times n$  cuya entrada  $ij$  se obtiene multiplicando los elementos de la fila  $i$  de  $A$  por los correspondientes elementos de la columna  $j$  de  $B$  y luego sumamos todos estos productos:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & b_{ij} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & c_{ij} & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

en donde

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{ip} b_{pj} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$$

Si el número de columna de  $A$  no es igual al número de filas de  $B$ , entonces el producto  $AB$  no está definido.

## EJEMPLO 9.5

(a) Dado

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

encuentre  $AB$ .

Como  $A$  es  $2 \times 2$  y  $B$  es  $2 \times 3$ , la matriz producto  $AB$  está definida y es una matriz  $2 \times 3$ . Para obtener los elementos de la primera fila de la matriz producto  $AB$ , multiplicamos la primera fila  $(1, 3)$  de  $A$  por las columnas

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

de  $B$ , respectivamente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 0 + 3 \cdot (-2) & 1 \cdot (-4) + 3 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -6 & 14 \end{pmatrix}$$

Para obtener los elementos de la segunda fila de la matriz producto  $AB$ , multiplicamos la segunda fila  $(2, -1)$  de  $A$  por las columnas de  $B$ , respectivamente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -6 & 14 \\ 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 & 2 \cdot 0 + (-1) \cdot (-2) & 2 \cdot (-4) + (-1) \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -6 & 14 \\ 1 & 2 & -14 \end{pmatrix}$$

Así

$$AB = \begin{pmatrix} 11 & -6 & 14 \\ 1 & 2 & -14 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 & 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \\ 0 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 0 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Vemos por el ejemplo 9.5(b) que la multiplicación de matrices no obedece la ley conmutativa, o sea, los productos  $AB$  y  $BA$  de matrices no tienen que ser iguales. La multiplicación matricial, sin embargo, posee las siguientes propiedades:

**Teorema 9.2:** Siempre que las sumas y productos estén definidos,

- (a)  $(AB)C = A(BC)$
- (b)  $A(B + C) = AB + AC$
- (c)  $(B + C)A = BA + CA$
- (d)  $k(AB) = (kA)B = A(kB)$ , en donde  $k$  es un escalar

*Observación:* Los sistemas de ecuaciones lineales están estrechamente relacionados con ecuaciones matriciales. Por ejemplo, el sistema

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 5x - 6y + 8z = 8 \end{cases}$$

es equivalente a la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & -6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

O sea, toda solución del sistema de ecuaciones es también una solución de la ecuación matricial, y viceversa. Los sistemas de ecuaciones lineales se tratan en el capítulo 10.

### 9.7 MATRICES CUADRADAS

Una matriz con el mismo número de filas y de columnas se llama *matriz cuadrada*. Una matriz cuadrada con  $n$  filas y  $n$  columnas se dice que es de orden  $n$ . La *diagonal principal*, o simplemente *diagonal*, de una matriz cuadrada de orden  $n$   $A = (a_{ij})$  consta de los elementos  $a_{11}$ ,  $a_{22}$ ,  $\dots$ ,  $a_{nn}$ .

#### EJEMPLO 9.6 La matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & -1 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

es una matriz cuadrada de orden 3. Los números a lo largo de la matriz principal son 1,  $-4$  y 2.

A la matriz de orden  $n$  con 1s a lo largo de la diagonal principal y 0s en los demás sitios, o sea,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se le llama *matriz unidad* y se denotará por  $I$ . La matriz unidad  $I$  desempeña el mismo papel en la multiplicación matricial que el número 1 en la multiplicación usual de números. Específicamente,

$$AI = IA = A$$

para cualquier matriz cuadrada  $A$ .

Podemos formar potencias de una matriz cuadrada  $X$  definiendo

$$X^2 = XX, \quad X^3 = X^2X, \quad \dots \quad \text{y} \quad X^0 = I$$

También podemos formar polinomios en  $X$ . O sea, para todo polinomio

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

definimos  $f(x)$  como la matriz

$$f(X) = a_0I + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$$

En caso de que  $f(A)$  sea la matriz cero, entonces se dice que la matriz  $A$  es un cero del polinomio  $f(x)$ , o una raíz de la ecuación polinomial  $f(x) = 0$ .

#### EJEMPLO 9.7 Dado

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{pmatrix}$$

Si  $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ , entonces

$$f(A) = 2 \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -18 \\ -27 & 61 \end{pmatrix}$$

Por otra parte si  $g(x) = x^2 + 3x - 10$  entonces

$$g(A) = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} - 10 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así,  $A$  es un cero del polinomio  $g(X) = X^2 + 3X - 10I$ .

## 9.8 MATRICES INVERTIBLES

Una matriz cuadrada  $A$  se dice que es *invertible* si existe una matriz  $B$  con la propiedad

$$AB = BA = I, \text{ la matriz identidad}$$

Tal matriz  $B$  es única; se llama el *inverso* de  $A$  y se denota  $A^{-1}$ . Observe que  $B$  es el inverso de  $A$  si y sólo si  $A$  es el inverso de  $B$ . Por ejemplo, suponga que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$AB = \begin{pmatrix} 6-5 & -10+10 \\ 3-3 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad BA = \begin{pmatrix} 6-5 & 15-15 \\ -2+2 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Así,  $A$  y  $B$  son inversos.

Se sabe que  $AB = I$  si y sólo si  $BA = I$ ; así, es necesario verificar solamente uno de los productos para determinar si dos matrices dadas son inversos.

### EJEMPLO 9.8

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11+0+12 & 2+0-2 & 2+0-2 \\ -22+4+18 & 4+0-3 & 4-1-3 \\ -44-4+48 & 8+0-8 & 8+1-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Así las dos matrices son invertibles y son inversos entre sí.

## 9.9 DETERMINANTES

A cada matriz cuadrada de orden  $n$   $A = (a_{ij})$  le asignamos un número específico, llamado *determinante* de  $A$ , denotado  $\det(A)$  o  $|A|$  o

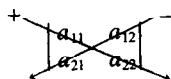
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Hacemos hincapié en que un arreglo  $n \times n$  de números encerrados entre dos rectas, llamado determinante de orden  $n$ , no es una matriz, si no denota el número que la función determinante le asigna al arreglo correspondiente de números, o sea, a la matriz cuadrada correspondiente.

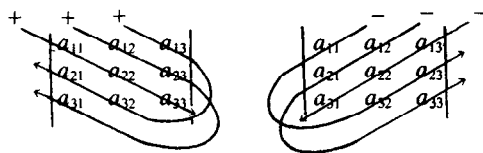
Los determinantes de orden uno, dos y tres se definen como sigue:

$$\begin{aligned} |a_{11}| &= a_{11} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned}$$

El siguiente diagrama puede ayudarle al lector a recordar cómo evaluar el determinante de orden dos:



O sea, el determinante es igual al producto de los elementos a lo largo de la flecha marcada con más, menos el producto de los elementos a lo largo de la flecha marcada con menos. Hay un esquema análogo para determinantes de orden tres. Por claridad en el diagrama, hemos separado las flechas marcadas con más y las flechas marcadas con menos:



### EJEMPLO 9.9

$$(a) \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 - 4 \cdot 2 = 15 - 8 = 7 \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 1 \cdot (-4) = 12 + 4 = 16$$

$$(b) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) \cdot 5 + 3 \cdot 4 \cdot 1 - 3 \cdot 6 \cdot 5 - 1 \cdot 4 \cdot 0 - 2 \cdot (-1) \cdot 1 = -81$$

La definición general de un determinante de orden  $n$  es la siguiente:

$$(A) = \sum \text{sgn}(\sigma) a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

en donde las sumas es sobre todas las permutaciones posibles  $\sigma = (j_1, j_2, \dots, j_n)$  de  $(1, 2, \dots, n)$ . Aquí  $\text{sgn}(\sigma)$  es igual a más o a menos, según que se necesite un número par o impar de intercambios para cambiar  $\sigma$ , de tal manera que sus números estén en el orden usual. Hemos incluido la definición general de la función determinante para que nuestra teoría quede completa. Remitimos al lector a textos de teoría de matrices o de álgebra lineal para técnicas de cómputo de determinantes de orden mayor de tres. Las permutaciones se estudian en el cap. 11.

Una propiedad importante de la función determinante es ser multiplicativa; es decir,

**Teorema 9.3:** Para dos matrices cuadradas cualesquiera de orden  $n$   $A$  y  $B$ ,  $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ .

### 9.10 MATRICES INVERTIBLES Y DETERMINANTES

**Teorema 9.4:** Una matriz cuadrada es invertible si y sólo si tiene un determinante distinto de 0.

Ahora vamos a demostrar cómo calcular el inverso de una matriz  $2 \times 2$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

cuyo determinante no es cero. Buscamos escalares  $x, y, z$ , y  $w$  tales que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bw \\ cx + dz & cy + dw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que se reduce a resolver el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales en dos incógnitas:

$$\begin{cases} ax + bz = 1 \\ cx + dz = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} ay + bw = 0 \\ cy + dw = 1 \end{cases}$$

Como  $|A| = ad - bc$  no es cero, podemos resolver las incógnitas  $x, y, z$  y  $w$  de una manera única, obteniendo:

$$x = \frac{d}{ad - bc} = \frac{d}{|A|}, \quad y = \frac{-b}{ad - bc} = \frac{-b}{|A|}, \quad z = \frac{-c}{ad - bc} = \frac{-c}{|A|}, \quad w = \frac{a}{ad - bc} = \frac{a}{|A|}$$

De modo que,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d/|A| & -b/|A| \\ -c/|A| & a/|A| \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

En otras palabras, podemos obtener el inverso de una matriz  $2 \times 2$ , con determinante no cero, (i) intercambiando los elementos de la diagonal principal, (ii) tomando el negativo de los otros elementos, y (iii) dividiendo cada elemento por el determinante de la matriz original. Por ejemplo, si

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

entonces  $|A| = -2$ , y así

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Para los inversos de las matrices invertibles de orden mayor de 2, se puede dar una fórmula análoga, aunque más complicada.

### 9.11 VARIABLES SUBINDIZADAS

Los nombres de datos o variables en programas de computador, discutido en la sec. 5.2, también se llaman variables no subindizadas o variables escalares, ya que cada una de tales variables representa una celda de memoria en la cual se guarda un solo valor. Frecuentemente, uno quiere usar el mismo nombre de datos para referirse a un arreglo de valores, más que a un solo valor. Esto se puede hacer usando variables subindizadas. Sin embargo, como las instrucciones de computadores deben ser perforadas (o escritas) en una línea, los “subíndices” aparecen en paréntesis, como, por ejemplo,

$W(1), W(2), W(3), \dots$  en lugar de  $w_1, w_2, w_3, \dots$

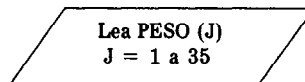
o

$S(1, 1), S(1, 2), S(1, 3), \dots$  en lugar de  $s_{11}, s_{12}, s_{13}, \dots$

Usaremos ambas notaciones en nuestros diagramas de flujo.

Al número de subíndices se le llama *dimensión* del arreglo o de la variable subindizada. Así, la  $W$  anterior es un arreglo unidimensional, también llamado *arreglo lineal* o *arreglo vector*, y la variable  $S$  es un arreglo bidimensional, también llamado *arreglo matriz*. La mayoría de las computadoras pueden manejar arreglos con uno, dos o tres subíndices, y algunas de las computadoras más grandes aceptan hasta siete subíndices. Si la dimensión es dos o tres, al primer subíndice de un arreglo se le llama su *fila*, al segundo su *columna*, y al tercero (si lo tiene) su *página*.

**EJEMPLO 9.10** La figura 9.1(a) es el diagrama de flujo de un algoritmo para calcular el peso promedio de 35 estudiantes. Como lo muestra por la caja de entrada



PESO es una variable subindizada que representa las direcciones

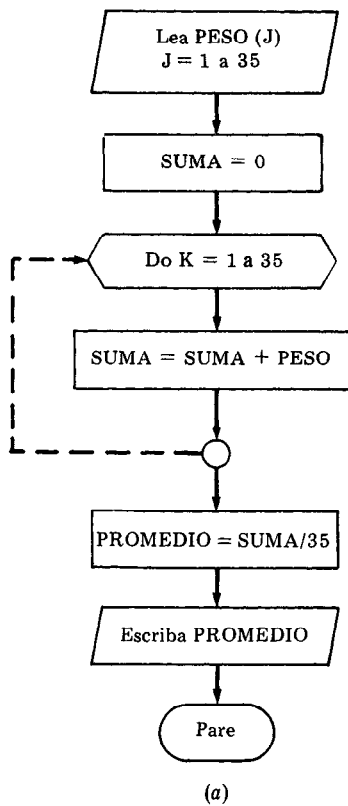
PESO (1), PESO (2), PESO (3), ... PESO (35)

de los campos de datos de entrada. La fig. 9-1(b) da un programa en pseudocódigo equivalente.

En general, cuando se usa una variable subindizada en un programa de computador, uno debe dar al compilador la siguiente información antes de correr realmente el programa.

1. El nombre de la variable subindizada.
2. El número de subíndices (o sea la dimensión del arreglo).
3. Los recorridos de los subíndices, que en total determinan el número de lugares de memoria asignados a la variable.

Cada lenguaje de programación tiene su propia sintaxis para hacer esto.



```

lea PESO (J), J = 1 a 35
SUMA = 0
DO K = 1 a 35
    SUMA = SUMA + PESO (K)
ENDDO
PROMEDIO = SUMA/35
escriba PROMEDIO
FIN
  
```

(b)

Figura 9-1

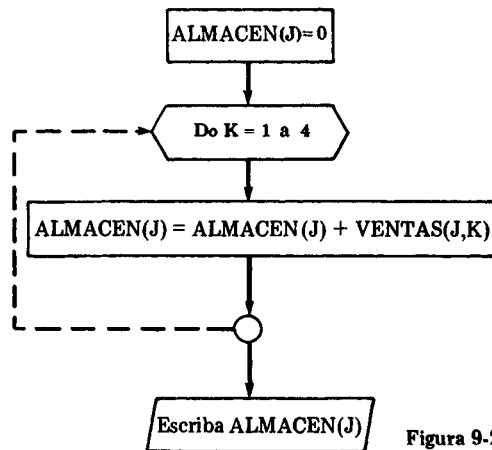


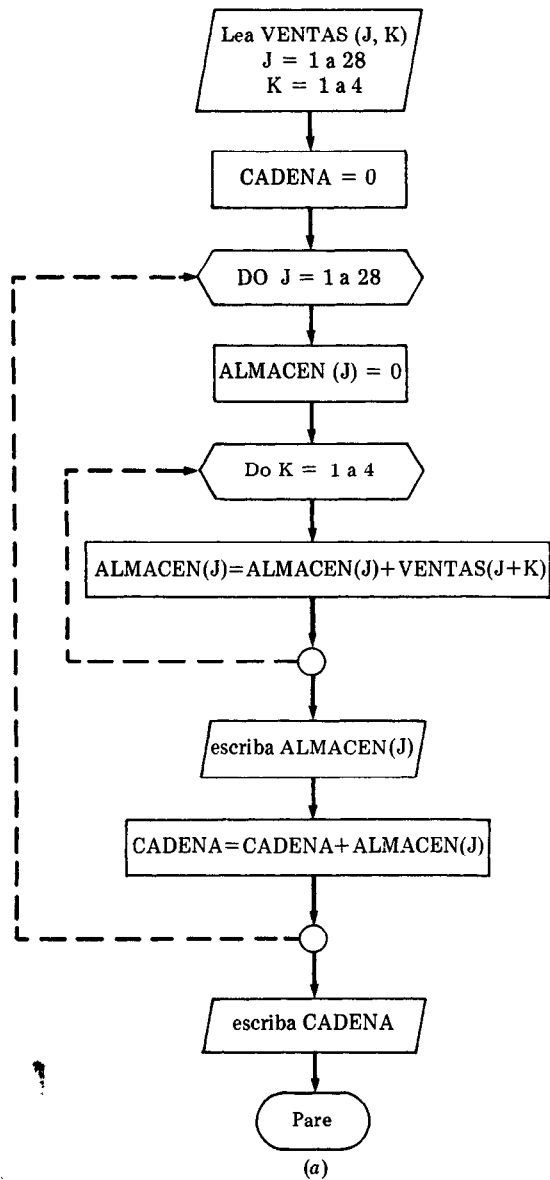
Figura 9-2



**EJEMPLO 9.11** Suponga que los datos de ventas dados en la tabla 9-1 se leen en un computador como la matriz  $28 \times 4$  VENTAS. Así,

VENTAS (J, 1) VENTAS (J, 2) VENTAS (J, 3) VENTAS (J, 4)

son las ventas semanales en los cuatro departamentos del almacén J-ésimo. Sea ALMACEN (J) las ventas totales semanales en el almacén J-ésimo, y sea CADENA las ventas totales semanales en la cadena. Queremos un diagrama de flujo que encuentre el arreglo lineal completo ALMACEN y también el valor de CADENA. La fig. 9-2 da tal diagrama de flujo, en donde se usa un ciclo, que calcula las salidas ALMACEN (J). Para encontrar el arreglo lineal completo ALMACEN, necesitamos entonces ciclos anidados, en donde el ciclo exterior recorre cada uno de los 28 almacenes. Tal diagrama de flujo aparece en la fig. 9-3(a), que también usa el ciclo exterior para calcular el valor CADENA sumando todos los valores en ALMACEN. Observe que la caja de entrada

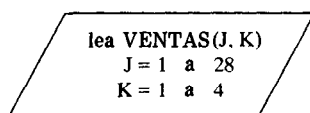


```

Lea VENTAS (J, K), J = 1 a 28, K = 1 a 4
CADENA = 0
DO J = 1 a 28
  ALMACEN (J) = 0
  DO K = 1 a 4
    ALMACEN(J) = ALMACEN (J) + VENTAS(J+K)
  ENDDO
  Escriba ALMACEN (J)
  CADENA = CADENA + ALMACEN
ENDDO
escriba CADENA
FIN
  
```

(b)

Figura 9.3



indica que VENTAS es un arreglo matriz  $28 \times 4$ . La fig. 9-3(b) da un programa en pseudocódigo equivalente.

## Problemas resueltos

### VECTORES

9.1 Sea  $u = (2, -7, 1)$ ,  $v = (-3, 0, 4)$  y  $w = (0, 5, -8)$ . Encuentre:

$$(a) \quad u + v \quad (b) \quad v + w \quad (c) \quad -3u \quad (d) \quad -w$$

(a) Sume las componentes correspondientes:

$$u + v = (2, -7, 1) + (-3, 0, 4) = (2 - 3, -7 + 0, 1 + 4) = (-1, -7, 5)$$

(b) Sume las componentes correspondientes:

$$v + w = (-3, 0, 4) + (0, 5, -8) = (-3 + 0, 0 + 5, 4 - 8) = (-3, 5, -4)$$

(c) Multiplique cada componente de  $u$  por el escalar  $-3$ :

$$-3u = -3(2, -7, 1) = (-6, 21, -3)$$

(d) Multiplique cada componente de  $w$  por  $-1$ , o sea cambie el signo de cada componente:

$$-w = -(0, 5, -8) = (0, -5, 8)$$

9.2 Con los vectores del problema 9.1, calcule (a)  $3u - 4v$ , (b)  $2u + 3v - 5w$ .

Efectúe primero la multiplicación escalar y luego la adición vectorial.

$$(a) \quad 3u - 4v = 3(2, -7, 1) - 4(-3, 0, 4) = (6, -21, 3) + (12, 0, -16) = (18, -21, -13)$$

$$\begin{aligned}
 (b) \quad 2u + 3v - 5w &= 2(2, -7, 1) + 3(-3, 0, 4) - 5(0, 5, -8) \\
 &= (4, -14, 2) + (-9, 0, 12) + (0, -25, 40) \\
 &= (4 - 9 + 0, -14 + 0 - 25, 2 + 12 + 40) = (-5, -39, 54)
 \end{aligned}$$

9.3 El *producto punto* o *producto interno* de los vectores  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  y  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  se denota y se define por

$$u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n$$

y la *norma* (o *longitud*) de  $u$  se denota y se define por

$$\|u\| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}$$

(Observe que  $\|u\| \geq 0$ , con la igualdad si y sólo si  $u = 0$ .) Para los vectores del problema 9.1 encuentre:

$$(a) \quad u \cdot v, u \cdot w, v \cdot w \quad (b) \quad \|u\|, \|v\|, \|w\|$$

(a) Multiplique las componentes correspondientes y luego sume:

$$u \cdot v = 2 \cdot (-3) + (-7) \cdot 0 + 1 \cdot 4 = -6 + 0 + 4 = -2$$

$$u \cdot w = 0 - 35 - 8 = -43$$

$$v \cdot w = 0 + 0 - 32 = -32$$

(b) Tome la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las componentes:

$$\|u\| = \sqrt{2^2 + (-7)^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 49 + 1} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

$$\|v\| = \sqrt{9 + 0 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\|w\| = \sqrt{0 + 25 + 64} = \sqrt{89}$$

9.4 Encuentre  $x$  y  $y$  si  $x(1, 1) + y(2, -1) = (1, 4)$ .

Multiplique primero por los escalares  $x$  e  $y$  y luego sume:

$$x(1, 1) + y(2, -1) = (x, x) + (2y, -y) = (x + 2y, x - y) = (1, 4)$$

Dos vectores son iguales sólo si sus componentes correspondientes son iguales; así

$$x + 2y = 1$$

$$x - y = 4$$

Resuelva el sistema de ecuaciones encontrando  $x = 3$  y  $y = -1$ .

## ADICION MATRICIAL Y MULTIPLICACION ESCALAR

9.5 Compute:

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} \quad (b) -2 \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (c) - \begin{pmatrix} 2 & -3 & 8 \\ 1 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

(a) Sume los elementos correspondientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 2+(-1) & 3+2 \\ 4+0 & 5+3 & 6+(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Multiplique cada elemento de la matriz por el escalar  $-2$ :

$$-2 \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2) \cdot 1 & (-2) \cdot 7 \\ (-2) \cdot 2 & (-2) \cdot (-3) \\ (-2) \cdot 0 & (-2) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -14 \\ -4 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(c) Multiplique cada elemento de la matriz por  $-1$ , o, equivalentemente, cambie el signo de cada elemento en la matriz:

$$- \begin{pmatrix} 2 & -3 & 8 \\ 1 & -2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -8 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

9.6 Compute:

$$3 \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Primero efectuamos las multiplicaciones escalares y luego las adiciones matriciales:

$$\begin{aligned} & 3\begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & -15 & 3 \\ 9 & 0 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 & -8 \\ 4 & -4 & -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6+(-2)+0 & -15+4+4 & 3+6+(-8) \\ 9+0+4 & 0+2+(-4) & -12+(-10)+(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 1 \\ 13 & -2 & -26 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### MULTIPLICACION MATRICIAL

9.7 Sea  $(r \times s)$  una matriz  $r \times s$ . Encuentre los tamaños de aquellas matrices cuyos productos están definidos:

$$\begin{array}{lll} (a) & (2 \times 3)(3 \times 4) & (c) \quad (1 \times 2)(3 \times 1) \quad (e) \quad (4 \times 4)(3 \times 3) \\ (b) & (4 \times 1)(1 \times 2) & (d) \quad (5 \times 2)(2 \times 3) \quad (f) \quad (2 \times 2)(2 \times 4) \end{array}$$

En cada caso su producto se define cuando los números intermedios son iguales, y entonces el producto tendrá el tamaño de los números exteriores en el orden dado.

$$\begin{array}{lll} (a) & 2 \times 4 & (c) \quad (c) \text{ no definido} \quad (e) \quad (e) \text{ no definido} \\ (b) & 4 \times 2 & (d) \quad 5 \times 3 \quad (f) \quad 2 \times 4 \end{array}$$

9.8 Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Encuentre  $AB$ .

$A$  es  $3 \times 2$  y  $B$  es  $2 \times 3$ , de modo que el producto  $AB$  está definido y es una matriz  $3 \times 3$ . Para obtener la primera fila de la matriz producto  $AB$ , multiplique la primera fila de  $A$  por las columnas de  $B$ , en secuencia:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-3 & -4-4 & -10+0 \\ 1+0 & -2+0 & -5+0 \\ -3+12 & 6+16 & 15+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & -2 & -5 \\ 9 & 22 & 15 \end{pmatrix}$$

Para obtener la segunda fila de la matriz producto  $AB$ , multiplique la segunda fila de  $A$  por las columnas de  $B$ , en secuencia:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1+0 & -2+0 & -5+0 \\ -3+12 & 6+16 & 15+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & -2 & -5 \\ 9 & 22 & 15 \end{pmatrix}$$

Para obtener la tercera fila de la matriz producto  $AB$ , multiplique la tercera fila de  $A$  por las columnas de  $B$ , en secuencia:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & -2 & -5 \\ -3+12 & 6+16 & 15+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & -2 & -5 \\ 9 & 22 & 15 \end{pmatrix}$$

Así,

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & -2 & -5 \\ 9 & 22 & 15 \end{pmatrix}$$

## 9.9 Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Determine el tamaño de  $AB$ . (b) Sea  $c_{ij}$  el elemento en la fila  $i$  y la columna  $j$  de la matriz producto  $AB$ , o sea,  $AB = (c_{ij})$ . Encuentre:  $c_{23}$ ,  $c_{14}$ ,  $c_{21}$ , y  $c_{12}$ .

(a) Como  $A$  es  $2 \times 3$  y  $B$  es  $3 \times 4$ , el producto  $AB$  es una matriz  $2 \times 4$ .

(b)  $c_{ij}$  se define ahora como el producto de la fila  $i$  de  $A$  y la columna  $j$  de  $B$ . Así:

$$c_{23} = (1, 0, -3) \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + (-3) \cdot (-2) = 0 + 0 + 6 = 6$$

$$c_{14} = (2, -1, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 0 = 2 + 1 + 0 = 3$$

$$c_{21} = (1, 0, -3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + (-3) \cdot 4 = 1 + 0 - 12 = -11$$

$$c_{12} = (2, -1, 0) \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-4) + (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 0 = -8 + 1 + 0 = -7$$

## 9.10 Calcule:

$$\begin{array}{lll} (a) \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} & (c) \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} & (e) (2, -1) \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix} \\ (b) \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix} & (d) \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} (3, 2) & \end{array}$$

(a) El primer factor es  $2 \times 2$  y el segundo es  $2 \times 2$ , de modo que el producto está definido, y es una matriz  $2 \times 2$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + 6 \cdot 2 & 1 \cdot 0 + 6 \cdot (-1) \\ (-3) \cdot 4 + 5 \cdot 2 & (-3) \cdot 0 + 5 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -6 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

(b) El primer factor es  $2 \times 2$  y el segundo es  $2 \times 1$ , de modo que el producto está definido, y es una matriz  $2 \times 1$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 6 \cdot (-7) \\ (-3) \cdot 2 + 5 \cdot (-7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 \\ -41 \end{pmatrix}$$

(c) Ahora el primer factor es  $2 \times 1$  y el segundo es  $2 \times 2$ . Como los números intermedios 1 y 2 son diferentes, el producto no está definido.

(d) En este caso el primer factor es  $2 \times 1$  y el segundo es  $1 \times 2$ , de modo que el producto está definido, y es una matriz  $2 \times 2$ :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} (3, 2) = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 & 1 \cdot 2 \\ 6 \cdot 3 & 6 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 18 & 12 \end{pmatrix}$$

(e) El primer factor es  $1 \times 2$  y el segundo es  $2 \times 1$ , de modo que el producto está definido y es una matriz  $1 \times 1$ , que, frecuentemente, escribimos como un escalar.

$$(2, -1) \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix} = (2 \cdot 1) + (-1) \cdot (-6) = (8) = 8$$



**9.11** La *transpuesta* de una matriz  $A$ , escrito  $A^T$ , es la matriz obtenida al escribir las filas de  $A$ , en orden, como columnas. O sea, si  $A = (a_{ij})$ , entonces  $B = (b_{ij})$  es la transpuesta de  $A$  si  $b_{ij} = a_{ji}$  para todo  $i$  y  $j$ . (Observe que si  $A$  es una matriz  $m \times n$ , entonces  $A^T$  es una matriz  $n \times m$ .) Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

encuentre: (a)  $A^T$ , (b)  $AA^T$ , (c)  $A^T A$ .

(a) Para obtener  $A^T$ , escriba las filas de  $A$  como columnas:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4+0 & 3-2+0 \\ 3-2+0 & 9+1+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 26 \end{pmatrix}$$

$$(c) \quad A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+9 & 2-3 & 0+12 \\ 2-3 & 4+1 & 0-4 \\ 0+12 & 0-4 & 0+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 12 \\ -1 & 5 & -4 \\ 12 & -4 & 16 \end{pmatrix}$$

## MATRICES CUADRADAS

**9.12** Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Encuentre: (a)  $A^2$ ; (b)  $A^3$ ; (c)  $f(A)$ , en donde  $f(x) = 2x^3 - 4x + 5$ . (d) Muestre que  $A$  es un cero del polinomio  $g(X) = X^2 + 2X - 11I$ .

$$(a) \quad A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) \\ 4 \cdot 1 + (-3) \cdot 4 & 4 \cdot 2 + (-3) \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad A^3 = AA^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 9 + 2 \cdot (-8) & 1 \cdot (-4) + 2 \cdot 17 \\ 4 \cdot 9 + (-3) \cdot (-8) & 4 \cdot (-4) + (-3) \cdot 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 30 \\ 60 & -67 \end{pmatrix}$$

(c) Para encontrar  $f(A)$ , primero substituya en el polinomio dado  $f(x) = 2x^3 - 4x + 5$ ,  $x^3$  por  $A^3$ ,  $x$  por  $A$ , y la constante 5 por  $5I$ :

$$f(A) = 2A^3 - 4A + 5I = 2 \begin{pmatrix} -7 & 30 \\ 60 & -67 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego multiplique cada matriz por su escalar respectivo:

$$f(A) = \begin{pmatrix} -14 & 60 \\ 120 & -134 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ -16 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Por último, sume los elementos correspondientes de las matrices:

$$f(A) = \begin{pmatrix} -14-4+5 & 60-8+0 \\ 120-16+0 & -134+12+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 52 \\ 104 & -117 \end{pmatrix}$$

(d) La matriz  $A$  es un cero de  $g(X)$  si la matriz  $g(A)$  es la matriz nula. Tenemos:

$$g(A) = A^2 + 2A - 11I = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} - 11\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego multiplique cada matriz por el escalar que la precede:

$$g(A) = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -11 & 0 \\ 0 & -11 \end{pmatrix}$$

Por último, sume los elementos correspondientes en las matrices:

$$g(A) = \begin{pmatrix} 9+2-11 & -4+4+0 \\ -8+8+0 & 17-6-11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como  $g(A) = 0$ ,  $A$  es un cero del polinomio  $g(X)$ .

**9.13** Calcule el determinante de cada matriz:

$$(a) \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} a-b & b \\ b & a+b \end{pmatrix} \quad (d) \begin{pmatrix} a-b & a \\ a & a+b \end{pmatrix}$$

$$(a) \quad \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - (-2) \cdot 4 = 15 + 8 = 23$$

$$(b) \quad \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -1 \cdot 4 - 6 \cdot 0 = -4$$

$$(c) \quad \begin{vmatrix} a-b & b \\ b & a+b \end{vmatrix} = (a-b)(a+b) - b \cdot b = a^2 - b^2 - b^2 = a^2 - 2b^2$$

$$(d) \quad \begin{vmatrix} a-b & a \\ a & a+b \end{vmatrix} = (a-b)(a+b) - a \cdot a = a^2 - b^2 - a^2 = -b^2$$

**9.14** Encuentre el determinante de cada matriz:

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

(Sugerencia: Use el diagrama en la sec. 9.9)

$$(a) \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 0 + 60 - 0 - 15 + 8 = 55$$

$$(b) \quad \begin{vmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 8 + 15 + 0 + 20 + 24 + 0 = 67$$

$$(c) \quad \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 20 - 9 - 8 + 8 - 12 + 15 = 14$$

**9.15** Encuentre el inverso de

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

**Método 1.**

Buscamos escalares  $x$ ,  $y$ ,  $z$  y  $w$  para los cuales

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} 3x+5z & 3y+5w \\ 2x+3z & 2y+3w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

o que satisfagan

$$\begin{cases} 3x + 5z = 1 \\ 2x + 3z = 0 \end{cases} \quad y \quad \begin{cases} 3y + 5w = 0 \\ 2y + 3w = 1 \end{cases}$$

Para resolver el primer sistema, multiplicamos la primera ecuación por 2 y la segunda ecuación por  $-3$ , y luego sumamos:

$$\begin{array}{rcl} 2 \times \text{la primera:} & 6x + 10z = 2 \\ -3 \times \text{la segunda:} & -6x - 9z = 0 \\ \hline \text{Suma:} & & z = 2 \end{array}$$

Substituya  $z = 2$  en la primera ecuación para obtener

$$3x + 5 \cdot 2 = 1 \quad o \quad 3x + 10 = 1 \quad o \quad 3x = -9 \quad o \quad x = -3$$

Para resolver el segundo sistema, multiplique la primera ecuación por 2 y la segunda ecuación por  $-3$ , y luego sume:

$$\begin{array}{rcl} 2 \text{ la primera:} & 6y + 10w = 0 \\ -3 \text{ la segunda:} & -6y - 9w = -3 \\ \hline \text{Suma:} & & w = -3 \end{array}$$

Substituya  $w = -3$  en la primera ecuación para obtener

$$3y + 5 \cdot (-3) = 0 \quad o \quad 3y - 15 = 0 \quad o \quad 3y = 15 \quad o \quad y = 5$$

Así, el inverso de la matriz dada es

$$\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

#### Método 2.

Usamos la fórmula general para el inverso de una matriz  $2 \times 2$ . Primero encuentre el determinante de la matriz dada:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 5 = 9 - 10 = -1$$

Intercambie ahora los elementos de la diagonal principal de la matriz dada y tome el negativo de los otros elementos para obtener

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Por último, divida cada elemento de esta matriz por el determinante de la matriz dada, o sea, por  $-1$ :

$$\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Esta matriz es el inverso pedido.

### VARIABLES SUBINDIZADAS

9.16 Determine las dimensiones y el número de elementos en los arreglos que sean definidos por las cajas de entrada:

(a)

Lea PRUEBA (J)  
J = 1 a 86

(b)

Lea B(J, K, L)  
J = 1 a 6  
K = 1 a 8  
L = 1 a 4

(c)

Lea NOMBRE, TASA,  
HORAS

(d)

Lea N, A<sub>jk</sub>  
J = 1 a N  
K = 1 a N + 1



- (a) PRUEBA es un arreglo lineal (uni-dimensional) con 86 elementos.  
 (b) B es un arreglo tridimensional  $6 \times 8 \times 4$ . Así, B contiene  $(6)(8)(4) = 192$  elementos.  
 (c) Las variables NOMBRE, TASA, y HORAS no son arreglos.  
 (d) A es un arreglo bidimensional  $N \times (N + 1)$ . Por lo tanto tiene  $N(N + 1) = N^2 + N$  elementos.  
 Observe que se lee un valor para N antes de leer los valores para A.

9.17 Determine la salida para cada diagrama de flujo de la fig. 9-4.

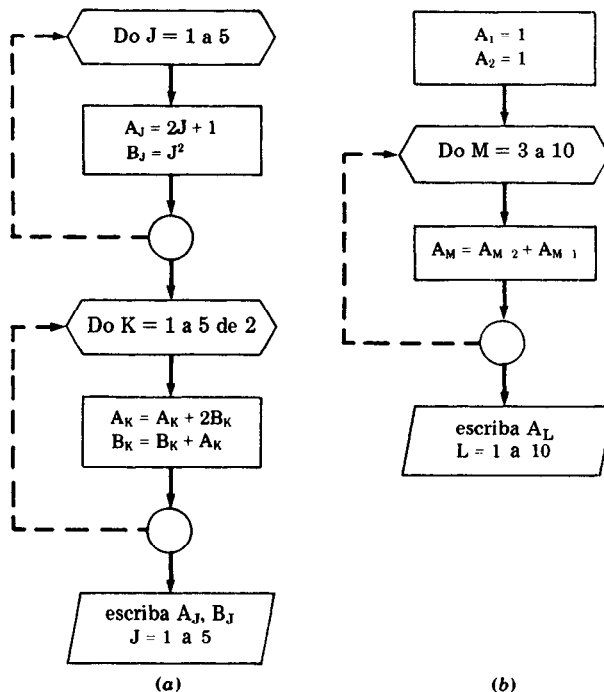


Figura 9-4

(a) El primer ciclo DO asigna:

$$\begin{array}{lll}
 A_1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3, & B_1 = 1^2 = 1 & A_4 = 2 \cdot 4 + 1 = 9, \quad B_4 = 4^2 = 16 \\
 A_2 = 2 \cdot 2 + 1 = 5, & B_2 = 2^2 = 4 & A_5 = 2 \cdot 5 + 1 = 11, \quad B_5 = 5^2 = 25 \\
 A_3 = 2 \cdot 3 + 1 = 7, & B_3 = 3^2 = 9 &
 \end{array}$$

El segundo ciclo DO asigna:

$$\begin{array}{ll}
 A_1 = A_1 + 2B_1 = 3 + 2 \cdot 1 = 5 & B_1 = B_1 + A_1 = 1 + 5 = 6 \\
 A_3 = A_3 + 2B_3 = 7 + 2 \cdot 9 = 25 & B_3 = B_3 + A_3 = 9 + 25 = 34 \\
 A_5 = A_5 + 2B_5 = 11 + 2 \cdot 25 = 61 & B_5 = B_5 + A_5 = 25 + 61 = 86
 \end{array}$$

La salida es:  $A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_5, B_5$ ; o sea,

$$5, 6, 5, 4, 25, 34, 9, 16, 61, 86$$

(b)  $A = 1$  y  $A = 1$ , y cada término subsiguiente es la suma de los dos términos precedentes; o sea,

$$A_3 = A_1 + A_2 = 1 + 1 = 2 \quad A_4 = A_2 + A_3 = 1 + 2 = 3 \quad A_5 = A_3 + A_4 = 2 + 3 = 5 \quad \dots$$

Así, la salida es: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 (los primeros diez términos de la sucesión de Fibonacci).

9.18 Treinta y cinco estudiantes toman un examen en el que las calificaciones van de 0 a 100. (a) Dibuje un diagrama de flujo que lee las calificaciones en un arreglo  $S$  y que encuentra el número  $PIERDEN$  de calificaciones menores que 60 y el número  $PERFECTO$  de calificaciones 100. (b) Escriba un programa en pseudocódigo.

(a) El diagrama de flujo se muestra en la fig. 9-5. Observe que la caja de entrada

Lea  $S_K$   
 $K = 1$  a  $35$

almacena en el arreglo  $S$  las calificaciones. El ciclo verifica cada calificación para ver si es menor que 60, en cuyo caso  $PIERDEN$  es incrementado en uno, o si es igual a 100, en cuyo caso  $PERFECTO$  es incrementado en uno.

(b)

```
lea  $S_K$ ,  $K = 1$  a  $35$ 
PIERDEN = 0
PERFECTO = 0
DO  $K = 1$  a  $35$ 
  IF  $S_K < 60$  THEN
    PIERDEN = PIERDEN + 1
  ELSEIF  $S_K = 100$  THEN
    PERFECTO = PERFECTO + 1
  ENDIF
ENDDO
escriba PIERDEN, PERFECTO
FIN
```

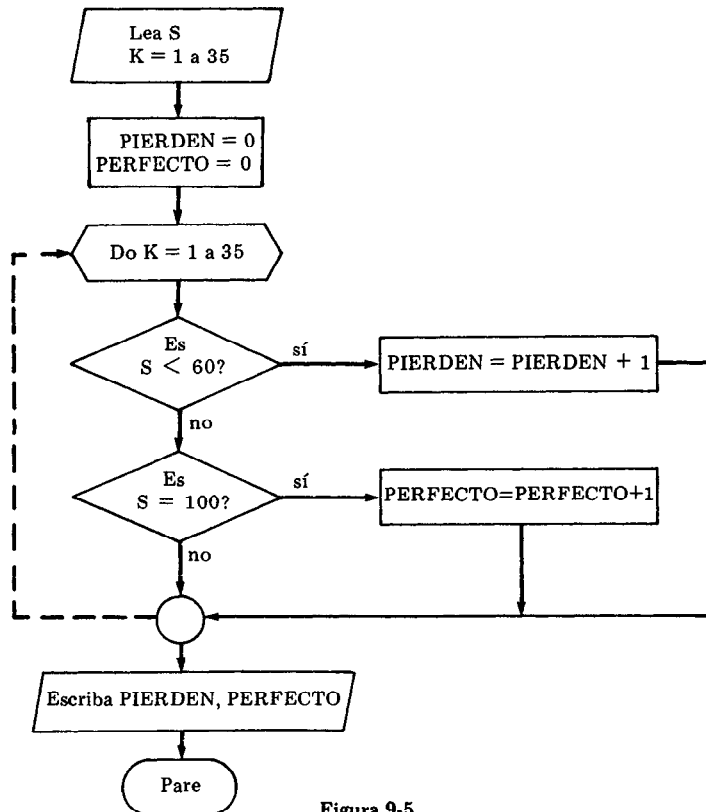


Figura 9-5

9.19 Considere la lista de los diez números diferentes:

8, 6, 11, 14, 5, 10, 3, 2, 12, 7

El número menor 2, aparece en la posición  $L = 8$ . Intercambiando este número con el primer número nos da la nueva lista

2, 6, 11, 14, 5, 10, 3, 8, 12, 7

(a) Dibuje un diagrama de flujo de un algoritmo que, para un arreglo lineal arbitrario  $A_1, A_2, \dots, A_N$ , encuentre la posición  $L$  del número más pequeño en el arreglo, y luego intercambie este número,  $A_L$ , con el primer número,  $A_1$ . (b) ¿Cómo funcionaría este algoritmo si se aplica a la lista anterior de 10 números?

(a) La figura 9-6 da el diagrama de flujo. Observe que primero leemos el valor de  $N$  y luego leemos los  $N$  números en el arreglo  $A$ . Designamos por PEQUEÑO el número menor en cada momento y  $L$  su posición. Así, primero asignamos  $PEQUEÑO = A_1$  y  $L = 1$ . Usando un ciclo para  $K = 2$  a  $N$ , examinamos cada  $A_K$  y lo comparamos con  $PEQUEÑO$ . Si algún  $A_K$  es menor que  $PEQUEÑO$ , reasignamos  $PEQUEÑO = A_K$  y  $L = K$ . Después del último paso en el ciclo,  $PEQUEÑO$  contendrá el número menor y  $L$  su posición. Luego intercambiamos  $A_1$  y  $A_L$ .

(b) El algoritmo primero asigna  $PEQUEÑO = 8$  y  $L = 1$ . La fig. 9-7 muestra los valores de  $PEQUEÑO$  y  $L$  después de ejecutar el ciclo para el valor dado de  $K$  y  $A_K$ . Observe que el valor de  $PEQUEÑO$  disminuye para  $K = 2, 5, 7, 8$ , o sea, cuando  $A_K$  es menor que el valor precedente de  $PEQUEÑO$ . El valor final  $PEQUEÑO = 2$ , es el número menor en la lista y está en la octava posición. El algoritmo intercambia entonces los elementos primero y octavo para obtener la lista deseada.

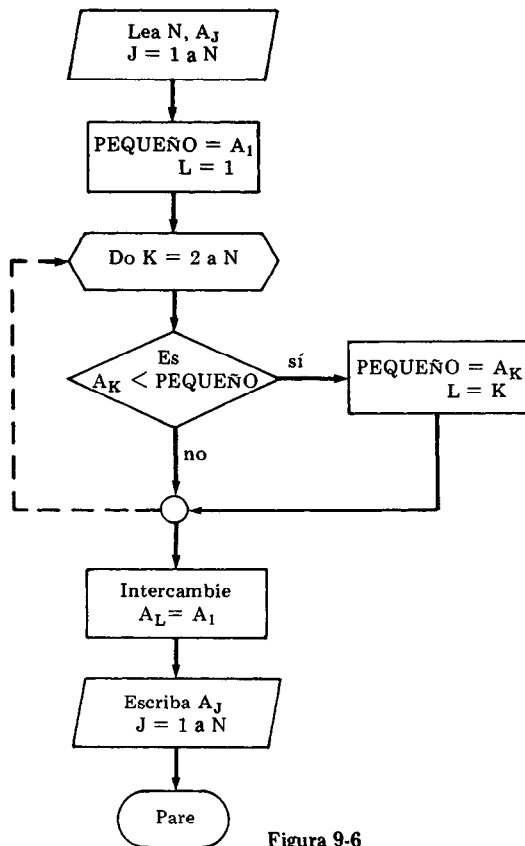


Figura 9-6

K	$A_K$	Pequeño	L
Inicial		8	1
2	6	6	2
3	11	6	2
4	14	6	2
5	5	5	5
6	10	5	5
7	3	3	7
8	2	2	8
9	12	2	8
10	7	2	8

Figura 9-7

## Problemas suplementarios

### VECTORES

**9.20** Sea  $u = (2, -1, 0, -3)$ ,  $v = (1, -1, -1, 3)$  y  $w = (1, 3, -2, 2)$ . Encuentre (a)  $3u$ , (b)  $u + v$ , (c)  $2u - 3v$ , (d)  $5u - 3v - 4w$ , (e)  $-u + 2v - 2w$ .

**9.21** Calcule lo siguiente, en donde  $u$ ,  $v$ , y  $w$  son los vectores del problema 9.20. (Véase el problema 9.3.)

$$(a) \quad v \cdot v \quad (b) \quad u \cdot w \quad (c) \quad w \cdot v \quad (d) \quad \|u\| \quad (e) \quad \|v\| \quad (f) \quad \|w\|$$

**9.22** Encuentre  $x$  e  $y$ , si (a)  $(x, x + y) = (y - 2, 6)$ , (b)  $x(3, 2) = 2(y, -1)$ .

### OPERACIONES MATRICIALES

En los problemas 9.23, 9.24, y 9.25,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

**9.23** Encuentre (a)  $A + B$ , (b)  $A + C$ , (c)  $3A - 4B$ .

**9.24** Encuentre (a)  $AB$ , (b)  $AC$ , (c)  $AD$ , (d)  $BC$ , (e)  $BD$ , (f)  $CD$ .

**9.25** Encuentre (a)  $A^T$ , (b)  $A^T C$ , (c)  $D^T A^T$ , (d)  $B^T A$ , (e)  $D^T D$ , (f)  $DD^T$ . (Véase el problema 9.11)

### MATRICES CUADRADAS

**9.26** Sea  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ . (a) Encuentre  $A^2$  y  $A^3$ . (b) Si  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 4$ , encuentre  $f(A)$ .  
(c) Si  $g(x) = x^2 - x - 8$ , encuentre  $g(A)$ .

**9.27** Sea  $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ . (a) Encuentre  $f(B)$  en donde  $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$ . (b) Encuentre un vector columna  $u$  no nulo, tal que  $Bu = 6u$ .

**9.28** Las matrices  $A$  y  $B$  se dice que *conmutan* si  $AB = BA$ . Encuentre todas las matrices que conmutan con

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**9.29** Sea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Encuentre  $A^n$ .

**9.30** Encuentre el determinante de cada matriz:

$$(a) \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad (b) \quad \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad (c) \quad \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad (d) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (e) \quad \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}, \quad (f) \quad \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

**9.31** Encuentre el determinante de cada matriz

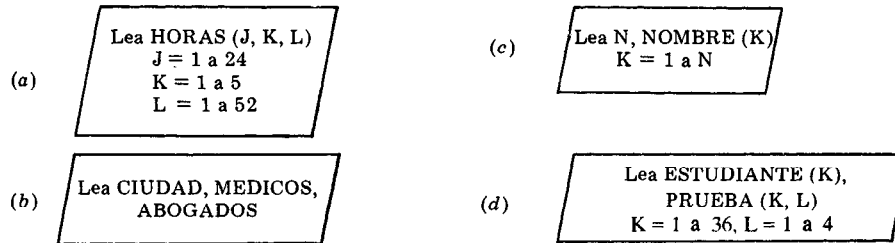
$$(a) \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad (b) \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad (c) \quad \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 6 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (d) \quad \begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

**9.32** Encuentre el inverso de cada matriz:

$$(a) \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}, \quad (b) \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

## VARIABLES SUBINDIZADAS

- 9.33 Determine las dimensiones y los números de elementos en los arreglos que resulten definidos por las siguientes cajas de entrada:



- 9.34 Determine la salida de cada diagrama de flujo en la fig. 9-8.
- 9.35 Dibuje un diagrama de flujo o escriba un programa en pseudocódigo que lea 25 números enteros positivos, y determine si dos cualesquiera de ellos suman 25.
- 9.36 Dibuje un diagrama de flujo o escriba un programa en pseudocódigo que lea 25 enteros positivos diferentes, y encuentre el segundo mayor de ellos y su posición.
- 9.37 Escriba un programa en pseudocódigo que continúe el algoritmo del problema 9.19 hasta que todos los números  $A_1, A_2, \dots, A_N$  queden en orden ascendente (esto se llama *ordenamiento por selección*.).
- 9.38 Una cadena de almacenes tiene 12 almacenes (numerados de 1 a 12), y cada almacén tiene los mismos 14 departamentos (numerados de 1 a 14). Las ventas diarias en cada departamento en cada almacén se envían cada semana a la oficina principal de la cadena, y los datos se guardan en un arreglo VENTAS  $12 \times 14 \times 7$ . Dibuje un diagrama de flujo o escriba un programa en pseudocódigo que encuentre (a) las ventas diarias de la cadena, (b) las ventas semanales de cada almacén, (c) las ventas semanales de cada departamento, (d) las ventas semanales totales de la cadena.
- 9.39 Un estudiante escribe 6 trabajos (calificados de 0 a 100). Su nota final es el promedio de los 5 mejores trabajos. Dibuje un diagrama de flujo o escriba un programa en pseudocódigo que lea las notas de los 6 trabajos y determine la nota final.

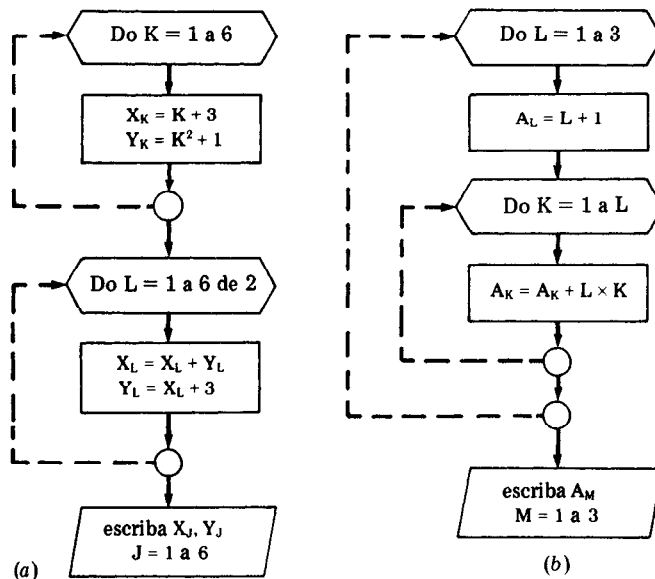


Figura 9-8

### Respuestas a los problemas suplementarios

9.20 (a)  $3u = (6, -3, 0, -9)$  (c)  $2u - 3v = (1, 1, 3, -15)$  (e)  $-u + 2v - 2w = (-2, -7, 2, 5)$   
 (b)  $u + v = (3, -2, -1, 0)$  (d)  $5u - 3v - 4w = (3, -14, 11, -32)$

9.21 (a)  $-6$ , (b)  $-7$ , (c)  $6$ , (d)  $\sqrt{14}$ , (e)  $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ , (f)  $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

9.22 (a)  $x = 2, y = 4$ ; (b)  $x = -1, y = -3/2$

9.23 (a)  $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ , (b) No definida (c)  $\begin{pmatrix} -13 & -3 & 18 \\ 4 & 17 & 0 \end{pmatrix}$

9.24 (a) No definida (c)  $\begin{pmatrix} 9 \\ 9 \end{pmatrix}$  (e)  $\begin{pmatrix} -1 \\ 9 \end{pmatrix}$   
 (b)  $\begin{pmatrix} -5 & -2 & 4 & 5 \\ 11 & -3 & -12 & 18 \end{pmatrix}$  (d)  $\begin{pmatrix} 11 & -12 & 0 & -5 \\ -15 & 5 & 8 & 4 \end{pmatrix}$  (f) No definida

9.25 (a)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$  (c)  $(9, 9)$  (e)  $14$   
 (b) No definida (d)  $\begin{pmatrix} 4 & -7 & 4 \\ 0 & -6 & -8 \\ -3 & 12 & 6 \end{pmatrix}$  (f)  $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -3 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}$

9.26 (a)  $A^2 = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ ,  $A^3 = \begin{pmatrix} 26 & 18 \\ 27 & -1 \end{pmatrix}$ ; (b)  $f(A) = \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 12 & -16 \end{pmatrix}$ , (c)  $g(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

9.27 (a)  $f(B) = \begin{pmatrix} 31 & 12 \\ 20 & 39 \end{pmatrix}$ , (b)  $u = \begin{pmatrix} 3k \\ 5k \end{pmatrix}$ ,  $k \neq 0$

9.28 Sólo las matrices de la forma  $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$  conmutan con  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

9.29  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

9.30 (a)  $-18$ , (b)  $-15$ , (c)  $8$ , (d)  $1$ , (e)  $44$ , (f)  $-57$

9.31 (a)  $21$ , (b)  $-11$ , (c)  $102$ , (d)  $0$

9.32 (a)  $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$ , (b)  $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

9.33 (a) Tridimensional, 6240 elementos.  
 (b) No son arreglos.  
 (c) NOMBRE es un arreglo lineal con N elementos.  
 (d) ESTUDIANTE es un arreglo lineal con 36 elementos; PRUEBA es un arreglo bidimensional con 144 elementos.

9.34 (a) 6, 9, 5, 5, 16, 19, 7, 17, 34, 37, 9, 36; (b) 8, 13, 13

9.35 lea N<sub>K</sub>, K = 1 a 25  
 DO J = 1 a 24  
   DO L = J + 1 a 25  
     IF N<sub>J</sub> + N<sub>L</sub> = 25 THEN  
       escriba N<sub>J</sub>, N<sub>L</sub>  
     ENDIF  
 ENDDO  
 ENDDO  
 FIN

```

9.36  lea NK, K = 1 a 25
      IF N2 < N1 THEN
        PRIMERO = N1
        L1 = 1
        SEGUNDO = N2
        L2 = 2
      ELSE
        PRIMERO = N2
        L1 = 2
        SEGUNDO = N1
        L2 = 1
      ENDIF
      DO J = 3 a 25
        IF PRIMERO < NJ THEN
          SEGUNDO = PRIMERO
          L2 = L1
          PRIMERO = NJ
          L1 = J
        ELSEIF SEGUNDO < NJ THEN
          SEGUNDO = NJ
          L2 = J
        ENDIF
      ENDDO
      escriba SEGUNDO L2
      FIN

```

```

9.37  lea N, AJ, J = 1 a N
      DO M = 1 a N - 1
        PEQUEÑO = AM
        L = M
        DO K = M + 1 a N
          IF AK < PEQUEÑO THEN
            PEQUEÑO = AK
            L = K
          ENDIF
        ENDDO
        intercambie AL y AM
      ENDDO
      escriba AJ, J = 1 a N
      FIN

```

(Observe que la línea 11 es una macroinstrucción.)

```

9.38  lea VENTAS(I,J,K), I = 1 a 12, J = 1 a 14, K = 1 a 7
      (a) DO M = 1 a 7
          DIARIO(M) = 0
          DO I = 1 a 12
            DO J = 1 a 14
              DIARIO(M) = DIARIO(M) + VENTAS(I,J,M)
            ENDDO
          ENDDO
        ENDDO
      escriba DIARIO (M), M = 1 a 7

```

```

(b) DO M = 1 a 12
    ALMACEN(M) = 0
    DO J = 1 a 14
        DO K = 1 a 7
            ALMACEN(M) = ALMACEN(M) + VENTAS(M,J,K)
        ENDDO
    ENDDO
ENDDO
escriba ALMACEN(M), M = 1 a 14
(c) DO M = 1 a 14
    DEPT(M) = 0
    DO I = 1 a 12
        DO K = 1 a 14
            DEPT(M) = DEPT(M) + VENTAS(I,M,K)
        ENDDO
    ENDDO
ENDDO
escriba DEPT(M), M = 1 a 14
(d) CADENA = 0
    DO M = 1 a 7
        CADENA = CADENA + DIARIO (M)
    ENDDO
escriba CADENA
FIN

```

9.39 lea NOTA, J = 1 a 6  
 Encuentre SUMA de NOTAS  
 Encuentre PEQUEÑO, la nota más baja  
 $FINAL = (SUMA - PEQUEÑO)/5$   
 escriba FINAL  
 FIN (Observe las dos macroinstrucciones.)



# Capítulo 10

## Ecuaciones lineales

### 10.1 ECUACIONES LINEALES EN UNA INCOGNITA

Una ecuación lineal en una incógnita,  $x$ , siempre se puede simplificar expresándola en forma estándar  $ax = b$ , en donde  $a$  y  $b$  son constantes. Si  $a \neq 0$ , esta ecuación tiene una solución única

$$x = \frac{b}{a}$$

#### EJEMPLO 10.1

(a) Considere las ecuaciones lineales

$$(i) 5x = 10 \quad (ii) 3x = 27 \quad (iii) 2x = 9 \quad (iv) 4x = 22$$

Las soluciones son las siguientes:

$$(i) x = \frac{10}{5}, \text{ o } x = 2 \quad (iii) x = \frac{9}{2} \\ (ii) x = \frac{27}{3}, \text{ o } x = 9 \quad (iv) x = \frac{22}{4}, \text{ o } x = \frac{11}{2}$$

(b) Considere la ecuación lineal

$$9x - 4 - 2x = 5x + 15 - 3$$

Simplificando ambos lados se obtiene

$$7x - 4 = 5x + 12$$

Sumando 4 a ambos lados se obtiene

$$7x = 5x + 16$$

Substrayendo  $5x$  de ambos lados se obtiene

$$2x = 16$$

que está ahora en forma estándar. La solución es

$$x = \frac{16}{2} = 8$$

### 10.2 ECUACIONES LINEALES EN DOS INCOGNITAS

Una ecuación lineal en dos incógnitas,  $x$  e  $y$ , se puede expresar en la forma

$$ax + by = c$$

en donde  $a$ ,  $b$ ,  $c$  son números reales. También suponemos que no son ambos cero. Una solución de la ecuación consiste en un par de números,  $u = (k_1, k_2)$ , que satisface la ecuación; o sea, es tal que

$$ak_1 + bk_2 = c$$

Las soluciones de la ecuación se pueden encontrar asignando valores arbitrarios a  $x$  y despejando  $y$  (o viceversa).

**EJEMPLO 10.2** Considere la ecuación

$$2x + y = 4$$

Si sustituimos  $x = -2$  en la ecuación, obtenemos

$$2 \cdot (-2) + y = 4 \quad \text{o} \quad -4 + y = 4 \quad \text{o} \quad y = 8$$

Así  $(-2, 8)$  es una solución. Si sustituimos  $x = 3$  en la ecuación, obtenemos

$$2 \cdot 3 + y = 4 \quad \text{o} \quad 6 + y = 4 \quad \text{o} \quad y = -2$$

Así  $(3, -2)$  es una solución. En la fig. 10-1(a) se da una lista de seis valores posibles para  $x$  y los correspondientes valores para  $y$ ; estas son seis soluciones de la ecuación.

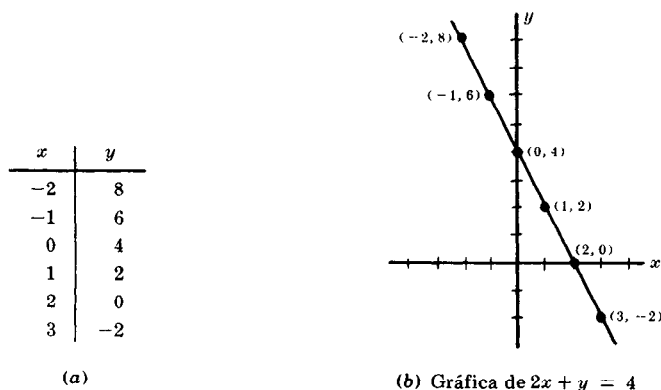


Figura 10-1

Recuerde del ejemplo 6.9(a) que cualquier solución  $u = (k_1, k_2)$  de la ecuación lineal

$$ax + by = c$$

determina un punto en el plano cartesiano  $\mathbb{R}^2$ . Como  $a$  y  $b$  no son ambos cero, las soluciones  $u$  corresponden precisamente a los puntos en una recta (de aquí el nombre “ecuación lineal”). Por ejemplo, las seis soluciones de la ecuación  $2x + y = 4$ , que aparecen en la fig. 10-1(a), han sido representadas gráficamente en la fig. 10-1(b). Observe que todas están en la misma recta, la gráfica de la ecuación.

### 10.3 SISTEMAS DE DOS ECUACIONES LINEALES CON DOS INCOGNITAS

Considere ahora un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas  $x$  e  $y$ :

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned} \quad (10.1)$$

Supongamos, una vez más, que  $a_1$  y  $b_1$  no son ambos cero, y que  $a_2$  y  $b_2$  no son ambos cero. Una pareja de números que satisfacen ambas ecuaciones se llama *solución simultánea* de las ecuaciones dadas o una *solución del sistema* de ecuaciones. Hay tres casos, que pueden ser descritos geométricamente.

- (1) *El sistema tiene exactamente una solución.* En este caso, las gráficas de las ecuaciones lineales se intersectan en un punto, como en la fig. 10-2(a).
- (2) *El sistema no tiene soluciones.* En este caso, las gráficas de las ecuaciones lineales son paralelas, como en la fig. 10-2(b).

(3) *El sistema tiene un número infinito de soluciones.* En este caso, las gráficas de las ecuaciones lineales coinciden, como en la fig. 10-2(c).

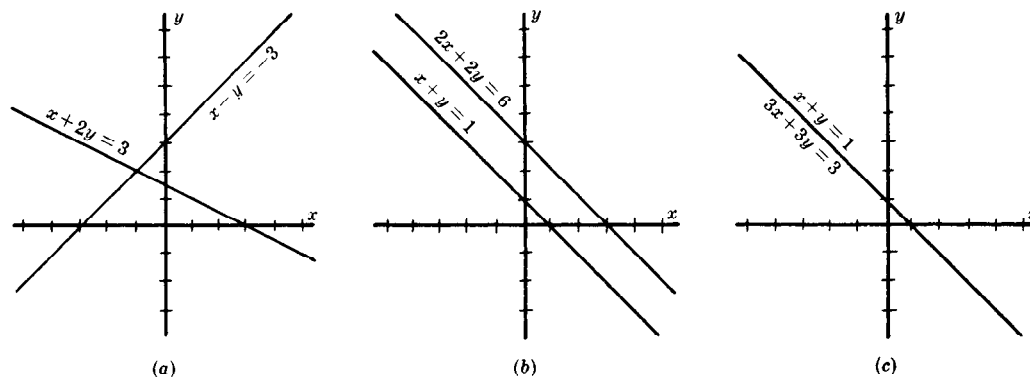


Figura 10-2

Los casos especiales (2) y (3) solamente pueden ocurrir cuando los coeficientes de  $x$  e  $y$  en las dos ecuaciones lineales son proporcionales:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \quad \text{o sea} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

Específicamente, el sistema tiene un número infinito de soluciones cuando los coeficientes y los términos constantes son proporcionales,

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

pero no tiene solución cuando

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

A no ser que se diga o se implique otra cosa, vamos a suponer que el determinante de los coeficientes no se anula, de tal manera que estamos tratando el caso (1).

La solución del sistema (10.1) se puede obtener mediante el proceso llamado de eliminación, por el cual se reduce el sistema a una sola solución con una incógnita. Esto se logra con los dos pasos siguientes:

PASO 1: Multiplique las dos ecuaciones por dos números tales, que los coeficientes resultantes de una de las incógnitas (comúnmente  $x$ ) sean inversos aditivos entre sí.

PASO 2: Sume las dos ecuaciones que se obtuvieron en el paso 1.

El resultado del paso 2 es una ecuación lineal de una incógnita (generalmente  $y$ ). Esta ecuación se puede resolver para aquella incógnita, y la solución se puede substituir en una de las ecuaciones originales para obtener el valor de la otra incógnita.

**EJEMPLO 10.3** Considere el sistema

$$(1) \quad 3x + 2y = 8$$

$$(2) \quad 2x - 5y = -1$$





Un diagrama de flujo del algoritmo de sustitución de para atrás se da en la fig. 10-3. El sistema (10.4) se almacena en el computador como  $A$ , un arreglo matriz  $N \times (N + 1)$ , la matriz aumentada del sistema. Así, las constantes  $b_1$  y  $b_2, \dots, b_n$  se almacenan respectivamente como  $A_{1,N+1}, A_{2,N+1}, \dots, A_{N,N+1}$ . Observe que el diagrama de flujo tiene un ciclo dentro de otro. El ciclo interior, que representamos como un ciclo DO, se usa para calcular la sumatoria que aparece en (10.5). El ciclo exterior evalúa entonces  $X_k$  en función de esta suma.

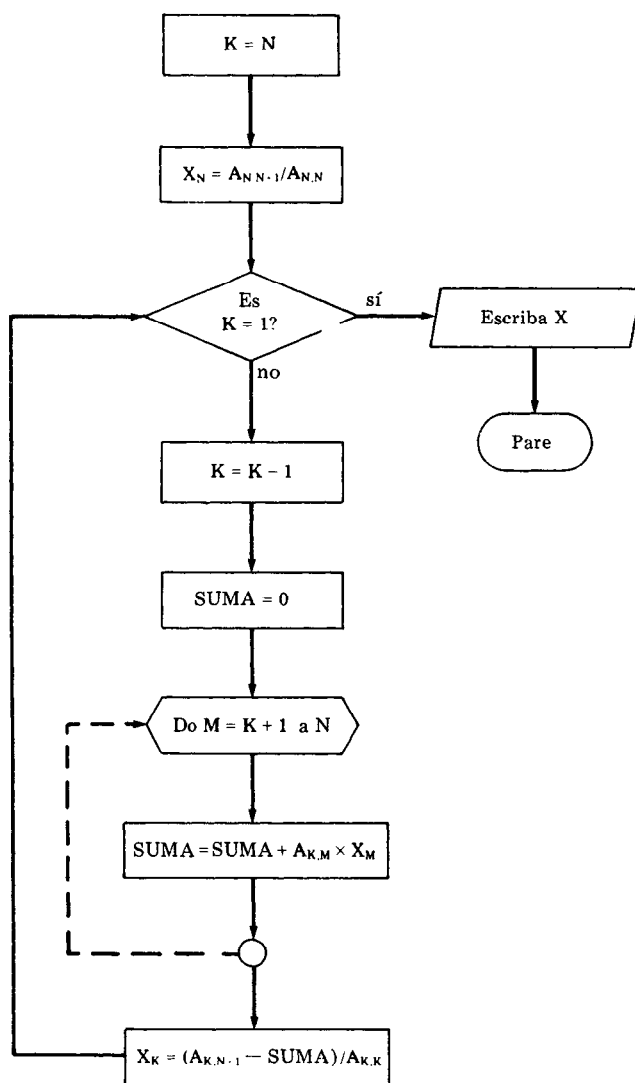


Figura 10-3







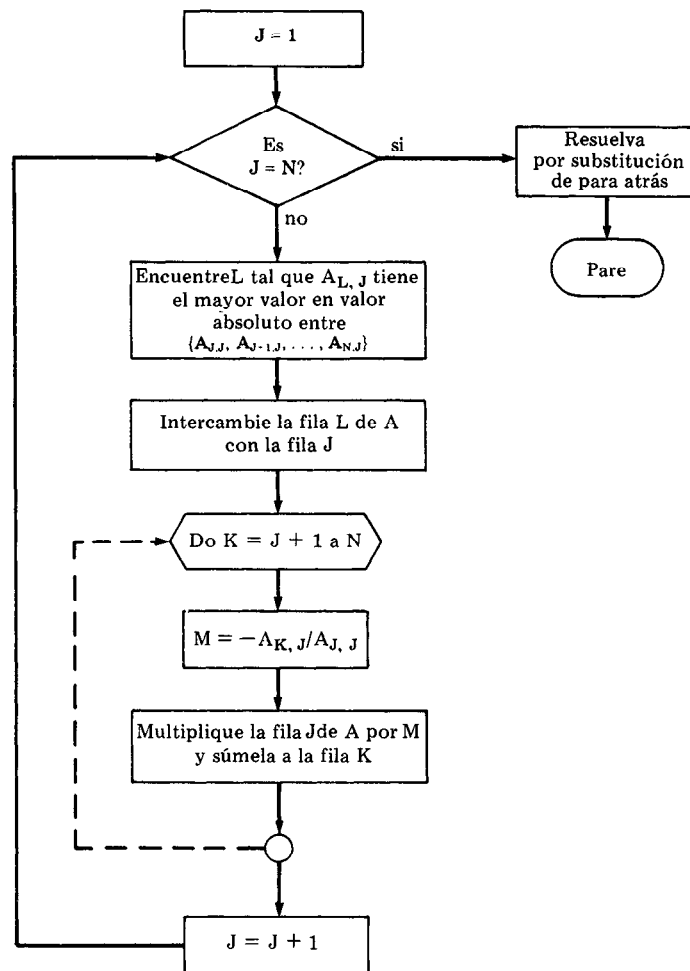


Figura 10-4

**Observación 3:** Generalmente, uno aplica el proceso de triangulación a (10.2) sin calcular con anterioridad el determinante de coeficientes,  $|A|$ . Puede suceder, entonces, que en alguna etapa del proceso, se obtenga una *ecuación degenerada* de la forma

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b$$

que se señala con  $|A| = 0$ . En tal caso, el sistema no tiene solución, y se dice que es *inconsistente*, o tiene un número infinito de soluciones. (Véase el problema 10.11.) Observemos que un sistema es inconsistente sólo si alguna ecuación degenerada tiene una constante no cero.

## 10.7 DETERMINANTES Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Para el sistema (10.2), sea  $D$  el determinante de la matriz  $A = (a_{ij})$  de coeficientes; o sea,  $D = |A|$ . También, sea  $N_i$  el determinante de la matriz obtenida al reemplazar la columna  $i$  de  $A$  por la columna de términos constantes.

**Teorema 10.1:** Si  $D \neq 0$ , (10.2) tiene una única solución

$$u = \left( \frac{N_1}{D}, \frac{N_2}{D}, \dots, \frac{N_n}{D} \right)$$

Notemos que este teorema (la *regla de Cramer*) es de interés teórico e histórico, más que práctico. La eliminación gaussiana es generalmente mucho más eficiente que el uso de determinantes para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

**EJEMPLO 10.6** Resuelva el siguiente sistema de determinantes:

$$2x + y - z = 3$$

$$x + y + z = 1$$

$$x - 2y - 3z = 4$$

El determinante  $D$  de la matriz de coeficientes es

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 1 + 2 + 1 + 4 + 3 = 5$$

Como  $D \neq 0$ , el sistema tiene una única solución. Para obtener el numerador  $N_x$ , reemplace, en la matriz de coeficientes, los coeficientes de  $x$  por los términos constantes:

$$N_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 4 + 2 + 4 + 6 + 3 = 10$$

Para obtener el numerador  $N_y$ , reemplace, en la matriz de coeficientes, los coeficientes de  $y$  por los términos constantes:

$$N_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 3 - 4 + 1 - 8 + 9 = -5$$

Para obtener el numerador  $N_z$ , reemplace, en la matriz de coeficientes, los coeficientes de  $z$  por los términos constantes:

$$N_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 1 - 6 - 3 + 4 - 4 = 0$$

Así, la solución única es

$$x = \frac{N_x}{D} = \frac{10}{5} = 2, \quad y = \frac{N_y}{D} = \frac{-5}{5} = -1, \quad z = \frac{N_z}{D} = \frac{0}{5} = 0$$

## Problemas Propuestos

### ECUACIONES LINEALES CON UNA INCOGNITA

#### 10.1 Resuelva:

$$\begin{array}{lll} (a) & 7x = 21 & (c) \quad 5x = 17 \\ (b) & 2x = -12 & (d) \quad -3x = 11 \end{array} \quad \begin{array}{l} (e) \quad 0x = 5 \\ (f) \quad 0x = 0 \end{array}$$

Si  $a \neq 0$ , entonces  $ax = b$  tiene la solución única  $x = a/b$ . Así:

$$\begin{array}{ll} (a) & x = \frac{21}{7} = 3 \\ (b) & x = \frac{-12}{2} = -6 \end{array} \quad \begin{array}{ll} (c) & x = \frac{17}{5} \\ (d) & x = -\frac{11}{3} \end{array}$$

Observe que el coeficiente de  $x$  es 0 en (e) y (f).

(e) La ecuación no tiene solución.

(f) Todo número es solución de esta ecuación.

#### 10.2 Resuelva:

$$\begin{array}{ll} (a) & x + 3 = 9 - 2x \\ (b) & 6x - 8 + x + 4 = 2x + 11 - 5x \end{array} \quad \begin{array}{ll} (c) & 2x - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}x + 4 \\ (d) & 3x - 4 - x = 5x + 8 - 3x - 3 \end{array}$$

Primero exprese cada ecuación en forma estándar,  $ax = b$ .

(a) Sume  $2x$  a ambos lados:

$$3x + 3 = 9$$

Sume  $-3$  a ambos lados:

$$3x = 6$$

Así,  $x = 2$  es la solución.

(b) Simplifique cada lado:

$$7x - 4 = -3x + 11 \quad \text{o} \quad 10x = 15 \quad \text{o} \quad x = \frac{15}{10} \quad \text{o} \quad x = \frac{3}{2}$$

(c) Multiplique por 6 ambos lados para quitar las fracciones:

$$12x - 8 = 3x + 24 \quad \text{o} \quad 9x = 32 \quad \text{o} \quad x = \frac{32}{9}$$

(d) Simplifique cada lado:

$$2x - 4 = 2x + 5 \quad \text{o} \quad 0x = 9$$

La ecuación no tiene solución.

### ECUACIONES LINEALES CON DOS INCOGNITAS

#### 10.3 Determine tres soluciones diferentes de $2x - 3y = 14$ y dibuje su gráfica.

Dele cualquier valor a una de las variables, digamos,  $x = -2$ . Substituya  $x = -2$  en la ecuación para obtener

$$2 \cdot (-2) - 3y = 14 \quad \text{o} \quad -4 - 3y = 14 \quad \text{o} \quad -3y = 18 \quad \text{o} \quad y = -6$$

Así,  $x = -2$  y  $y = -6$  o, en otras palabras, la pareja  $(-2, -6)$  es una solución.

Substituya ahora, digamos,  $x = 0$  en la ecuación para obtener

$$2 \cdot 0 - 3y = 14 \quad \text{o} \quad -3y = 14 \quad \text{o} \quad y = -14/3$$

Así  $(0, -14/3)$  es otra solución.

Por último, substituya, digamos  $y = 0$  en la ecuación para obtener

$$2x - 3 \cdot 0 = 14 \quad \text{o} \quad 2x = 14 \quad \text{o} \quad x = 7$$

Así,  $(7, 0)$  es otra nueva solución.

Trace la gráfica de las tres soluciones en el plano cartesiano  $\mathbb{R}^2$ , como se muestra en la fig. 10-5. La recta que pasa por estos tres puntos es la gráfica de la ecuación:

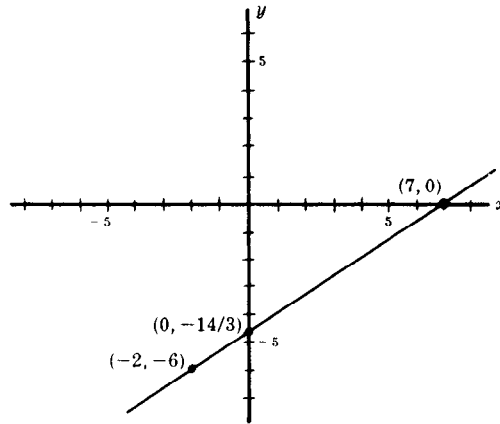


Figura 10-5

#### 10.4 Resuelva el sistema

$$3x - 2y = 7$$

$$x + 2y = 1$$

En este caso los coeficientes de  $y$  ya son negativos entre sí; así que sume las ecuaciones:

$$\begin{array}{r} 3x - 2y = 7 \\ x + 2y = 1 \\ \hline \text{Suma: } 4x = 8 \quad \text{o} \quad x = 2 \end{array}$$

Substituya  $x = 2$  en la segunda ecuación para obtener

$$2 + 2y = 1 \quad \text{o} \quad 2y = -1 \quad \text{o} \quad y = -\frac{1}{2}$$

Así,  $x = 2$ ,  $y = -\frac{1}{2}$ , o en otras palabras, la pareja  $(2, -\frac{1}{2})$ , es la solución del sistema.

Verifique su respuesta substituyendo la solución en ambas ecuaciones originales:

$$\begin{array}{rclclcl} 3 \cdot 2 - 2 \cdot (-\frac{1}{2}) & = & 7 & \text{o} & 6 + 1 & = & 7 \\ 2 + 2 \cdot (-\frac{1}{2}) & = & 1 & \text{o} & 2 - 1 & = & 1 \end{array}$$

#### 10.5 Resuelva el sistema

$$(1) \quad 2x + 5y = 8$$

$$(2) \quad 3x - 2y = -7$$

Para eliminar  $x$ , multiplique (1) por 3 y (2) por  $-2$  y luego sume:

$$\begin{array}{rcl} 3 \times (1): & 6x + 15y = 24 \\ -2 \times (2): & -6x + 4y = 14 \\ \hline \text{Suma:} & 19y = 38 & \text{o } y = 2 \end{array}$$

Substituya  $y = 2$  en una de las ecuaciones originales, digamos (1), para obtener

$$2x + 5 \cdot 2 = 8 \quad \text{o} \quad 2x + 10 = 8 \quad \text{o} \quad 2x = -2 \quad \text{o} \quad x = -1$$

Así,  $x = -1$ ,  $y = 2$ , o en otras palabras, la pareja  $(-1, 2)$ , es la solución única del sistema.

Verifique su respuesta substituyendo la solución en ambas ecuaciones originales:

$$\begin{array}{llll} (1): & 2 \cdot (-1) + 5 \cdot 2 = 8 & \text{o} & -2 + 10 = 8 \quad \text{o} \quad 8 = 8 \\ (2): & 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 = -7 & \text{o} & -3 - 4 = -7 \quad \text{o} \quad -7 = -7 \end{array}$$

Podríamos también resolver el sistema eliminando primero  $y$  como sigue. Multiplique (1) por 2 y (2) por 5 y luego sume:

$$\begin{array}{rcl} 2 \times (1): & 4x + 10y = 16 \\ 5 \times (2): & 15x - 10y = -35 \\ \hline \text{Suma:} & 19x = -19 & \text{o } x = -1 \end{array}$$

Substituya  $x = -1$  en (1) para obtener

$$2 \cdot (-1) + 5y = 8 \quad \text{o} \quad -2 + 5y = 8 \quad \text{o} \quad 5y = 10 \quad \text{o} \quad y = 2$$

De nuevo  $(-1, 2)$  resulta ser la solución.

## 10.6 Resuelva el sistema

$$\begin{array}{l} (1) \quad 5x - 2y = 8 \\ (2) \quad 3x + 4y = 10 \end{array}$$

Para eliminar  $y$ , multiplique (1) por 2 y súmelo a (2):

$$\begin{array}{rcl} 2 \times (1): & 10x - 4y = 16 \\ (2): & 3x + 4y = 10 \\ \hline \text{Suma:} & 13x = 26 & \text{o } x = 2 \end{array}$$

Substituya  $x = 2$  en cualquiera de las ecuaciones originales, digamos en (2), para obtener

$$3 \cdot 2 + 4y = 10 \quad \text{o} \quad 6 + 4y = 10 \quad \text{o} \quad 4y = 4 \quad \text{o} \quad y = 1$$

Así, la pareja  $(2, 1)$  es la solución única del sistema.

Verifique la respuesta substituyendo la solución en ambas ecuaciones originales:

$$\begin{array}{llll} (1): & 5 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 8 & \text{o} & 10 - 2 = 8 \quad \text{o} \quad 8 = 8 \\ (2): & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 10 & \text{o} & 6 + 4 = 10 \quad \text{o} \quad 10 = 10 \end{array}$$

## 10.7 Resuelva el sistema

$$\begin{array}{l} (1) \quad x - 2y = 5 \\ (2) \quad -3x + 6y = -10 \end{array}$$

Observe que los coeficientes de  $x$  e  $y$  son proporcionales, o sea,  $1/-3 = -2/6$ . Así, el sistema no tiene solución única. Observe también que las ecuaciones no son múltiplos entre sí:

$$\frac{1}{-3} = \frac{-2}{6} \neq \frac{5}{-10}$$

Así, el sistema no tiene solución.

## 10.8 Resuelva el sistema

$$\begin{aligned}(1) \quad & x - 2y = 5 \\(2) \quad & -3x + 6y = -15\end{aligned}$$

Observe que los coeficientes y las constantes de las dos ecuaciones son proporcionales entre sí:

$$\frac{1}{-3} = \frac{-2}{6} = \frac{5}{-15}$$

Por lo tanto, las ecuaciones son múltiplos entre sí, y el sistema tiene un número infinito de soluciones, las cuales son soluciones de cualquiera de las dos ecuaciones.

Se encuentran las soluciones particulares de la siguiente manera: Sea  $y = 1$  y sustituya en (1) para obtener

$$x - 2 \cdot 1 = 5 \quad \text{o} \quad x - 2 = 5 \quad \text{o} \quad x = 7$$

Así  $(7, 1)$  es una solución particular. Sea  $y = 2$  y sustituya en (1) para obtener

$$x - 2 \cdot 2 = 5 \quad \text{o} \quad x - 4 = 5 \quad \text{o} \quad x = 9$$

Entonces  $(9, 2)$  es otra solución específica del sistema.

Substituya  $y = 0$  en (1) para obtener  $x = 5$ . Entonces,  $(5, 0)$  es una tercera solución del sistema. Y así sucesivamente.

Es posible trazar gráficamente la solución del sistema tal como se traza la gráfica de la solución de una sola ecuación con dos incógnitas. O sea, se traza la gráfica de las tres soluciones en el plano  $\mathbb{R}^2$ , tal como se muestra en la fig. 10-6. La recta que pasa a través de estos tres puntos es la solución del sistema.

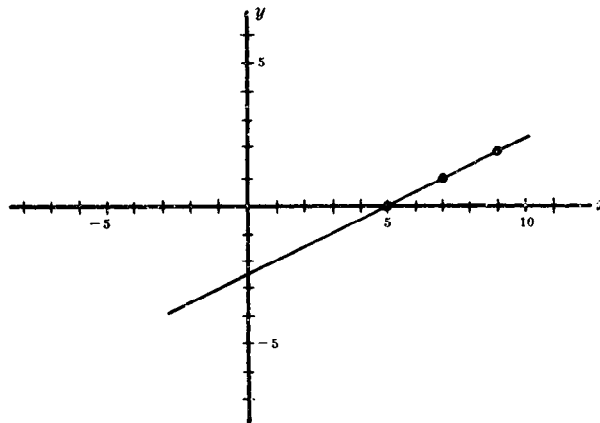


Figura 10-6

### $n$ ECUACIONES LINEALES CON $n$ INCOGNITAS

#### 10.9 Encuentre la solución del siguiente sistema:

$$\begin{aligned}2x - 3y + 5z - 2t &= 9 \\5y - z + 3t &= 1 \\7z - t &= 3 \\2t &= 8\end{aligned}$$

El sistema está en forma triangular; por lo tanto, resolvemos por substitución de para atrás. La última ecuación da  $t = 4$ .

Substituyendo en la tercera ecuación obtenemos:

$$7z - 4 = 3 \quad \text{o} \quad 7z = 7 \quad \text{o} \quad z = 1$$

Substituyendo  $z = 1$  y  $t = 4$  en la segunda ecuación obtenemos:

$$5y - 1 + 3 \cdot 4 = 1 \quad \text{o} \quad 5y - 1 + 12 = 1 \quad \text{o} \quad 5y = -10 \quad \text{o} \quad y = -2$$

Finalmente, substituyendo  $y = -2$ ,  $z = 1$ ,  $t = 4$  en la primera ecuación obtenemos:

$$2x - 3(-2) + 5(1) - 2(4) = 9 \quad \text{o} \quad 2x + 6 + 5 - 8 = 9 \quad \text{o} \quad 2x = 6 \quad \text{o} \quad x = 3$$

Así,  $x = 3$ ,  $y = -2$ ,  $z = 1$ ,  $t = 4$ , o en forma equivalente la lista  $(3, -2, 1, 4)$ , es la solución única del sistema.

### 10.10 Resolver el sistema

$$\mathcal{E}_1: x + 2y - 4z = -4$$

$$\mathcal{E}_2: 5x - 3y - 7z = 6$$

$$\mathcal{E}_3: 3x - 2y + 3z = 11$$

Primero multiplique  $\mathcal{E}_1$  por  $-5$  y súmela a  $\mathcal{E}_2$  para obtener una nueva ecuación sin  $x$ ; multiplique luego  $\mathcal{E}_1$  por  $-3$  y súmela a  $\mathcal{E}_3$  para obtener una nueva tercera ecuación sin  $x$ :

$$\begin{array}{rcl} -5 \times \mathcal{E}_1: & -5x - 10y + 20z = 20 & -3 \times \mathcal{E}_1: -3x - 6y + 12z = 12 \\ \mathcal{E}_2: & 5x - 3y - 7z = 6 & \mathcal{E}_3: 3x - 2y + 3z = 11 \\ \hline \text{nueva } \mathcal{E}_2: & -13y + 13z = 26 & \text{nueva } \mathcal{E}_3: -8y + 15z = 23 \\ \text{o:} & y - z = -2 & \end{array}$$

Así, el sistema original es equivalente al sistema

$$\mathcal{E}_1: x + 2y - 4z = -4$$

$$\mathcal{E}_2: y - z = -2$$

$$\mathcal{E}_3: -8y + 15z = 23$$

Elimine ahora  $y$  de la tercera ecuación multiplicando  $\mathcal{E}_2$  por 8 y sumándola luego a  $\mathcal{E}_3$ :

$$\begin{array}{rcl} 8 \times \mathcal{E}_2: & 8y - 8z = -16 & \\ \mathcal{E}_3: & -8y + 15z = 23 & \\ \hline \text{nueva } \mathcal{E}_3: & 7z = 7 & \end{array}$$

Así obtenemos el siguiente sistema triangular:

$$x + 2y - 4z = -4$$

$$y - z = -2$$

$$7z = 7$$

La tercera ecuación de  $z = 1$ . Substituyendo  $z = 1$  en la segunda ecuación para obtener

$$y - 1 = -2 \quad \text{o} \quad y = -1$$

Substituya ahora  $z = 1$  e  $y = -1$  en la primera ecuación para obtener

$$x + 2 \cdot (-1) - 4 \cdot 1 = -4 \quad \text{o} \quad x - 2 - 4 = -4 \quad \text{o} \quad x - 6 = -4 \quad \text{o} \quad x = 2$$

Así,  $x = 2$ ,  $y = -1$ ,  $z = 1$ , o, en otras palabras, la triple ordenada  $(2, -1, 1)$ , es la solución única del sistema.

### 10.11 Resolver cada sistema:

$$x + 2y - 3z = -1$$

$$x + 2y - 3z = 6$$

$$(a) \quad -3x + y - 2z = -7$$

$$(b) \quad 2x - y + 4z = 2$$

$$5x + 3y - 4z = 2$$

$$-4x - 5y + 6z = -18$$

(a) Elimine  $x$  de las ecuaciones primera y segunda:

$$\begin{array}{rcl} 3 \times \mathcal{E}_1: & 3x + 6y - 9z = & -3 \\ \mathcal{E}_2: & -3x + y - 2z = & -7 \\ \hline \text{nueva } \mathcal{E}_2: & 7y - 11z = & -10 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} -5 \times \mathcal{E}_1: & -5x - 10y + 15z = & 6 \\ \mathcal{E}_3: & 5x + 3y - 4z = & 2 \\ \hline \text{nueva } \mathcal{E}_3: & -7y + 11z = & 7 \end{array}$$

Esto da el nuevo sistema

$$\begin{array}{rcl} x + 2y - 3z = & -1 \\ 7y - 11z = & -10 \\ -7y + 11z = & 7 \end{array}$$

Sumando la segunda ecuación a la tercera para eliminar  $y$  de la tercera ecuación, obtenemos

$$0x + 0y + 0z = -3$$

Esta ecuación, y por lo tanto el sistema, no tiene solución.

(b) Elimine  $x$  de las ecuaciones segunda y tercera:

$$\begin{array}{rcl} -2 \times \mathcal{E}_1: & -2x - 4y + 6z = & -12 \\ \mathcal{E}_2: & 2x - y + 4z = & 2 \\ \hline \text{nueva } \mathcal{E}_2: & -5y + 10z = & -10 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} 4 \times \mathcal{E}_1: & 4x + 8y - 12z = & 24 \\ \mathcal{E}_3: & -4x - 5y + 6z = & -18 \\ \hline \text{nueva } \mathcal{E}_3: & 3y - 6z = & 6 \end{array}$$

Esto da el nuevo sistema

$$\begin{array}{rcl} x + 2y - 3z = & 6 \\ -5y + 10z = & -10 \\ 3y - 6z = & 6 \end{array}$$

Multiplique la segunda ecuación por  $3/5$  y súmela a la tercera ecuación para eliminar  $y$  de la tercera ecuación. Esto da

$$0x + 0y + 0z = 0$$

lo cual muestra que las ecuaciones segunda y tercera son proporcionales. Así la tercera ecuación se puede quitar, y el sistema se ha reducido a

$$\begin{array}{rcl} x + 2y - 3z = & 6 \\ -5y + 10z = & -10 \end{array}$$

Observe que al substituir a  $z$  por cualquier valor resulta un sistema triangular con  $x$  e  $y$ . Por lo tanto, este sistema tiene un número infinito de soluciones, una para cada valor de  $z$ .

### 10.12 Resuelva el sistema

$$\begin{array}{rcl} 2x + y - 3z = & 1 \\ 5x + 2y - 6z = & 5 \\ 3x - y - 4z = & 7 \end{array}$$

Elimine  $x$  de las ecuaciones segunda y tercera. Para evitar fracciones, multiplique tanto  $\mathcal{E}_1$  como  $\mathcal{E}_2$  para eliminar  $x$  de la segunda ecuación, y multiplique tanto  $\mathcal{E}_1$  como  $\mathcal{E}_3$  para eliminar  $x$  de la tercera ecuación:

$$\begin{array}{rcl} -5 \times \mathcal{E}_1: & -10x - 5y + 15z = & -5 \\ 2 \times \mathcal{E}_2: & 10x + 4y - 12z = & 10 \\ \hline \text{nueva } \mathcal{E}_2: & -y + 3z = & 5 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} -3 \times \mathcal{E}_1: & -6x - 3y + 9z = & -3 \\ 2 \times \mathcal{E}_3: & 6x - 2y - 8z = & 14 \\ \hline \text{nueva } \mathcal{E}_3: & -5y + z = & 11 \end{array}$$

Esto da el sistema

$$\begin{array}{rcl} 2x + y - 3z = & 1 \\ -y + 3z = & 5 \\ -5y + z = & 11 \end{array}$$



Elimine y de la tercera ecuación:

$$\begin{array}{rcl} -5 \times \mathcal{E}_2: & 5y - 15z & = -25 \\ \mathcal{E}_3: & -5y + z & = 11 \\ \hline \text{nueva } \mathcal{E}_3: & & -14z = -14 \end{array}$$

Así obtenemos el sistema triangular

$$\begin{array}{rcl} 2x + y - 3z & = & 1 \\ -y + 3z & = & 5 \\ -14z & = & -14 \end{array}$$

La sustitución de para atrás da la solución  $x = 3$ ,  $y = -2$ ,  $z = 1$ .

**10.13** Un computador, programado de acuerdo con la fig. 10-4, resuelve el sistema definido por la matriz aumentada

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & -10 \\ 1 & 2 & -2 & 7 \\ 2 & 8 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Describa los pasos que efectúa el computador.

Primero el computador encuentra la fila de  $A$ , tal que su entrada en su primera columna tiene el mayor valor absoluto entre todas las entradas en la primera columna. Esta es la tercera fila; así, el computador intercambia las filas primera y tercera:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & 7 \\ 1 & 7 & 1 & -10 \end{pmatrix}$$

Ahora el computador usa el multiplicador  $m_{12} = -1/2$  para producir un 0 en la posición (2, 1), y el multiplicador  $m_{13} = -1/2$  para producir un 0 en la posición (3, 1):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -1 & -2 \\ 1 - \frac{1}{2}(2) & 2 - \frac{1}{2}(8) & -2 - \frac{1}{2}(-1) & 7 - \frac{1}{2}(-2) \\ 1 - \frac{1}{2}(2) & 7 - \frac{1}{2}(8) & 1 - \frac{1}{2}(-1) & -10 - \frac{1}{2}(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -1.5 & 8 \\ 0 & 3 & 1.5 & -9 \end{pmatrix}$$

En seguida, el computador examina las entradas en la segunda columna por debajo de la primera fila: intercambia las filas segunda y tercera, ya que 3 en la tercera fila tiene mayor valor absoluto que  $-2$  en la segunda fila. Así el arreglo se vuelve

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 1.5 & -9 \\ 0 & -2 & -1.5 & 8 \end{pmatrix}$$

El computador usa ahora el multiplicador  $m_{23} = -(-2)/3 = 2/3$  para producir un 0 en la posición (3, 2), transformando así las tres primeras columnas del arreglo en forma triangular:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 1.5 & -9 \\ 0 + \frac{2}{3}(0) & -2 + \frac{2}{3}(3) & -1.5 + \frac{2}{3}(1.5) & 8 + \frac{2}{3}(-9) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 1.5 & -9 \\ 0 & 0 & -0.5 & 2 \end{pmatrix}$$

El control ahora pasa a la parte de sustitución de para atrás del programa (véase la fig. 10-3), que da la solución  $(1, -1, -4)$ .

## DETERMINANTES Y ECUACIONES LINEALES

10.14 Resuelva usando determinantes:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 7 \\ 3x - 5y &= 4 \end{aligned}$$

Primero, compute el determinante  $D$  de la matriz de coeficientes:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -10 - 3 = -13$$

Como  $D \neq 0$ , el sistema tiene una solución única. Reemplace la primera columna en la matriz de coeficientes por la columna de términos constantes y calcule su determinante,  $N_x$ :

$$N_x = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -35 - 4 = -39$$

Reemplace la segunda columna en la matriz de coeficientes por la columna de términos constantes y calcule su determinante,  $N_y$ :

$$N_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 21 = -13$$

La solución del sistema es, entonces,

$$x = \frac{N_x}{D} = \frac{-39}{-13} = 3 \quad y = \frac{N_y}{D} = \frac{-13}{-13} = 1$$

10.15 Resuelva usando determinantes:

$$\begin{aligned} 3y + 2x &= z + 1 \\ 3x + 2z &= 8 - 5y \\ 3z - 1 &= x - 2y \end{aligned}$$

Arregle primero las ecuaciones en forma estándar de tal manera que las incógnitas queden en columnas:

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 1 \\ 3x + 5y + 2z &= 8 \\ x - 2y - 3z &= -1 \end{aligned}$$

Compute el determinante  $D$  de la matriz de coeficientes:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -30 + 6 + 6 + 5 + 8 + 27 = 22$$

Como  $D \neq 0$ , el sistema tiene una única solución. Para computar  $N_x$ ,  $N_y$  y  $N_z$ , reemplace los coeficientes de la incógnita en la matriz de coeficientes por los términos constantes:

$$N_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 8 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -15 - 6 + 16 - 5 + 72 + 4 = 66$$

$$N_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -48 + 2 + 3 + 8 + 4 + 9 = -22$$

$$N_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -10 + 24 - 6 - 5 + 32 + 9 = 44$$

Así, la solución única del sistema es

$$x = \frac{N_x}{D} = \frac{66}{22} = 3 \quad y = \frac{N_y}{D} = \frac{-22}{22} = -1 \quad z = \frac{N_z}{D} = \frac{44}{22} = 2$$

## Problemas suplementarios

### ECUACIONES LINEALES CON UNA Y DOS INCOGNITAS

10.16 Resuelva cada ecuación:

$$\begin{array}{llll} (a) & 4x = 28 & (c) & 0x = -2 \\ (b) & 3x = -18 & (d) & 7x = 11 \end{array} \quad \begin{array}{ll} (e) & -2x = 9 \\ (f) & 0x = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} (g) \quad -7x = -21 \\ (h) \quad 0x = 6 \end{array}$$

10.17 Resuelva (a)  $3x + 2 = 10 - x$ , (b)  $5x - 4 = 2x + 11$ .

10.18 Resuelva

$$(a) \quad 2x + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}x + 5 \quad (b) \quad \frac{x-2}{2x+3} = \frac{3}{7}$$

10.19 Represente gráficamente cada ecuación en el plano:

$$(a) \quad 3x - 2y = 6 \quad (b) \quad x + 2y = 4 \quad (c) \quad 2x = 6 \quad (d) \quad y = -3$$

10.20 Resuelva cada sistema:

$$\begin{array}{lll} (a) & \begin{array}{l} 2x - 5y = 1 \\ 3x + 2y = 11 \end{array} & (b) \quad \begin{array}{l} 2x + 3y = 1 \\ 5x + 7y = 3 \end{array} \\ (c) & \begin{array}{l} 3x - 2y = 7 \\ x + 3y = -16 \end{array} \end{array}$$

10.21 Resuelva cada sistema:

$$\begin{array}{lll} (a) & \begin{array}{l} 2x + 4y = 10 \\ 3x + 6y = 15 \end{array} & (b) \quad \begin{array}{l} 4x - 2y = 5 \\ -6x + 3y = 1 \end{array} \\ (c) & \begin{array}{l} 2x - 4 = 3y \\ 5y - x = 5 \end{array} \end{array}$$

10.22 Resuelva cada sistema:

$$\begin{array}{ll} (a) & \begin{array}{l} \frac{2x}{3} + \frac{y}{2} = 8 \\ \frac{x}{6} - \frac{y}{4} = -1 \end{array} \\ (b) & \begin{array}{l} \frac{2x-1}{3} + \frac{y+2}{4} = 4 \\ \frac{x+3}{2} - \frac{x-y}{3} = 3 \end{array} \end{array}$$

### SISTEMAS CUADRADOS DE ECUACIONES LINEALES

10.23 Resuelva cada sistema:

$$\begin{array}{ll} (a) & \begin{array}{l} x + y - 3z = 5 \\ 2y + z = 8 \\ 3z = 6 \end{array} \\ (b) & \begin{array}{l} r - 2s + t = 2 \\ 3s - 4t = 9 \\ 2t = 6 \end{array} \end{array}$$

10.24 Resuelva cada sistema:

$$\begin{array}{ll} (a) & \begin{array}{l} x + 3y - z - 2t = 13 \\ 2y + 4z - t = 10 \\ 5z - 2t = 7 \\ 3t = 12 \end{array} \\ (b) & \begin{array}{l} 2x + 4y - 3z + 2t = 6 \\ 3y - 5z + 3t = 2 \\ 4z - t = 5 \\ 5t = 15 \end{array} \end{array}$$

10.25 Resuelva:

$$\begin{array}{ll} (a) & \begin{array}{l} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 5y - 4z = 5 \\ 3x + 4y + 2z = 12 \end{array} \\ (b) & \begin{array}{l} 2x + y - 2z = 1 \\ 3x + 2y - 4z = 1 \\ 5x + 4y - z = 8 \end{array} \end{array}$$

10.26 Resuelva:

$$\begin{array}{ll} (a) & \begin{array}{l} 2x + 3y - 2z = 5 \\ x - 2y + 3z = 2 \\ 4x - y + 4z = 1 \end{array} \\ (b) & \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 3 \\ 2x + 3y + 8z = 4 \\ 3x + 2y + 17z = 1 \end{array} \end{array}$$

**MATRICES Y ECUACIONES LINEALES****10.27** Considere el sistema

$$\begin{aligned} 3x - 5y &= 1 \\ 6x + 7y &= 19 \end{aligned}$$

(a) Escríbalo como una ecuación matricial. (b) Encuentre la matriz aumentada del sistema. (c) Resuelva el sistema.

**10.28** Considere el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 3 \\ 2x + 3y + 5z &= 7 \\ 3x + 5y + 7z &= 12 \end{aligned}$$

(a) Escríbalo como una ecuación matricial. (b) Encuentre la matriz aumentada del sistema. (c) Resuelva el sistema.

**DETERMINANTES Y ECUACIONES LINEALES****10.29** Resuelva cada sistema, usando determinantes:

$$\begin{array}{lll} (a) \begin{cases} 3x + 4y = 11 \\ 2x + 5y = 10 \end{cases} & (b) \begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ 3x + 4y = 10 \end{cases} & (c) \begin{cases} 4x - 3y = 2 \\ 2y - 5 = 7x \end{cases} \end{array}$$

**10.30** Resuelva, usando determinantes:

$$\begin{array}{ll} (a) \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x - 5y + 2z = 1 \\ 3x - 4y - z = 2 \end{cases} & (b) \begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 5x + 7y + z = 4 \end{cases} \end{array}$$

**Respuestas a los problemas suplementarios**

**10.16** (a) 4, (b) -6, (c) No hay solución, (d) 11/7, (e) -9/2, (f) todos los números, (g) 3, (h) no hay solución.

**10.17** (a) 2, (b) 5

**10.18** (a) 27/10, (b) 23

**10.19** Ver fig. 10-7.

**10.20** (a)  $x = 3$ ,  $y = 1$ ; (b)  $x = 2$ ,  $y = -1$ ; (c)  $x = -1$ ,  $y = -5$

**10.21** (a) Hay un número infinito de soluciones, ya que las dos ecuaciones coinciden.  
 (b) No hay solución; las gráficas de las dos ecuaciones son paralelas.  
 (c)  $x = 5$ ,  $y = 2$

**10.22** (a)  $x = 6$ ,  $y = 8$ ; (b)  $x = 5$ ,  $y = 2$

**10.23** (a)  $x = 8$ ,  $y = 3$ ,  $z = 2$ ; (b)  $r = 13$ ,  $s = 7$ ,  $t = 3$

**10.24** (a)  $x = 21$ ,  $y = 1$ ,  $z = 3$ ,  $t = 4$ ; (b)  $x = 1$ ,  $y = 1$ ,  $z = 2$ ,  $t = 3$

**10.25** (a)  $x = 2$ ,  $y = 1$ ,  $z = 1$ ; (b)  $x = 1$ ,  $y = 1$ ,  $z = 1$

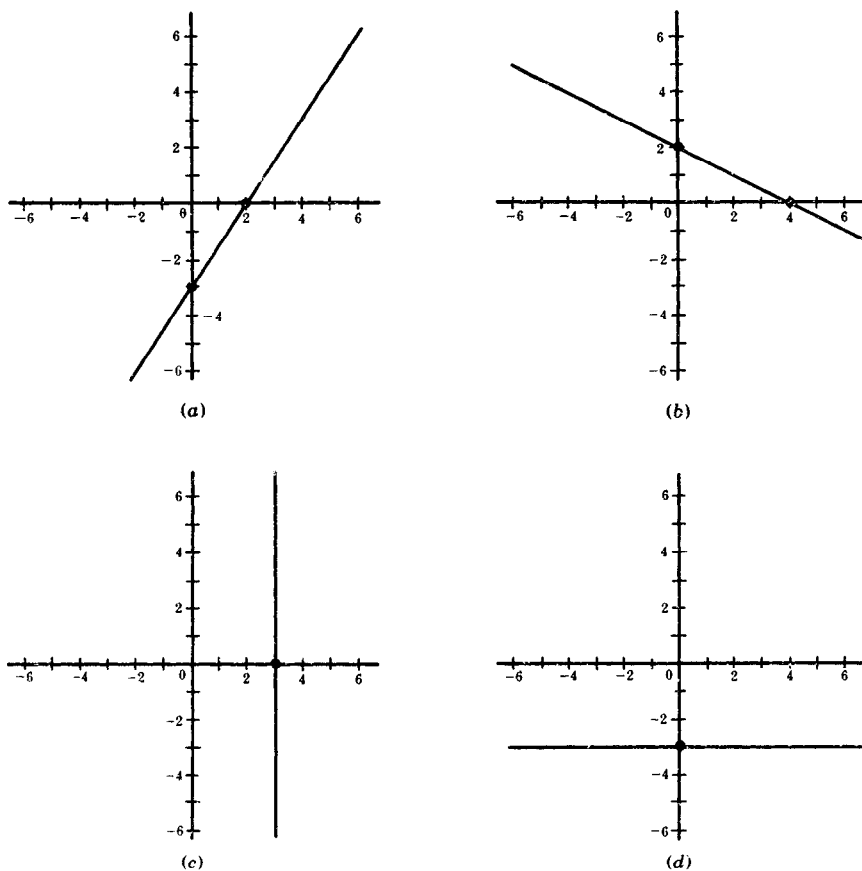


Figura 10-7

10.26 (a) No hay solución. (b) Hay un número infinito de soluciones; al resolver para  $x$  e  $y$  en términos de  $z$  resulta

10.27 (a)  $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 19 \end{pmatrix}$ ; (b)  $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 6 & 7 & 19 \end{pmatrix}$ ; (c)  $x = 1, y = 1$

10.28 (a)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix}$ ; (b)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 12 \end{pmatrix}$ ; (c)  $x = 3, y = 2, z = -1$

10.29 (a)  $x = \frac{15}{7}, y = \frac{8}{7}$ ; (b)  $x = \frac{38}{17}, y = \frac{14}{17}$ ; (c)  $x = -\frac{19}{13}, y = -\frac{34}{13}$

10.30 (a)  $x = \frac{43}{22}, y = \frac{18}{22}, z = \frac{13}{22}$

(b) Debido a que el determinante de la matriz de coeficientes es cero, la solución (no única) del sistema no se puede encontrar por la regla de Cramer.



## Análisis combinatorio

### 11.1 INTRODUCCION

El *análisis combinatorio*, que incluye el estudio de permutaciones, combinaciones y particiones, trata la manera de determinar el número de posibilidades lógicas en algún evento sin enumerar necesariamente cada caso. Se usa el siguiente principio básico a través del capítulo.

**Principio fundamental de conteo:** Si algún evento puede ocurrir en  $n_1$  maneras diferentes, y si después de este evento, un segundo evento puede ocurrir en  $n_2$  maneras diferentes, y después de este segundo evento, un tercer evento puede ocurrir en  $n_3$  maneras diferentes, . . . , entonces el número de maneras en que los eventos pueden ocurrir en el orden indicado es  $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \dots$

**EJEMPLO 11.1** Las matrículas de los autos de un país dado contienen dos letras seguidas por tres dígitos, en donde el primer dígito no puede ser cero. Se calcula el número de las diferentes placas posibles de la siguiente manera: Cada letra se puede seleccionar en veintiséis maneras diferentes, el primer dígito de nueve maneras, y cada uno de los otros dos dígitos en diez maneras. Así que hay

$$26 \cdot 26 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 = 608\,400$$

diferentes placas posibles.

### 11.2 NOTACION FACTORIAL

Se usa la notación  $n!$ , léase “ $n$  factorial”, para denotar el producto de los enteros positivos de 1 a  $n$ , inclusive:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-2)(n-1)n$$

Equivalentemente, se define  $n!$  por

$$1! = 1 \quad \text{y} \quad n! = n \cdot (n-1)!$$

También es conveniente definir  $0! = 1$ .

#### EJEMPLO 11.2

$$(a) \quad 2! = 1 \cdot 2 = 2 \quad 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \quad 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 \\ 5! = 5 \cdot 4! = 5 \cdot 24 = 120 \quad 6! = 6 \cdot 5! = 6 \cdot 120 = 720$$

$$(b) \quad \frac{8!}{6!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!} = 8 \cdot 7 = 56 \quad 12 \cdot 11 \cdot 10 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9!}{9!} = \frac{12!}{9!} \\ \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \frac{1}{3!} = \frac{12!}{3!9!}$$

$$(c) \quad n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-r+1) = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-r+1)(n-r)(n-r-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-r)(n-r-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-r)!} \\ \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (r-1)r} = n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-r+1) \cdot \frac{1}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!} \cdot \frac{1}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

La figura 11-1 representa un diagrama de flujo que lee un entero positivo  $N$  y calcula la salida  $N!$ , representada por la variable NFACT.

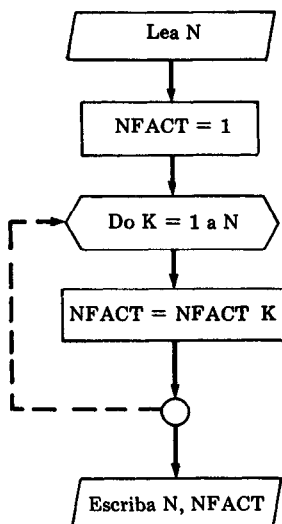


Figura 11-1

### 11.3 COEFICIENTES BINOMIALES

Se define el símbolo

$$\binom{n}{r}$$

leído “ $n$  con  $r$ ”, en donde  $n$  y  $r$  son enteros positivos con  $r \leq n$ , por

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (r-1)r}$$

o, del ejemplo 11.2(c), por

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

que también se extiende al caso  $r = 0$ . Pero  $n - (n - r) = r$ ; así que hemos encontrado la siguiente relación importante:

$$\binom{n}{n-r} = \binom{n}{r}$$

En otras palabras, si  $a + b = n$ , entonces

$$\binom{n}{a} = \binom{n}{b}$$

#### EJEMPLO 11.3

$$(a) \quad \binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28 \quad \binom{9}{4} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 126 \quad \binom{12}{5} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 792$$

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120 \quad \binom{13}{1} = \frac{13}{1} = 13$$

Observe que  $\binom{n}{r}$  tiene exactamente  $r$  factores tanto en el numerador como en el denominador.

(b) Calcule  $\binom{10}{7}$ . Por definición,

$$\binom{10}{7} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = 120$$

Por otro lado,  $10 - 7 = 3$ , y así

$$\binom{10}{7} = \binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$$

Observe que el segundo cómputo ahorra espacio y tiempo.

La figura 11-2 muestra un diagrama de flujo que lee N y R y calcula y produce salidas.

$$\binom{N}{R}$$

representados por la variable NCR. Usamos el hecho de que NCR tiene R factores en el numerador y en el denominador, y por lo tanto puede ser calculado como

$$\text{NCR} = \frac{N}{1} \times \frac{N-1}{2} \times \frac{N-2}{3} \times \dots \times \frac{N-R+1}{R}$$

Así inicializamos NCR en  $(N/1) = N$  y usamos un ciclo DO con índice K que va de 1 a R -- 1.

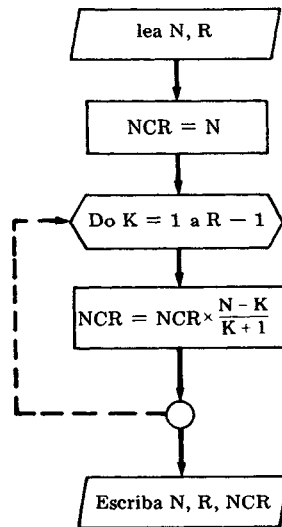


Figura 11-2

Los números  $\binom{n}{r}$  se llaman *coeficientes binomiales* porque aparecen como los coeficientes en la expansión de  $(a + b)^n$ . Específicamente, se puede probar que

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Los coeficientes en las expansiones de las potencias sucesivas de  $a + b$  pueden ser arreglados en un arreglo triangular de números, llamado el triángulo de Pascal, como se muestra en la fig. 11-3.



$$\begin{aligned}
 (a+b)^0 &= 1 \\
 (a+b)^1 &= a+b \\
 (a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 \\
 (a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\
 (a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \\
 (a+b)^5 &= a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5 \\
 (a+b)^6 &= a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6
 \end{aligned}$$

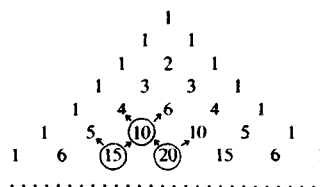


Figura 11-3

El triángulo de Pascal tiene las siguientes propiedades interesantes.

- (i) Cada fila exhibe una simetría central.
- (ii) Se puede obtener cualquier número interior del arreglo sumando los dos números que aparecen directamente encima de él. Por ejemplo  $10 = 4 + 6$ ,  $15 = 5 + 10$ ,  $20 = 10 + 10$ .

La propiedad (ii) del triángulo de Pascal refleja el siguiente teorema (demostrado en el problema 11.8):

**Teorema 11.1:**  $\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$

#### 11.4 PERMUTACIONES

Cualquier arreglo de un conjunto de  $n$  objetos en un orden dado se llama *permutación* de los objetos (tomados todos a la vez). Cualquier arreglo de cualquier  $r \leq n$  de estos objetos en un orden dado se llama una *permutación* o una *permutación de  $n$  objetos tomados  $r$  a la vez*. Considere, por ejemplo, el conjunto de letras a, b, c y d. Entonces:

- (i)  $bdca$ ,  $dcba$  y  $acdb$  son permutaciones de las cuatro letras (tomadas todas a la vez);
- (ii)  $bad$ ,  $adb$ ,  $cbd$  y  $bca$  son permutaciones de las cuatro letras tomadas tres a la vez.
- (iii)  $ad$ ,  $cb$ ,  $da$  y  $bd$  son permutaciones de las cuatro letras tomadas dos a la vez.

El número de permutaciones de  $n$  objetos tomados  $r$  a la vez se designa por

$$P(n, r), {}_n P_r, P_{n,r}, P_r^n, \text{ o } (n)_r$$

Usaremos  $P(n, r)$ . Para encontrar una expresión para  $P(n, r)$  observamos que el primer elemento de una permutación de  $n$  objetos tomando  $r$  a la vez puede ser escogido de  $n$  maneras diferentes; después de esto, el segundo elemento de la permutación puede ser escogido de  $n-1$  maneras; y, después de esto, el tercer elemento de la permutación puede ser escogido de  $n-2$  maneras. Siguiendo de esta manera, tenemos que el elemento  $r$  (el último) de la permutación puede ser escogido de  $n-(r-1) = n-r+1$  maneras. Así, por el principio fundamental de conteo,

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1)$$

o, usando el ejemplo 11.2(c),

**Teorema 11.2:**  $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$

En el caso especial en que  $r = n$ , tenemos

$$P(n, n) = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Por lo tanto,

**Corolario 11.3:** Hay  $n!$  permutaciones de  $n$  objetos (tomados todos a la vez).



Por ejemplo, hay  $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$  permutaciones de las tres letras  $a, b$  y  $c$ . Estas son  $abc, acb, bac, bca, cab, cba$ .

### 11.5 PERMUTACIONES CON REPETICION; PARTICIONES

Frecuentemente queremos encontrar el número de permutaciones de objetos de algunas de las cuales son similares. La fórmula general es la siguiente:

**Teorema 11.4:** El número de permutaciones de  $n$  objetos de los cuales  $n_1$  son similares de alguna manera,  $n_2$  son similares de otra manera,  $\dots$ ,  $n_r$  son similares aún de otra manera, es

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_r!}$$

En el teorema,  $n_1, n_2, \dots, n_r$  son enteros positivos cuya suma es  $n$ .

Indicamos la demostración del teorema anterior con un ejemplo particular. Supongamos que queremos formar todas las “palabras” posibles de cinco letras usando las letras de la palabra “ACABA”. Hay  $5! = 120$  permutaciones de los objetos  $A_1, C, A_2, B, A_3$ , en donde se distinguen tres As. Observe que las seis permutaciones siguientes

$A_1 A_2 A_3 CB, A_1 A_3 A_2 CB, A_2 A_1 A_3 CB, A_2 A_3 A_1 CB, A_3 A_1 A_2 CB$ , y  $A_3 A_2 A_1 CB$

producen la misma palabra cuando se quitan los subíndices. El 6 viene del hecho de que hay  $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$  maneras diferentes de colocar las tres As en las primeras tres posiciones en la permutación. Esto es cierto para cada conjunto de tres posiciones en que aparecen las As.

Por lo tanto hay

$$\frac{5!}{3!} = \frac{120}{6} = 20$$

palabras diferentes de cinco letras que se pueden formar usando las letras de la palabra “ACABA”. (La expresión completa como se da en el teorema 11.4 sería  $5!/3!1!1!$ ), en donde un  $1!$  resultó de la única  $C$  y el otro de la única  $B$ . Como  $1! = 1$ , podemos omitir  $1!$ .)

**EJEMPLO 11.4** ¿Cuántas señales diferentes, cada una formada de ocho banderas colgadas verticalmente, se puede formar con cuatro banderas rojas indistinguibles, tres banderas blancas indistinguibles, y una bandera azul?

Buscamos el número de permutaciones de ocho objetos de los cuales cuatro son similares y tres también lo son. Hay

$$\frac{8!}{4! 3! 1!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = 280$$

diferentes señales.

#### Particiones ordenadas

Considere un conjunto,  $A$ , de  $n$  objetos diferentes. El teorema 11.4 también cuenta las *particiones ordenadas*

$$[A_1, A_2, \dots, A_r]$$

de  $A$  en una célula  $A_1$  que contiene  $n_1$  elementos, una célula  $A_2$  que contiene  $n_2$  elementos,  $\dots$ , y una célula  $A_r$  que contiene  $n_r$  elementos. En realidad, si vemos las permutaciones en el teorema 11.4 como maneras de llenar las  $n$  posiciones fijas (por ejemplo  $B A A C A$ ), entonces es claro que cada permutación determina una partición ordenada de las posiciones en una célula de  $n_1$  posiciones llenadas por objetos del primer tipo, una célula de  $n_2$  posiciones llenadas por objetos del segundo tipo, etc. (Por ejemplo, las células determinadas por la permutación BAACA son una célula  $A$  que consta de las posiciones 2, 3, y 5; una célula  $C$  que consta de la

posición 4; y una célula B que consta de la posición 1.) Además, distintas permutaciones determinan distintas particiones ordenadas. Así que hemos demostrado el

**Corolario 11.5:** El número de particiones ordenadas de  $n$  elementos distintos en células con tamaños  $n_1, n_2, \dots, n_r$  es

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_r!}$$

**EJEMPLO 11.5** ¿De cuántas maneras se pueden dividir nueve juguetes entre cuatro niños, si el niño menor debe recibir tres juguetes y cada uno de los otros niños dos juguetes?

Queremos encontrar el número de particiones ordenadas de los cuatro juguetes en cuatro células que contengan 3, 2, 2 y 2 juguetes, respectivamente. Por el corolario 11.5, hay

$$\frac{9!}{3! 2! 2! 2!} = 7560$$

de tales particiones ordenadas.

#### Particiones no ordenadas

Estas son las particiones tales como se han definido en la sec. 6.10; aquí, solamente importa la composición de las células, no su orden. Al contar las particiones no ordenadas de  $n$  elementos, es conveniente caracterizar una partición no por los tamaños de las células, sino —lo que viene a ser la misma cosa— por el número  $i_1$  de células que contienen 1 elemento, el número  $i_2$  de células que contienen 2 elementos,  $\dots$ , y el número  $i_n$  de células que contienen  $n$  elementos. El mismo razonamiento que llevé al corolario 11.5 nos da el

**Corolario 11.6:** El número de particiones no ordenadas de  $n$  elementos distintos en  $i_1$  células que contienen 1 elemento cada una,  $i_2$  células que contienen 2 elementos cada una,  $\dots$ ,  $i_n$  células que contienen  $n$  elementos cada una, es

$$\frac{n!}{[(1!)^{i_1} i_1!][(2!)^{i_2} i_2!] \cdots [(n!)^{i_n} i_n!]}$$

En este corolario,  $i_1, i_2, \dots, i_n$  son enteros no negativos tales que

$$1i_1 + 2i_2 + \cdots + ni_n = n$$

En particular,  $i_n$  puede ser igual a 1 sólo si todos los demás  $i_n$  son 0.

**EJEMPLO 11.6** ¿De cuántas maneras se pueden ordenar nueve juguetes en un grupo de tres juguetes, un grupo de dos juguetes, un grupo de dos juguetes, y un grupo de dos juguetes? (Compárelo con el ejemplo 11.5).

Queremos encontrar el número de particiones no ordenadas de los nueve juguetes tales que 3 células contengan dos juguetes y 1 célula contenga tres juguetes (y 0 células contengan un juguete, etc.). Por el corolario 11.6, hay

$$\frac{9!}{[(2!)^3 3!][(3!)^1 1!]} = 1260$$

tales particiones no ordenadas.

#### 11.6 COMBINACIONES

Supóngase que tenemos una colección de  $n$  objetos. Una *combinación* de estos  $n$  objetos tomando  $r$  a la vez es cualquier selección de  $r$  de los objetos en donde el orden no importa. En otras palabras, una *combinación* de  $n$  objetos tomando  $r$  a la vez es cualquier subconjunto que contenga  $r$  objetos. Por ejemplo, las combinaciones de las letras  $a, b, c, d$  tomando tres a la vez son

$$\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\} \text{ o simplemente } abc, abd, acd, bcd$$

Observe que las siguientes combinaciones son iguales:

$$abc, acb, bac, bca, cab, cba$$

O sea, cada una denota el mismo conjunto  $\{a, b, c\}$ .

El número de combinaciones de  $n$  objetos tomando  $r$  a la vez se denota  $C(n, r)$ . Los símbolos  ${}_nC_r$ ,  $C_{n,r}$  y  $C_r^n$  también se usan en varios textos. Para encontrar la fórmula general para  $C(n, r)$ , observamos que cualquier combinación de  $n$  objetos tomando  $r$  a la vez determina  $r!$  permutaciones de objetos en la combinación. Consecuentemente,

$$P(n, r) = r!C(n, r)$$

y obtenemos

**Teorema 11.7:**

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}$$

Usaremos de ahora en adelante  $C(n, r)$  y  $\binom{n}{r}$  intercambiabilmente.

### EJEMPLO 11.7

- (a) ¿Cuántos comités de tres personas se pueden formar con ocho personas? Cada comité representa una combinación de ocho personas tomando tres a la vez. Así se pueden formar

$$C(8, 3) = \binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$$

diferentes comités

- (b) Un granjero compra tres vacas, dos cerdos y cuatro gallinas de un señor que tiene seis vacas, cinco cerdos y ocho gallinas. ¿Cuántas posibilidades de escoger tiene el granjero?

El granjero puede escoger las vacas de  $C(6, 3)$  maneras, los cerdos de  $C(5, 2)$  maneras, y las gallinas de  $C(8, 4)$  maneras. Así en total puede escoger los animales de

$$\binom{6}{3} \binom{5}{2} \binom{8}{4} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 20 \cdot 10 \cdot 70 = 14\,000 \text{ maneras.}$$

## 11.7 DIAGRAMAS DE ARBOL

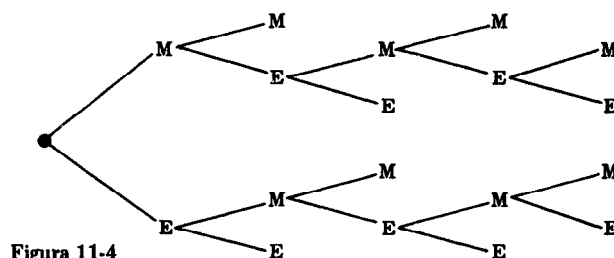
Un diagrama de árbol (con raíz) ayuda en el uso del principio fundamental de conteo exhibiendo todos los resultados posibles de una sucesión de eventos en donde cada evento puede ocurrir de un número finito de maneras. Ilustramos este recurso con un ejemplo. (Se discuten los diagramas de árbol en sí en el cap. 14.)

**EJEMPLO 11.8** Marcos y Ernesto van a jugar en un torneo de tenis. La primera persona en ganar dos encuentros seguidos o en ganar un total de tres encuentros gana el torneo.

La figura 11-4 da un diagrama de árbol que muestra cómo puede resultar el torneo. El árbol está construido de izquierda a derecha. En cada punto (juego) que no sea un punto final, se originan dos ramas, que corresponden a los dos posibles resultados de ese juego, o sea que gane Marcos o que gane Ernesto. Observe que hay 10 puntos finales, que corresponden a las 10 posibles maneras como puede desarrollarse el torneo:

MM, MEMM, MEMEM, MEMEE, MEE, EMM, EMMEM, EMEME, EMEE, EE

La trayectoria del comienzo del árbol a un punto final en particular describe quién ganó cada juego en esa trayectoria en particular.



## Problemas resueltos

### FACTORIALES, COEFICIENTES BINOMIALES

11.1 Compute  $4!$ ,  $5!$ ,  $6!$ ,  $7!$ , y  $8!$ .

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

$$7! = 7 \cdot 6! = 7 \cdot 720 = 5040$$

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 5 \cdot 4! = 5 \cdot 24 = 120$$

$$8! = 8 \cdot 7! = 8 \cdot 5040 = 40\,320$$

$$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 6 \cdot 5! = 6 \cdot 120 = 720$$

11.2 Compute: (a)  $\frac{13!}{11!}$  (b)  $\frac{7!}{10!}$

$$(a) \frac{13!}{11!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 13 \cdot 12 = 156$$

$$\circ \frac{13!}{11!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11!}{11!} = 13 \cdot 12 = 156$$

$$(b) \frac{7!}{10!} = \frac{7!}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!} = \frac{1}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{1}{720}$$

11.3 Escriba en términos de factoriales: (a)  $27 \cdot 26$  (b)  $\frac{1}{14 \cdot 13 \cdot 12}$

$$(a) 27 \cdot 26 = \frac{27 \cdot 26 \cdot 25!}{25!} = \frac{27!}{25!}$$

$$(b) \frac{1}{14 \cdot 13 \cdot 12} = \frac{11!}{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11!} = \frac{11!}{14!}$$

11.4 Simplifique: (a)  $\frac{n!}{(n-1)!}$  (b)  $\frac{(n+2)!}{n!}$

$$(a) \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1} = n \quad \text{o simplemente} \quad \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$$

$$(b) \frac{(n+2)!}{n!} = \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1} = (n+2)(n+1) = n^2 + 3n + 2$$

o simplemente

$$\frac{(n+2)!}{n!} = \frac{(n+2)(n+1) \cdot n!}{n!} = (n+2)(n+1) = n^2 + 3n + 2$$

11.5 Compute: (a)  $\binom{16}{3}$  (b)  $\binom{12}{4}$

Recuerde que hay tantos factores en el numerador como en el denominador.

$$(a) \binom{16}{3} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 560 \quad (c) \binom{15}{5} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 3003$$

$$(b) \binom{12}{4} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 495$$

11.6 Compute: (a)  $\binom{8}{5}$  (b)  $\binom{9}{7}$

$$(a) \quad \binom{8}{5} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 56$$

Observe que  $8 - 5 = 3$ ; así también podríamos computar  $\binom{8}{5}$  como sigue:

$$\binom{8}{5} = \binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$$

(b) Ahora  $9 - 7 = 2$ ; así

$$\binom{9}{7} = \binom{9}{2} = \frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 36$$

11.7 Demuestre:

$$\binom{17}{6} = \binom{16}{5} + \binom{16}{6}$$

Ahora

$$\binom{16}{5} + \binom{16}{6} = \frac{16!}{5!11!} + \frac{16!}{6!10!}$$

Multiplique la primera fracción por  $6/6$  y la segunda por  $11/11$  para obtener el mismo denominador en ambas fracciones; y luego sume:

$$\begin{aligned} \binom{16}{5} + \binom{16}{6} &= \frac{6 \cdot 16!}{6 \cdot 5! \cdot 11!} + \frac{11 \cdot 16!}{6! \cdot 11 \cdot 10!} = \frac{6 \cdot 16!}{6! \cdot 11!} + \frac{11 \cdot 16!}{6! \cdot 11!} \\ &= \frac{6 \cdot 16! + 11 \cdot 16!}{6! \cdot 11!} = \frac{(6+11) \cdot 16!}{6! \cdot 11!} = \frac{17 \cdot 16!}{6! \cdot 11!} = \frac{17!}{6! \cdot 11!} = \binom{17}{6} \end{aligned}$$

11.8 Demuestre el teorema 11.1:  $\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$

La técnica en esta demostración es similar a la del problema 11.7. Tenemos:

$$\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \frac{n!}{(r-1)! \cdot (n-r+1)!} + \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$$

Para obtener el mismo denominador en ambas fracciones, multiplique la primera fracción por  $r/r$  y la segunda por

$$\frac{n-r+1}{n-r+1}$$

Así

$$\begin{aligned} \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} &= \frac{r \cdot n!}{r \cdot (r-1)! \cdot (n-r+1)!} + \frac{(n-r+1) \cdot n!}{r! \cdot (n-r+1) \cdot (n-r)!} \\ &= \frac{r \cdot n!}{r! (n-r+1)!} + \frac{(n-r+1) \cdot n!}{r! (n-r+1)!} \\ &= \frac{r \cdot n! + (n-r+1) \cdot n!}{r! (n-r+1)!} \\ &= \frac{[r + (n-r+1)] \cdot n!}{r! (n-r+1)!} \\ &= \frac{(n+1)n!}{r! (n-r+1)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{r! (n-r+1)!} \\ &= \binom{n+1}{r} \end{aligned}$$

# PERMUTACIONES, PARTICIONES

11.9 Hay cuatro líneas de buses entre  $A$  y  $B$ ; y tres líneas de buses entre  $B$  y  $C$ . ¿De cuántas maneras puede una persona viajar (a) de  $A$  a  $C$  pasando por  $B$ ? (b) en viaje redondo de  $A$  a  $C$  pasando por  $B$ ? (c) en viaje redondo de  $A$  a  $C$  pasando por  $B$ , sin usar ninguna línea de bus más de una vez?

- (a) Hay cuatro maneras para ir de  $A$  a  $B$  y tres maneras para ir de  $B$  a  $C$ ; así hay  $4 \cdot 3 = 12$  maneras para ir de  $A$  a  $C$  pasando por  $B$ .
- (b) Hay doce maneras para ir de  $A$  a  $C$  pasando por  $B$ , y 12 maneras para regresar. Así hay  $12 \cdot 12 = 144$  maneras para efectuar el viaje en redondo.
- (c) La persona viajará de  $A$  a  $B$  a  $C$  a  $B$  a  $A$ . Conecte estas letras con flechas como sigue:

$$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$$

La persona puede viajar de cuatro maneras de  $A$  a  $B$  y de tres maneras de  $B$  a  $C$ ; esto deja disponibles dos maneras para ir de  $C$  a  $B$  y tres maneras de  $B$  a  $A$ . Coloque estos números sobre las flechas respectivas como sigue:

$$A \xrightarrow{4} B \xrightarrow{3} C \xrightarrow{2} B \xrightarrow{3} A$$

Así hay  $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 72$  maneras para hacer el viaje redondo sin usar ninguna línea de bus más de una vez.

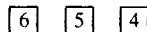
11.10 Supongamos que no se permiten repeticiones. (a) ¿Cuántos números de tres dígitos se pueden formar con los seis dígitos 2, 3, 5, 6, 7 y 9? (b) ¿Cuántos de estos números son menores de 400? (c) ¿Cuántos son pares? (d) ¿Cuántos son impares? (e) ¿Cuántos son múltiplos de 5?

Para cada caso dibuje tres casillas



Para representar un número arbitrario, y luego escriba en cada casilla el número de dígitos que se pueden colocar allí.

- (a) La casilla de la izquierda se puede llenar de seis maneras; en seguida, la casilla del medio se puede llenar de cinco maneras; y, por último, la casilla de la derecha se puede llenar de cuatro maneras:



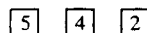
Así hay  $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$  números.

- (b) La casilla de la izquierda se puede llenar solamente de dos maneras, con 2 y con 3, ya que cada número debe ser menor de 400; la casilla del medio se puede llenar de cinco maneras; y, por último, la casilla de la derecha se puede llenar de cuatro maneras:



Así hay  $2 \cdot 5 \cdot 4 = 40$  números.

- (c) La casilla de la derecha se puede llenar solamente de dos maneras, con 2 y con 6, ya que los números deben ser pares; la casilla de la izquierda se puede llenar entonces de cinco maneras; y, finalmente, la casilla del medio se puede llenar de cuatro maneras:



Así, hay  $5 \cdot 4 \cdot 2 = 40$  números.

- (d) La casilla de la derecha se puede llenar de cuatro maneras, con 3, 5, 7 ó 9, ya que los números deben ser impares; la casilla de la izquierda se puede llenar de cinco maneras; y, finalmente, la casilla del medio se puede llenar de cuatro maneras:



$\boxed{5} \quad \boxed{4} \quad \boxed{4}$

Así hay  $5 \cdot 4 \cdot 4 = 80$  números. (Alternativamente, de (a) y de (c),  $120 - 40 = 80$ .)

- (e) La casilla de la derecha solamente se puede llenar de una manera, con 5, ya que los números deben ser múltiplos de 5; la casilla de la izquierda se puede llenar de cinco maneras; y, por último, la casilla del medio se puede llenar de cuatro maneras:

$\boxed{5} \quad \boxed{4} \quad \boxed{1}$

Así hay  $5 \cdot 4 \cdot 1 = 20$  números.

- 11.11 Encuentre el número de permutaciones diferentes que se pueden formar con las letras de cada palabra: (a) GATO, (b) CASA, (c) RADAR, (d) ELEVEIS, (e) EMINENTEMENTE.

- (a)  $4! = 24$ , ya que hay cuatro letras y no hay repeticiones.  
 (b)  $4!/2! = 12$ , ya que hay cuatro letras de las cuales dos son A.  
 (c)  $5!/2!2! = 30$ , ya que hay cinco letras de las cuales dos son R y dos son A.  
 (d)  $7!/3! = 840$ , ya que hay siete letras de las cuales tres son E.  
 (e) 
$$\frac{12!}{5!3!2!2!} = 9\,979\,200$$

ya que hay trece letras de las cuales cinco son E, tres son N, dos son M y dos son T.

- 11.12 ¿De cuántas maneras se pueden colocar en un estante cuatro libros de matemáticas, tres libros de historia, tres libros de química y dos de sociología de tal manera que los libros de la misma materia queden juntos?

Primero los libros deben arreglarse en el estante en cuatro grupos de acuerdo con materias:

$\square \quad \square \quad \square \quad \square$

La casilla de la izquierda se puede llenar con cualquiera de las cuatro materias; la siguiente con cualquiera de las tres materias restantes; la siguiente con cualquiera de las dos materias restantes; y la casilla de la derecha con la última materia:

$\boxed{4} \quad \boxed{3} \quad \boxed{2} \quad \boxed{1}$

Así hay  $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$  maneras de arreglar los libros en el estante de acuerdo con materias.

En cada uno de los casos anteriores, los libros de matemáticas se pueden arreglar de  $4!$  maneras, los de historia de  $3!$  maneras, los de química de  $3!$  maneras, y los de sociología de  $2!$  maneras. Así, en total, hay  $4!4!3!3!2! = 41\,472$  arreglos.

- 11.13 ¿De cuántas maneras puede un grupo de siete personas ordenarse (a) en una fila de siete sillas? (b) alrededor de una mesa redonda?

- (a) Las siete personas se pueden ordenar en una fila de  $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7!$  maneras.  
 (b) Una persona puede sentarse en cualquier puesto alrededor de la mesa redonda. Las otras seis personas pueden colocarse de  $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6!$  maneras alrededor de la mesa. Este es un ejemplo de una permutación circular. En general,  $n$  objetos se pueden arreglar en un círculo de  $(n - 1)!$  maneras.

- 11.14 Encuentre  $n$  si (a)  $P(n, 2) = 72$ , (b)  $P(n, 4) = 42P(n, 2)$ , (c)  $2P(n, 2) + 50 = P(2n, 2)$ .

- (a)  $P(n, 2) = n(n - 1) = n^2 - n$ ; Así  $n^2 - n = 72$  o  $n^2 - n - 72 = 0$  o  $(n - 9)(n + 8) = 0$ .

Como  $n$  debe ser positivo, la única respuesta es  $n = 9$ .

- (b)  $P(n, 4) = n(n - 1)(n - 2)(n - 3)$  y  $P(n, 2) = n(n - 1)$ . Así

$$n(n - 1)(n - 2)(n - 3) = 42n(n - 1)$$



o, si  $n \neq 0$ ,  $n \neq 1$ ,

$$(n-2)(n-3) = 42 \quad \text{o} \quad n^2 - 5n + 6 = 42 \quad \text{o} \quad n^2 - 5n - 36 = 0 \quad \text{o} \quad (n-9)(n+4) = 0$$

Como  $n$  debe ser positivo, la única respuesta es  $n = 9$ .

$$(c) \quad P(n, 2) = n(n-1) = n^2 - n \quad \text{y} \quad P(2n, 2) = 2n(2n-1) = 4n^2 - 2n. \quad \text{Así}$$

$$2(n^2 - n) + 50 = 4n^2 - 2n \quad \text{o} \quad 2n^2 - 2n + 50 = 4n^2 - 2n \quad \text{o} \quad 50 = 2n^2 \quad \text{o} \quad n^2 = 25$$

Como  $n$  debe ser positivo, la única respuesta es  $n = 5$ .

**11.15** Hay doce estudiantes en una clase. ¿De cuántas maneras pueden los doce estudiantes presentar tres exámenes diferentes si cuatro estudiantes deben tomar cada examen?

Buscamos el número de particiones ordenadas de los doce estudiantes en células que contienen cuatro estudiantes cada uno. Por el corolario 11.5, hay

$$\frac{12!}{4!4!4!} = 34\,650$$

tales particiones.

**11.16** ¿De cuántas maneras se pueden particionar doce estudiantes en tres equipos, de tal manera que cada equipo contenga cuatro estudiantes?

Como se definen los equipos solamente por su composición, aquí se trata de particiones no ordenadas. Para tres células de cuatro elementos cada una, el corolario 11.6 da

$$\frac{12!}{(4!)^3} = 5775$$

tales particiones.

**11.17** ¿De cuántas maneras se puede particionar a diez estudiantes en cuatro equipos, de tal manera que dos equipos contengan a dos estudiantes cada uno y dos equipos contengan a tres estudiantes cada uno?

Por el corolario 11.6, hay

$$\frac{10!}{[(2!)^2 2!][(3!)^2 2!]} = 6300$$

tales particiones (no ordenadas).

**11.18** Cuente las particiones (no ordenadas) de un conjunto de  $n$  elementos diferentes.

**Método 1.**

Suma la expresión dada por el corolario 11.6 sobre los valores permitidos para  $i_1, i_2, \dots, i_n$ . Esto llevaría a una fórmula bastante complicada.

**Método 2.**

Aplique el raciocinio combinatorio. Distinga un elemento del conjunto como el elemento verde, y, en cada partición, distinga la célula que contenga el elemento verde como la célula verde. Para encontrar  $\phi(n)$ , el número total de particiones de  $n$  elementos, observamos que si la célula verde contiene solamente el elemento verde, los  $n-1$  elementos restantes pueden ser particionados de  $\phi(n-1)$  maneras; si la célula verde contiene un elemento además del elemento verde, el cual puede ser escogido de  $C(n-1, 1)$  maneras, los restantes  $n-2$  elementos pueden ser particionados de  $\phi(n-2)$  maneras; ... ; si la célula verde contiene  $n-1$  elementos además del elemento verde, el cual puede ser escogido de  $C(n-1, n-1)$  maneras, los restantes 0 elementos pueden ser particionados de  $\phi(0) = 1$  manera. Como estas particiones toman en cuenta todas las particiones posibles, tenemos

$$\phi(n) = \phi(n-1) + \binom{n-1}{1}\phi(n-2) + \binom{n-1}{2}\phi(n-3) + \dots + \binom{n-1}{n-2}\phi(1) + \binom{n-1}{n-1}\phi(0)$$

Comenzando con  $\phi(0) = 1$ , podemos resolver sucesivamente para  $\phi(1)$ ,  $\phi(2)$ ,  $\phi(3)$ , ... (un sistema triangular de ecuaciones lineales). Así,

$$\phi(1) = \phi(0) = 1$$

$$\phi(2) = \phi(1) + \binom{1}{1}\phi(0) = 1 + 1 = 2$$

$$\phi(3) = \phi(2) + \binom{2}{1}\phi(1) + \binom{2}{2}\phi(0) = 2 + 2 \cdot 1 + 1 = 5$$

$$\begin{aligned}\phi(4) &= \phi(3) + \binom{3}{1}\phi(2) + \binom{3}{2}\phi(1) + \binom{3}{3}\phi(0) \\ &= 5 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 = 15\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(5) &= \phi(4) + \binom{4}{1}\phi(3) + \binom{4}{2}\phi(2) + \binom{4}{3}\phi(1) + \binom{4}{4}\phi(0) \\ &= 15 + 4 \cdot 5 + 6 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 1 = 52\end{aligned}$$

.....

**Método 3.**

Véase el problema 11.45.

## COMBINACIONES

**11.19** ¿De cuántas maneras se puede escoger un comité que conste de tres hombres y dos mujeres entre siete hombres y cinco mujeres?

Se pueden escoger a los tres hombres entre los siete de  $C(7, 3)$  maneras, y a las dos mujeres entre las cinco de  $C(5, 2)$  maneras. Así se puede escoger el comité de

$$\binom{7}{3}\binom{5}{2} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 350 \text{ maneras.}$$

**11.20** ¿Cuántos comités de cinco personas con un presidente dado se pueden formar entre doce personas?

Se puede escoger al presidente de doce maneras y, luego, se puede escoger a los otros cuatro del comité entre los once restantes de  $C(11, 4)$  maneras. Así hay

$$12 \cdot \binom{11}{4} = 12 \cdot 330 = 3960$$

tales comités.

**11.21** En un talego hay seis bolas blancas y cinco bolas negras. Encuentre el número de maneras para sacar cuatro bolas del talego si (a) pueden ser de cualquiera de los dos colores, (b) debe haber dos blancas y dos negras, (c) deben ser todas del mismo color.

(a) Las cuatro bolas (de cualquier color) pueden ser escogidas de las once bolas de

$$\binom{11}{4} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 330 \text{ maneras.}$$

(b) Las dos bolas blancas pueden ser escogidas de  $C(6, 2)$  maneras, y las dos bolas negras pueden ser escogidas de  $C(5, 2)$  maneras. Así hay

$$\binom{6}{2}\binom{5}{2} = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 150$$

maneras de sacar dos bolas blancas y dos bolas negras.

(c) Hay  $C(6, 4) = 15$  maneras de sacar cuatro bolas blancas, y  $C(5, 4) = 5$  maneras de sacar cuatro bolas negras. Así hay  $15 + 5 = 20$  maneras de sacar cuatro bolas del mismo color.

- 11.22 Un estudiante tiene que contestar ocho de diez preguntas en un examen. (a) ¿Cuántas maneras de escoger tiene? (b) ¿Cuántas si tiene que contestar las primeras tres preguntas? (c) ¿Cuántas si tiene que contestar por lo menos cuatro de las primeras cinco preguntas?

(a) Las ocho preguntas pueden ser seleccionadas de

$$\binom{10}{8} = \binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45 \text{ maneras.}$$

(b) Si contesta las primeras tres preguntas, entonces podemos escoger las otras cinco preguntas de las últimas siete preguntas de

$$\binom{7}{5} = \binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 21 \text{ maneras.}$$

(c) Si contesta las primeras cinco preguntas, entonces puede escoger las otras tres preguntas de las últimas cinco de

$$\binom{5}{3} = 10 \text{ maneras.}$$

Por otro lado, si contesta solamente cuatro de las primeras cinco preguntas, entonces puede escoger estas cuatro de

$$\binom{5}{4} = \binom{5}{1} = 5 \text{ maneras.}$$

y puede escoger las otras cuatro preguntas de las últimas cinco de

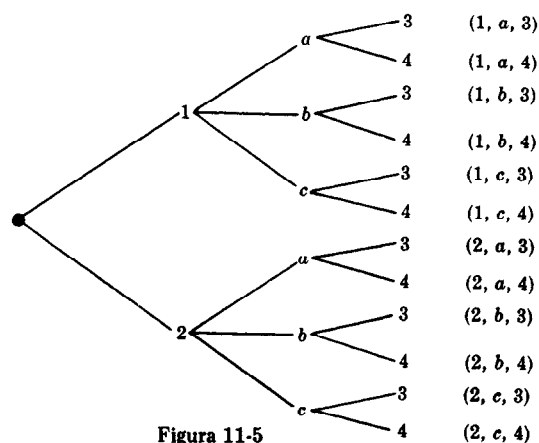
$$\binom{5}{4} = \binom{5}{1} = 5 \text{ maneras.}$$

Así, puede escoger las ocho preguntas de  $5 \cdot 5 = 25$  maneras. Por lo tanto tiene un total de treinta y cinco maneras.

## DIAGRAMAS DE ÁRBOL

- 11.23 Encuentre el conjunto producto  $A \times B \times C$  en donde  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{a, b, c\}$  y  $C = \{3, 4\}$ .

El conjunto producto se obtiene construyendo un diagrama de árbol como se muestra en la fig. 11-5. Observe que el árbol está construido de izquierda a derecha, y que el número de ramas en cada punto corresponde al número de maneras como puede ocurrir el siguiente evento. Los doce elementos de  $A \times B \times C$  aparecen a la derecha del diagrama.



11.24 Encuentre las permutaciones de  $\{a, b, c\}$ .

El corolario 11.3 nos dice que hay  $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$  permutaciones; se puede usar un diagrama de árbol para representarlas. Esto se hace en la fig. 11-6, en donde las seis permutaciones aparecen a la derecha del diagrama.

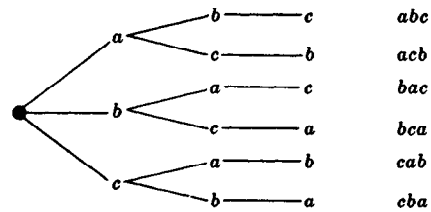


Figura 11-6

## 11.25 En un campeonato de baloncesto juegan los equipos A y B. El equipo que primero gane tres juegos gana el campeonato. Encuentre las maneras posibles como se puede desarrollar el campeonato.

Construya el diagrama de árbol adecuado, como se muestra en la fig. 11-7. Hay veinte posibilidades:

AAA, AABA, AABBA, AABBB, ABAA, ABABA, ABABB, ABBAA, ABBAB, ABBB  
BAAA, BAABA, BAABB, BABAA, BABAB, BABB, BBAAA, BBAAB, BBAB, BBB

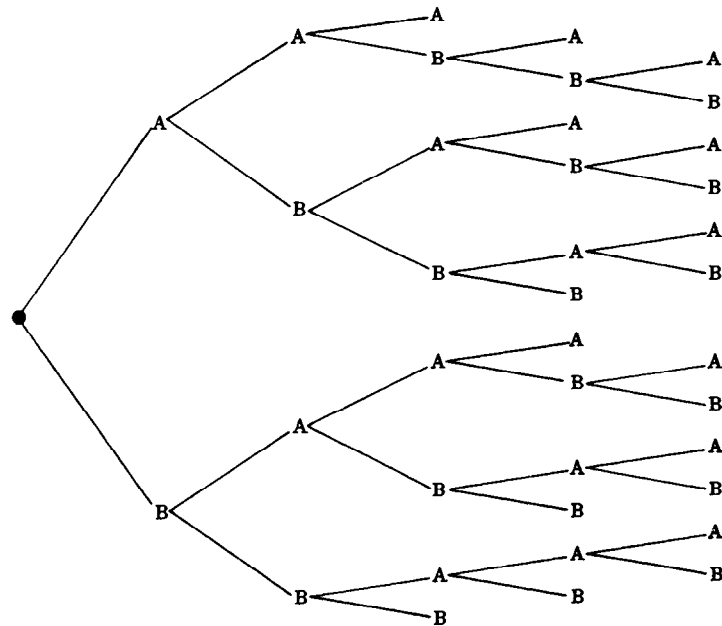


Figura 11-7

## Problemas suplementarios

### FACTORIALES, COEFICIENTES BINOMIALES

11.26 Evalúe: (a)  $9!$ , (b)  $10!$ , (c)  $11!$

11.27 Evalúe: (a)  $16!/14!$ , (b)  $14!/11!$ , (c)  $8!/10!$ , (d)  $10!/13!$

11.28 Escriba en términos de factoriales: (a)  $24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21$ , (b)  $1/(10 \cdot 11 \cdot 12)$

11.29 Simplifique: (a)  $\frac{(n+1)!}{n!}$  (b)  $\frac{n!}{(n-2)!}$  (c)  $\frac{(n-1)!}{(n+2)!}$  (d)  $\frac{(n-r+1)!}{(n-r-1)!}$

11.30 Evalúe: (a)  $\binom{5}{2}$  (b)  $\binom{7}{3}$  (c)  $\binom{14}{2}$  (d)  $\binom{6}{4}$  (e)  $\binom{20}{17}$  (f)  $\binom{18}{15}$

11.31 La octava fila del triángulo de Pascal es como sigue:

1   8   28   56   70   56   28   8   1

Calcule las filas novena y décima del triángulo.

### PERMUTACIONES, PARTICIONES

11.32 (a) ¿Cuántas placas de automóviles se pueden hacer si cada placa contiene dos letras diferentes seguidas de tres dígitos diferentes? (b) Resuelva el problema si el primer dígito no puede ser 0.

11.33 Hay cinco caminos entre  $A$  y  $B$  y cuatro entre  $B$  y  $C$ .

(a) ¿De cuántas maneras se puede viajar de  $A$  a  $C$  pasando por  $B$ ?

(b) ¿De cuántas maneras se puede hacer un viaje en redondo de  $A$  a  $C$  pasando por  $B$ ?

(c) ¿De cuántas maneras se puede hacer un viaje redondo de  $A$  a  $C$  sin usar el mismo camino más de una vez?

11.34 Encuentre el número de maneras como seis personas pueden montar en un tobogán si una de las tres debe conducirlo.

11.35 (a) Encuentre el número de maneras como cinco personas pueden sentarse en una fila. (b) ¿Cuántas maneras hay si dos personas insisten en sentarse la una al pie de la otra?

11.36 Encuentre el número de maneras como un juez puede conceder un primer, segundo y tercer premio si hay diez personas compitiendo.

11.37 Encuentre el número de permutaciones que se pueden formar con todas las letras de cada palabra?

(a) PORRO (b) CARBURAR (c) PROPOSICION (d) BASEBALL

11.38 Considere todos los enteros positivos con tres dígitos diferentes. (Observe que 0 no puede ser el primer dígito.) (a) ¿Cuántos son mayores que 700? (b) ¿Cuántos son impares? (c) ¿Cuántos son pares? (d) ¿Cuántos son divisibles por 5?

11.39 (a) Encuentre el número de permutaciones que se pueden formar con las letras de la palabra MOROSO.

(b) ¿Cuántas de éstas comienzan y terminan con una O?

(c) ¿Cuántas de éstas tienen las tres Os juntas?

(d) ¿Cuántas de éstas comienzan con una O y terminan con R?

- 11.40 ¿De cuántas maneras se pueden dividir nueve juguetes entre tres niños, dándoles a todos igual número de juguetes?
- 11.41 ¿De cuántas maneras podemos hacer tres equipos del mismo tamaño entre nueve estudiantes?
- 11.42 ¿De cuántas maneras podemos hacer tres equipos, uno con cuatro y los otros de a tres, entre diez estudiantes?
- 11.43 ¿De cuántas maneras se puede particionar un club de doce miembros en tres comités con 5, 4 y 3 miembros respectivamente?
- 11.44 (a) Suponiendo que una célula puede ser vacía, ¿de cuántas maneras se puede particionar un conjunto con tres elementos en (i) tres células ordenadas, (ii) tres células no ordenadas? (b) ¿De cuántas maneras se puede particionar un conjunto con cuatro elementos en (i) tres células ordenadas, (ii) tres células no ordenadas?
- 11.45 Denote por  $f(n, k)$  el número de particiones no ordenadas de  $n$  elementos diferentes en  $k$  células no vacías, en donde  $k \leq n$ .
- (a) Establezca la relación

$$f(n, k) = f(n-1, k-1) + kf(n-1, k)$$

y resuélvala en forma similar al triángulo de Pascal.

- (b) Refiriéndonos al problema 11.18 demuestre que

$$\phi(n) = \sum_{k=1}^n f(n, k)$$

o sea, la suma de la fila  $n$  del arreglo triangular en (a) es  $\phi(n)$ .

## COMBINACIONES

- 11.46 Una clase tiene nueve niños y tres niñas. (a) ¿De cuántas maneras puede un profesor escoger un comité de cuatro? (b) ¿Cuántos comités tendrán por lo menos una niña? (c) ¿Cuántos comités tendrán exactamente una niña?
- 11.47 Una señora tiene once amistades íntimas. (a) ¿De cuántas maneras puede invitar a cinco de ellas a comer? (b) ¿De cuántas maneras si dos de las amistades están casadas y no asistirán separadamente? (c) ¿De cuántas maneras si dos de ellas no se están hablando entre sí y no asistirán juntas?
- 11.48 Hay diez puntos  $A, B, \dots$  en un plano, ninguno de los tres en una misma recta. (a) ¿Cuántas rectas determinan estos puntos? (b) ¿Cuántas de estas no pasan a través de  $A$  o de  $B$ ? (c) ¿Cuántos triángulos determinan estos puntos? (d) ¿Cuántos de estos triángulos tienen el vértice  $A$ ? (e) ¿Cuántos de estos triángulos contienen al lado  $AB$ ?
- 11.49 Un estudiante tiene que contestar diez de las trece preguntas de un examen. (a) ¿Cuántas maneras de escoger tiene el estudiante? (b) ¿Cuántas si tiene que contestar las primeras dos preguntas? (c) ¿Cuántas si tienen que contestar la primera y la segunda pregunta pero no ambas? (d) ¿Cuántas si tiene que contestar exactamente tres de las primeras cinco preguntas? (e) ¿Cuántas si tiene que contestar por lo menos tres de las primeras cinco preguntas?
- 11.50 El alfabeto inglés tiene veintiséis letras de las cuales cinco son vocales. Considere solamente las “palabras” formadas por cinco letras incluyendo tres consonantes diferentes y dos vocales diferentes. ¿Cuántas de estas palabras (a) se pueden formar? (b) contienen la letra  $B$ ? (c) contienen las letras  $B$  y  $C$ ? (d) comienzan con  $B$  y contienen la letra  $C$ ? (e) comienzan con  $B$  y terminan con  $C$ ? (f) contienen las letras  $A$  y  $B$ ? (g) comienzan con  $A$  y contienen a  $B$ ? (h) comienzan con  $B$  y contienen a  $A$ ? (i) comienzan con  $A$  y terminan con  $B$ ? (j) contienen las letras  $A, B$  y  $C$ ?

## DIAGRAMAS DE ÁRBOL

- 11.51 Encuentre el conjunto producto  $\{1, 2\} \times \{a, b, c\} \times \{3, 4\}$  construyendo el diagrama de árbol apropiado.
- 11.52 Los equipos  $A$  y  $B$  juegan en la serie mundial de baseball, en donde el equipo que primero gane cuatro juegos gana la serie. Suponiendo que  $A$  gana el primer juego y el equipo que gana el segundo juego también gana el cuarto juego, ¿de cuántas maneras se puede jugar la serie?
- 11.53 Un hombre tiene tiempo para jugar ruleta cinco veces. Gana o pierde un dólar en cada juego. El hombre comienza con dos dólares y parará de jugar antes de los cinco juegos si pierde todo su dinero o gana tres dólares (o sea, si termina con cinco dólares). Encuentre el número de maneras como pueden ocurrir los juegos.
- 11.54 Los equipos  $A$  y  $B$  juegan en un torneo de baloncesto. El primer equipo que gane dos juegos seguidos o un total de cuatro juegos gana el torneo. Encuentre el número de maneras como se puede desarrollar el torneo.

## Respuestas a los problemas suplementarios

11.26 (a) 362 880, (b) 3 628 800, (c) 39 916 800

11.27 (a) 240, (b) 2184, (c)  $1/90$ , (d)  $1/1716$

11.28 (a)  $24!/20!$ , (b)  $9!/12!$

11.29 (a)  $n + 1$ , (b)  $n(n - 1) = n^2 - n$ , (c)  $1/[n(n + 1)(n + 2)]$ , (d)  $(n - r)(n - r + 1)$

11.30 (a) 10, (b) 35, (c) 91, (d) 15, (e) 1140, (f) 816

11.31

	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

11.32 (a)  $26 \cdot 25 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 468\,000$ , (b)  $26 \cdot 25 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 8 = 421\,200$

11.33 (a) 24, (b) 576, (c) 360

11.34 360

11.35 (a) 120, (b) 48

11.36 720

11.37 (a) 30, (b)  $\frac{8!}{3!2!} = 3\,360$ , (c)  $\frac{11!}{2!3!2!} = 1\,663\,200$ , (d)  $\frac{8!}{2!2!2!} = 5040$

11.38 (a) 216, (b) 320, (c) 328, (d) 136

11.39 (a) 120, (b) 24, (c) 24, (d) 12

11.40  $\frac{9!}{3!3!3!} = 1680$

$$11.41 \quad \frac{9!}{(3!)^3 3!} = 280$$

$$11.42 \quad \frac{10!}{[(3!)^2 2!][(4!)^1 1!]} = 2100$$

$$11.43 \quad \frac{12!}{5! 4! 3!} = 27\,720$$

- 11.44 (a) (i)  $3^3 = 27$  (Cada elemento se puede colocar en cualquiera de las tres células.)  
 (ii) Los números de elementos en las tres células pueden distribuirse como sigue:

$$(a) \{ \{3\}, \{0\}, \{0\} \}, \quad (b) \{ \{2\}, \{1\}, \{0\} \}, \quad (c) \{ \{1\}, \{1\}, \{1\} \}$$

Así el número de particiones es  $1 + 3 + 1 = 5$ .

(b) (i)  $3^4 = 81$ .

- (ii) El número de elementos en las tres células se puede distribuir como sigue:

$$(a) \{ \{4\}, \{0\}, \{0\} \}, \quad (b) \{ \{3\}, \{1\}, \{0\} \}, \quad (c) \{ \{2\}, \{2\}, \{0\} \}, \quad (d) \{ \{2\}, \{1\}, \{1\} \}$$

Así el número de particiones es  $1 + 4 + 3 + 6 = 14$ .

11.45

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & & 1 & & 1 \\ & & & 1 & 3 & 1 & \\ & & 1 & 7 & 6 & 1 & \\ 1 & 15 & 25 & 10 & 1 & & \\ & & & & & & \dots \end{array}$$

11.46 (a) 495, (b) 369, (c) 252

11.47 (a) 462, (b) 210, (c) 378

11.48 (a) 45, (b) 28, (c) 120, (d) 36, (e) 8

11.49 (a) 286, (b) 165, (c) 110, (d) 80, (e) 276

11.50 (a)  $\binom{21}{3} \binom{5}{2} \cdot 5! = 1\,596\,000$       (e)  $19 \cdot \binom{5}{2} \cdot 3! = 1140$       (i)  $4 \cdot \binom{20}{2} \cdot 3! = 4456$   
 (b)  $\binom{20}{2} \binom{5}{2} \cdot 5! = 228\,000$       (f)  $4 \cdot \binom{20}{2} \cdot 5! = 91\,200$       (j)  $4 \cdot 19 \cdot 5! = 9120$   
 (c)  $19 \cdot \binom{5}{2} \cdot 5! = 22\,800$       (g)  $4 \cdot \binom{20}{2} \cdot 4! = 18\,240$   
 (d)  $19 \cdot \binom{5}{2} \cdot 4! = 4560$       (h) 18 240 [lo mismo que en (g)]

11.52 15

11.53 20

11.54 14



## Probabilidad

### 12.1 INTRODUCCION

La probabilidad es el estudio de experimentos aleatorios o no determinísticos. Si se lanza un dado al aire, entonces es seguro que el dado caerá, pero no es seguro que, digamos, salga un 6. Sin embargo, supongamos que repetimos este experimento de lanzar un dado; sea  $s$  el número de éxitos, es decir el número de veces que aparece un 6, y sea  $n$  el número de veces que se lanza el dado. Se ha observado empíricamente que la razón  $f = s/n$ , llamada *frecuencia relativa* de éxitos, se estabiliza a la larga, o sea, se acerca a un límite. Esta estabilidad es la base de la teoría de la probabilidad.

En la teoría de la probabilidad, definimos un modelo matemático de los fenómenos antes mencionados asignando “probabilidades” (o; los valores límites de las frecuencias relativas) a todos los resultados posibles de un experimento. Además, como la frecuencia relativa de cada resultado es no negativa y la suma de las frecuencias relativas de todos los resultados posibles es la unidad, requerimos que nuestras “probabilidades” asignadas también posean estas dos propiedades. La confiabilidad de nuestro modelo matemático para un experimento dado depende de la cercanía de las probabilidades asignadas a las frecuencias relativas límites reales. Esto hace surgir los problemas de verificación y confiabilidad que forman el tema de la estadística.

### 12.2 ESPACIO MUESTRAL Y EVENTOS

El conjunto  $S$  de todos los resultados posibles de un experimento dado se llama *espacio muestral*. Un resultado en particular, es decir un elemento de  $S$ , se llama *punto de muestreo* o *muestral*. Un *evento*  $A$  es un conjunto de resultados o, en otras palabras, un subconjunto del espacio muestral  $S$ . En particular, el conjunto  $\{a\}$  que consta de una sola muestra  $a \in S$  es un evento, y se llama *evento elemental*. Aún más, el conjunto vacío  $\phi$  y  $S$  en sí son subconjuntos de  $S$  y, por lo tanto, son eventos;  $\phi$  a veces recibe el nombre de *evento imposible*.

Como un evento es un conjunto, podemos combinar eventos para formar nuevos eventos usando las varias operaciones entre conjuntos:

- (1)  $A \cup B$  es el evento que ocurre siempre y cuando ocurra o  $A$  o  $B$  (o ambos).
- (2)  $A \cap B$  es el evento que ocurre siempre y cuando ocurran tanto  $A$  como  $B$ .
- (3)  $A^c$ , el complemento de  $A$ , también escrito  $\bar{A}$ , es el evento que ocurre siempre y cuando no ocurra  $A$ .

Dos eventos  $A$  y  $B$  se llaman *mutuamente excluyentes* si son disyuntos, o sea,  $A \cap B = \phi$ . En otras palabras,  $A$  y  $B$  son mutuamente excluyentes si y sólo si no ocurren simultáneamente.

#### EJEMPLO 12.1

- (a) Experimento: Lance un dado y observe el número que resulta. El espacio muestral consiste entonces en los seis números posibles:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Sea  $A$  el evento de que salga un número par,  $B$  de que salga un impar y  $C$  de que salga un primo:

$$A = \{2, 4, 6\}, \quad B = \{1, 3, 5\}, \quad C = \{2, 3, 5\}$$



Entonces:

$A \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6\}$  es el evento de que salga un número par o un primo;

$B \cap C = \{3, 5\}$  es el evento de que salga un primo impar;

$C^c = \{1, 4, 6\}$  es el evento de que no salga un primo.

Observe que  $A$  y  $B$  son mutuamente excluyentes:  $A \cap B = \phi$ ; en otras palabras, no pueden salir simultáneamente un número par y uno impar.

- (b) Experimento: Lance una moneda 3 veces y observe la sucesión de caras (C) y sellos (S) que resulta. El espacio muestral  $S$  consta de ocho elementos:

$$S = \{CCC, CCS, CSC, CSS, SCC, SCS, SSC, SSS\}.$$

Sea  $A$  el evento de que salgan dos o más caras consecutivamente,  $B$  de que todos los lanzamientos tengan el mismo resultado:

$$A = \{CCC, CCS, SCC\} \quad \text{y} \quad B = \{CCC, SSS\}$$

Entonces  $A \cap B = \{CCC\}$  es el evento elemental en el que solamente salen caras. El evento de que salgan 5 caras es el conjunto vacío  $\phi$ .

Los espacios muestrales del ejemplo 12.1 son finitos. También existen espacios muestrales infinitos; sin embargo, la teoría de tales espacios se sale del alcance de este libro. Así, a no ser que se diga otra cosa, todos nuestros espacios muestrales  $S$  serán finitos.

### 12.3 ESPACIOS FINITOS DE PROBABILIDAD

Sea  $S$  un espacio muestral finito:  $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ . Un espacio de probabilidad finito se obtiene asignando a cada punto muestral  $a_i \in S$  un número real  $P_i$ , llamado la probabilidad de  $a_i$ , y que satisface las siguientes condiciones:

(1) Cada  $P_i$  es no negativo,  $P_i \geq 0$ .

(2) La suma de los  $P_i$  es uno,  $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ .

La probabilidad de cualquier evento  $A$ , escrito  $P(A)$ , se define entonces como la suma de las probabilidades de las muestras en  $A$ . Por conveniencias de notación escribimos  $P(a_i)$  en lugar de  $P(\{a_i\})$ .

**EJEMPLO 12.2** Tres caballos,  $A$ ,  $B$ , y  $C$ , están en una carrera; las posibilidades de que  $A$  gane son el doble de las de  $B$ , y las de éste, el doble de las de  $C$ . Queremos encontrar las respectivas probabilidades de ganar, que notaremos  $P(A)$ ,  $P(B)$ , y  $P(C)$ . También queremos encontrar la probabilidad de que gane  $P$  o  $C$ , o sea,  $P(\{B, C\})$ .

Sea  $P(C) = p$ ; como es el doble de probable de que gane  $B$  a de que gane  $C$ ,  $P(B) = 2p$ ; y como es el doble de posible de que gane  $A$  a de que gane  $B$ ,  $P(A) = 2P(B) = 2(2p) = 4p$ . Ahora la suma de las probabilidades debe ser 1; por lo tanto

$$p + 2p + 4p = 1 \quad \text{o} \quad 7p = 1 \quad \text{o} \quad p = \frac{1}{7}$$

De esta manera,

$$P(A) = 4p = \frac{4}{7}, \quad P(B) = 2p = \frac{2}{7}, \quad P(C) = p = \frac{1}{7}$$

También,  $P(\{B, C\}) = P(B) + P(C) = \frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$ .

#### Espacios equiprobables

Frecuentemente las características físicas de un experimento sugieren que a los varios resultados se les asignen probabilidades iguales. A tal espacio de probabilidad finita  $S$ , en donde cada punto muestral tiene la misma probabilidad, se le llamará *espacio equiprobable*. En

particular, si  $S$  tiene  $n$  puntos, entonces la probabilidad de cada punto es  $1/n$ . Aún más, si un evento  $A$  tiene  $r$  puntos, entonces su probabilidad es

$$r \cdot \frac{1}{n} = \frac{r}{n}$$

En otras palabras,

$$P(A) = \frac{\text{Número de elementos de } A}{\text{Número de elementos de } S}$$

$$P(A) = \frac{\text{número de maneras como puede ocurrir el evento } A}{\text{número de maneras como puede ocurrir el espacio muestral } S}$$

Hagamos hincapié en que la fórmula anterior para  $P(A)$  se cumple sólo para espacios equiprobables.

Las expresiones “aleatoriamente” o “al azar” se usarán solamente con respecto a un espacio equiprobable; o sea, la instrucción “Escoja aleatoriamente un elemento de un conjunto  $S$ ” significará que  $S$ , como espacio muestral de resultados de la escogencia, es un espacio equiprobable.

**EJEMPLO 12.3** Seleccionemos aleatoriamente una carta de una baraja de póker de 52 naipes. Sea

$$A = \{\text{la carta es una pica}\}$$

y

$$B = \{\text{la carta es una figura, o sea, una J, una Q o una K}\}$$

Calculamos  $P(A)$ ,  $P(B)$  y  $P(A \cap B)$ . Como tenemos un espacio equiprobable,

$$P(A) = \frac{\text{número de picas}}{\text{número de cartas}} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} \quad P(B) = \frac{\text{número de figuras}}{\text{número de cartas}} = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$$

$$P(A \cap B) = \frac{\text{número de picas con figuras}}{\text{número de cartas}} = \frac{3}{52}$$

## 12.4 TEOREMAS DE ESPACIOS FINITOS DE PROBABILIDAD

Los espacios finitos de probabilidad también se pueden definir por medio de los tres axiomas siguientes, los cuales aseguran que la probabilidad de un evento es la suma de las probabilidades de los eventos elementales que lo componen. O sea, un espacio finito de probabilidad consiste de un conjunto finito  $S$ , junto con una función de valor real  $P(\cdot)$ , definida en la clase de todos los eventos (subconjuntos) de  $S$ , que satisfagan las siguientes propiedades:

[P<sub>1</sub>] Para cada evento  $A$ ,  $P(A) \geq 0$ .

[P<sub>2</sub>]  $P(S) = 1$ .

[P<sub>3</sub>] Si los eventos  $A$  y  $B$  son mutuamente excluyentes, entonces  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .

De estos axiomas se puede probar

**Teorema 12.1:** Si  $\phi$  es el conjunto vacío, y  $A$  y  $B$  son eventos arbitrarios, entonces:

- (i)  $P(\emptyset) = 0$ ;
- (ii)  $P(A^c) = 1 - P(A)$ ;
- (iii)  $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$ , i.e.  $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$ ;
- (iv)  $A \subset B$  implica  $P(A) \leq P(B)$ .
- (v)  $P(A) \leq 1$

La *ventaja* de que un evento con probabilidad  $p$  ocurra se define como la razón  $p : q$ , en donde  $q$  es la probabilidad de que no ocurra. Por (ii) en el teorema 12.1, la ventaja es por lo tanto  $p : (1 - p)$ . Por ejemplo, si  $P(A) = 2/3$ , entonces la ventaja de que ocurra  $A$  es

$$\frac{2}{3} : \frac{1}{3} = 2 : 1$$

lo cual se lee "2 a 1".

Observe que el axioma  $[P_3]$  da la probabilidad de una unión de eventos en el caso de que los eventos sean mutuamente excluyentes, o sea, disyuntos. De lo anterior se desprende:

**Teorema 12.2:** Para eventos cualesquiera  $A$  y  $B$ ,  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .

**Corolario 12.3:** Para eventos cualesquiera  $A$ ,  $B$  y  $C$ ,

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

con fórmulas análogas para cuatro, cinco, seis, ... eventos (compare con el teorema 6.3 y con el corolario 6.4).

## 12.5 PROBABILIDAD CONDICIONAL

Sea  $E$  un evento arbitrario en un espacio muestral  $S$  para el cual  $P(E) > 0$ . La probabilidad de que ocurra un evento  $A$  una vez que haya ocurrido  $E$  o, en otras palabras, la *probabilidad condicional de  $A$  dado  $E$* , escrito  $P(A|E)$ , se define como sigue:

$$P(A|E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)}$$

La figura 12-1 es un diagrama de Venn que representa un espacio muestral  $S$  y eventos (conjuntos)  $E$  y  $A$ . Se podría decir que  $P(A|E)$  mide la probabilidad de  $A$  relativa al espacio reducido  $E$ .

En un espacio equiprobable la probabilidad de un evento es proporcional al número de puntos muestrales en el evento, y por lo tanto

$$\begin{aligned} P(A|E) &= \frac{\text{número de elementos en } A \cap E}{\text{número de elementos en } E} \\ &= \frac{\text{número de maneras en que puede ocurrir } A \text{ y } E}{\text{número de maneras en que puede ocurrir } E} \end{aligned}$$

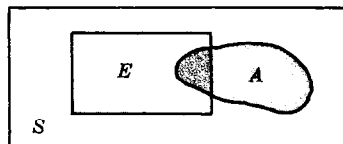


Figura 12-1

**EJEMPLO 12.4** Supongamos que lanzamos un par de dados no cargados. Si la suma es 6, encuentre la probabilidad de que uno de los dados tenga un 2. En otras palabras, si

$$E = \{\text{suma es 6}\} = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$$

y

$$A = \{\text{aparece un 2 por lo menos en un dado}\}$$

encuentre  $P(A|E)$ .

$E$  está compuesto de cinco elementos y dos de ellos,  $(2, 4)$  y  $(4, 2)$ , pertenecen a  $A$ . Por lo tanto, como el espacio es equiprobable,

$$P(A|E) = \frac{2}{5}$$

La definición de probabilidad condicional se puede volver a escribir como

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1)$$

en donde hemos usado el hecho de que  $A_1 \cap A_2 = A_2 \cap A_1$ . La fórmula anterior puede ser expandida de la siguiente manera:

**Teorema 12.4 (Teorema de la multiplicación):**

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 \cap A_2) P(A_4 | A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cdots P(A_n | A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

**EJEMPLO 12.5** Un lote contiene 12 artículos de los cuales 4 son defectuosos. Se sacan al azar tres artículos del lote, uno después de otro. Encuentre la probabilidad  $p$  de que todos los tres artículos sean no defectuosos.

La probabilidad de que el primer artículo sea no defectuoso es  $8/12$ , ya que 8 de 12 artículos son no defectuosos. Si el primer artículo es no defectuoso, entonces la probabilidad de que el siguiente artículo sea no defectuoso es  $7/11$ , ya que solamente 7 de los 11 artículos restantes son no defectuosos. Si los primeros dos artículos son no defectuosos, entonces la probabilidad de que el último artículo sea no defectuoso es  $6/10$ , ya que solamente 6 de los 10 artículos restantes son no defectuosos. Así por el teorema de la multiplicación,

$$p = \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} = \frac{14}{55}$$

## 12.6 INDEPENDENCIA

Se dice que un evento  $B$  es *independiente* de un evento  $A$  si la probabilidad de que ocurra  $B$  no está influida por el hecho de que  $A$  haya ocurrido o no. En otras palabras, si la probabilidad de  $B$  es igual a la probabilidad condicional de  $B$  dado  $A$ :  $P(B) = P(B | A)$ . Substituyendo  $P(B | A)$  por  $P(B)$  en el teorema de la multiplicación obtenemos

$$P(A \cap B) = P(A) P(B)$$

Usamos formalmente la anterior fórmula como nuestra definición de independencia.

**Definición:** Los eventos  $A$  y  $B$  son independientes si  $P(A \cap B) = P(A) P(B)$ ; de otra manera son *dependientes*.

**EJEMPLO 12.6** Supongamos que lanzamos tres veces una moneda no cargada; obtenemos el espacio equiprobable

$$S = \{CCC, CCS, CSC, CSS, SCC, SCS, SSC, SSS\}$$

Considere los eventos

$$A = \{\text{sale cara en el primer lanzamiento}\}$$

$$B = \{\text{sale cara en el segundo lanzamiento}\}$$

$$C = \{\text{salen exactamente dos caras seguidas}\}$$

Claramente  $A$  y  $B$  son eventos independientes; este hecho se verifica en seguida. Por otra parte, la relación entre  $A$  y  $C$  o  $B$  y  $C$  no es obvia. Sostenemos que  $A$  y  $C$  son independientes, pero que  $B$  y  $C$  son dependientes. Tenemos

$$P(A) = P(\{CCC, CCS, CSC, CSS\}) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = P(\{CCC, CCS, SCC, SCS\}) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$P(C) = P(\{CCS, SCC\}) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Luego

$$P(A \cap B) = P(\{CCC, CCS\}) = \frac{1}{4} \quad P(A \cap C) = P(\{CCS\}) = \frac{1}{8}$$

$$P(B \cap C) = P(\{CCS, SCC\}) = \frac{1}{4}$$

Por lo tanto,

$$P(A)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = P(A \cap B), \text{ y así } A \text{ y } B \text{ son independientes;}$$

$$P(A)P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = P(A \cap C), \text{ y así } A \text{ y } C \text{ son independientes;}$$

$$P(B)P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \neq P(B \cap C), \text{ y así } B \text{ y } C \text{ son dependientes.}$$

Frecuentemente, si las condiciones del experimento sugieren que dos eventos  $A$  y  $B$  “no tienen ninguna conexión el uno con el otro”, definimos a  $P(A \cap B)$  como  $P(A)P(B)$ ; es decir, postulamos la independencia de  $A$  y  $B$ . De nuevo destaquemos que la independencia o dependencia de dos eventos dados no está determinado por los eventos en sí, sino por las probabilidades que asignamos a los eventos y a su intersección. Véase el problema 12.18.

## 12.7 PRUEBAS REPETIDAS

Ya hemos encontrado espacios de probabilidad asociados con un experimento repetido un número finito de veces, como en el ejemplo 12.6. Este concepto de la repetición está formalizado de la siguiente manera:

**Definición:** Sea  $S^*$  un espacio finito de probabilidad. Por  $n$  pruebas independientes o repetidas, queremos decir que el espacio de probabilidad  $S$  que consiste en todas las  $n$ -tuplas ordenadas de los elementos de  $S^*$ , con la probabilidad de una  $n$ -tupla definida como el producto de las probabilidades de sus componentes:

$$P((s_1, s_2, \dots, s_n)) = P(s_1)P(s_2) \cdots P(s_n)$$

**EJEMPLO 12.7** Supongamos que siempre que corren juntos tres caballos  $a$ ,  $b$  y  $c$ , sus respectivas probabilidades de ganar son  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$  y  $\frac{1}{6}$ . En otras palabras,  $S^* = \{a, b, c\}$  con  $P(a) = \frac{1}{2}$ ,  $P(b) = \frac{1}{3}$ , y  $P(c) = \frac{1}{6}$ . Si los caballos corren dos veces, entonces el espacio muestral de las dos pruebas repetidas es

$$S = \{aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc\}$$

Por conveniencia de notación, hemos escrito  $ac$  en lugar de la pareja ordenada  $(a, c)$ . Las probabilidades de los puntos muestrales de  $S$  son:

$$\begin{aligned} P(aa) &= P(a)P(a) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} & P(ba) &= \frac{1}{6} & P(ca) &= \frac{1}{12} \\ P(ab) &= P(a)P(b) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} & P(bb) &= \frac{1}{9} & P(cb) &= \frac{1}{18} \\ P(ac) &= P(a)P(c) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12} & P(bc) &= \frac{1}{18} & P(cc) &= \frac{1}{36} \end{aligned}$$

Así, la probabilidad de que gane  $c$  la primera carrera y que gane  $a$  la segunda carrera es  $P(ca) = 1/12$ .

Frecuentemente se estudian las pruebas repetidas con solamente dos resultados; llamamos a uno de los resultados *éxito* y al otro *fracaso*. Sea  $p$  la probabilidad del éxito, y por lo tanto  $q = 1 - p$  es la probabilidad de fracaso. Frecuentemente estamos interesados en el número de éxitos sin importarnos el orden en que ocurran. Se aplica el siguiente teorema, demostrado en el problema 12.23.

**Teorema 12.5:** La probabilidad de exactamente  $k$  éxitos en pruebas repetidas se denota y da por

$$b(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

(Véase la sección 11.3 para la definición del coeficiente binomial.)

**EJEMPLO 12.8** Una moneda no cargada se lanza seis veces o, equivalentemente, se lanzan seis monedas no cargadas; sea cara un éxito. Entonces  $n = 6$  y  $p = q = 1/2$ .

(a) La probabilidad de que salgan exactamente dos cabezas (o sea,  $k = 2$ ) es

$$b(2; 6, \frac{1}{2}) = \binom{6}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{15}{64}$$

(b) La probabilidad de obtener por lo menos cuatro caras (o sea  $k = 4, 5$  ó  $6$ ) es

$$\begin{aligned} b &= b(4; 6, \frac{1}{2}) + b(5; 6, \frac{1}{2}) + b(6; 6, \frac{1}{2}) = \binom{6}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \binom{6}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \binom{6}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^6 \\ &= \frac{15}{64} + \frac{6}{64} + \frac{1}{64} = \frac{11}{32} \end{aligned}$$

(c) La probabilidad de que no haya caras (o sea,  $k = 0$ ) es

$$b(0; 6, \frac{1}{2}) = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$$

y así la probabilidad de por lo menos una cara es

$$1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$$

Supongamos que consideramos a  $n$  y a  $p$  como constantes. Entonces a  $b(k, n, p)$ , una función de  $k$ , se le llama una *distribución binomial*, ya que para  $k = 0, 1, \dots, n$  corresponde a los términos sucesivos de la expansión binomial.

$$\begin{aligned} (q + p)^n &= q^n + \binom{n}{1} q^{n-1} p + \binom{n}{2} q^{n-2} p^2 + \dots + p^n \\ &= b(0; n, p) + b(1; n, p) + b(2; n, p) + \dots + b(n; n, p) \end{aligned}$$

El uso de la palabra “binominal” se explicará en el capítulo 13. La distribución binomial también se llama *distribución de Bernoulli*, y a las pruebas independientes con dos resultados se les llama *pruebas de Bernoulli*.

## Problemas resueltos

### ESPACIOS MUESTRALES, ESPACIOS FINITOS DE PROBABILIDAD

**12.1** Sean  $A$  y  $B$  eventos. Encuentre una expresión y dibuje un diagrama de Venn para el evento en que ocurre: (a)  $A$  pero no  $B$ ; (b)  $A$  o  $B$ , pero no ambos.

(a) Como ocurre  $A$  pero no  $B$ , sombree el área de  $A$  por afuera de  $B$ , como en la fig. 12-2(a). Observe que  $B^c$ , el complemento de  $B$ , ocurre, ya que  $B$  no ocurre; así ocurren  $A$  y  $B$ . En otras palabras, el evento es  $A \cap B^c$ .

(b) Como  $A$  o  $B$  ocurren, pero no ambos, sombree el área de  $A$  y de  $B$  excepto en donde se interseccionen, como en la fig. 12-2(b). El evento es equivalente a la ocurrencia de  $A$  pero no  $B$  o  $B$  pero no  $A$ . Así el evento dado es

$$(A \cap B^c) \cup (B \cap A^c).$$

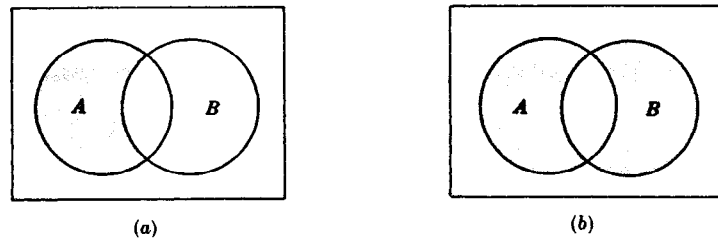


Figura 12-2

12.2 Supongamos que lanzamos una moneda y un dado, y que el espacio muestral  $S$  consta de doce elementos:

$$S = \{C1, C2, C3, C4, C5, C6, S1, S2, S3, S4, S5, S6\}$$

(a) Exprese explícitamente los siguientes eventos:

$$A = \{\text{sale cara y un número par}\}$$

$$B = \{\text{sale un primo}\} \quad C = \{\text{sale sello y un impar}\}$$

(b) Exprese explícitamente el evento: (i) ocurre  $A$  o  $B$ , (ii) ocurre  $B$  y  $C$ , (iii) solamente ocurre  $B$ .

(c) ¿Cuáles parejas de eventos  $A$ ,  $B$  y  $C$  son mutuamente exclusivas?

(a) Los elementos de  $A$  son aquellos elementos de  $S$  formados por una  $C$  y un par:

$$A = \{C2, C4, C6\}$$

Los elementos de  $B$  son aquellos puntos de  $S$  cuya segunda componente es un primo:

$$B = \{C2, C3, C5, S2, S3, S5\}$$

Los elementos de  $C$  son aquellos puntos de  $S$  formados por una  $S$  y un impar:  $C = \{S1, S3, S5\}$ .

(b) (i)  $A \cup B = \{C2, C4, C6, C3, C5, S2, S4, S5\}$

(ii)  $B \cap C = \{S3, S5\}$

(iii)  $B \cap A^c \cap C^c = \{C3, C5, S2\}$

(c)  $A$  y  $C$  son mutuamente excluyentes ya que  $A \cap C = \emptyset$

12.3 Un espacio muestral  $S$  consta de cuatro elementos:  $S = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ . ¿Con cuáles de las siguientes funciones  $S$  resulta ser un espacio de probabilidad?

$$(a) \quad P(a_1) = \frac{1}{2} \quad P(a_2) = \frac{1}{3} \quad P(a_3) = \frac{1}{4} \quad P(a_4) = \frac{1}{5}$$

$$(b) \quad P(a_1) = \frac{1}{2} \quad P(a_2) = \frac{1}{4} \quad P(a_3) = -\frac{1}{4} \quad P(a_4) = \frac{1}{2}$$

$$(c) \quad P(a_1) = \frac{1}{2} \quad P(a_2) = \frac{1}{4} \quad P(a_3) = \frac{1}{8} \quad P(a_4) = \frac{1}{8}$$

$$(d) \quad P(a_1) = \frac{1}{2} \quad P(a_2) = \frac{1}{4} \quad P(a_3) = \frac{1}{4} \quad P(a_4) = 0$$

(a) Como la suma de los valores para el espacio muestral es mayor que uno, la función no define a  $S$  como un espacio muestral.

(b) Como  $P(a_3)$  es negativo, la función no define a  $S$  como un espacio de probabilidad.

(c) Como cada valor es no negativo y la suma de los valores es uno, la función define a  $S$  como un espacio de probabilidad.

(d) Los valores son no negativos y suman uno; por lo tanto, la función define a  $S$  como un espacio de probabilidad.



- 12.4 Una moneda está cargada de tal manera que las caras salen el doble de veces que los sellos. Encuentre  $P(S)$  y  $P(C)$ .

Sea  $P(S) = p$ ; entonces  $P(C) = 2p$ . Ahora asigne la suma de las probabilidades igual a uno:

$$p + 2p = 1 \quad \text{o} \quad p = \frac{1}{3}$$

Así,  $P(S) = 1/3$  y  $P(C) = 2/3$ .

- 12.5 Encuentre la probabilidad  $p$  de un evento, si la ventaja de que pueda ocurrir es "3 a 2".

La ventaja de que un evento con probabilidad  $p$  pueda ocurrir es la razón:  $p:(1-p)$ . Así,

$$\frac{p}{1-p} = \frac{3}{2} \quad \text{o} \quad 2p = 3 - 3p \quad \text{o} \quad 5p = 3 \quad \text{o} \quad p = \frac{3}{5}$$

- 12.6 Determine la probabilidad  $p$  de cada evento:

- (a) Sale un número par en el lanzamiento de un dado no cargado;
  - (b) al sacar una sola carta de una baraja de 52 cartas sale una  $K$ ;
  - (c) sale por lo menos un sello al lanzar tres monedas no cargadas;
  - (d) sale una bola blanca al sacar una sola bola de una bolsa con 4 bolas blancas, 3 rojas y 5 azules.
- (a) El evento puede ocurrir de tres maneras (un 2, un 4 o un 6) entre 6 casos igualmente probables; así  $p = 3/6 = 1/2$ .
- (b) Hay tres  $K$ s en las 52 cartas; así  $p = 4/52 = 1/13$ .
- (c) Si distinguimos las monedas, hay entonces 8 casos igualmente posibles: CCC, CCS, CSC, CSS, SCC, SCS, SSC, SSS. Solamente el primer caso no es favorable al evento dado; así  $p = 7/8$ . (d) Hay  $4 + 3 + 5 = 12$  bolas, de las cuales 4 son blancas; así  $p = 4/12 = 1/3$ .

- 12.7 Se sacan aleatoriamente dos cartas de una baraja de 52 cartas. Encuentre la probabilidad  $p$  de que (a) ambos sean picas, (b) uno sea pica y uno sea un corazón.

Hay

$$\binom{52}{2} = 1326 \text{ maneras}$$

de sacar 2 cartas entre 52.

(a) Hay

$$\binom{13}{2} = 78 \text{ maneras}$$

de sacar dos picas de 13 picas; así

$$p = \frac{\text{número de maneras de sacar dos picas}}{\text{número de maneras de sacar dos naipes}} = \frac{78}{1326} = \frac{1}{17}$$

(b) Como hay 13 picas y 13 corazones, hay  $13 \cdot 13 = 169$  maneras de sacar una pica y un corazón; así

$$p = \frac{169}{1326} = \frac{13}{102}$$

- 12.8 En un curso de 10 hombres y 20 mujeres, la mitad de los hombres y la mitad de las mujeres tienen ojos pardos. Encuentre la probabilidad  $p$  de que una persona escogida aleatoriamente sea un hombre o tenga los ojos pardos.

Sea  $A = \{\text{la persona es un hombre}\}$  y  $B = \{\text{la persona tiene ojos pardos}\}$ ; busquemos  $P(A \cup B)$ . Ahora

$$P(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3} \quad P(B) = \frac{1}{2} \quad P(A \cap B) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

Así, por el teorema 12.2,

$$p = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

## PROBABILIDAD CONDICIONAL

- 12.9** Se lanzan tres monedas no cargadas, una moneda de un centavo, una de cinco, y una de diez. Encuentre la probabilidad  $p$  de que todas salgan cara si (a) la moneda de un centavo sale cara, (b) por lo menos una de las monedas sale cara.

El espacio muestral tiene ocho elementos:  $S = \{CCC, CCS, CSC, CSS, SCC, SCS, SSC, SSS\}$ .

- (a) Si la moneda de centavo sale cara, el espacio muestral reducido es  $A = \{CCC, CCS, CSC, CSS\}$ . Como las monedas salen todas cara en 1 de 4 casos,  $P = 1/4$ .
- (b) Si una o más de las monedas sale cara, el espacio muestral reducido es  $B = \{CCC, CCS, CSC, CSS, SCC, SCS, SSC\}$ . Como las monedas salen todas cara en 1 de 7 casos,  $P = 1/7$ .

- 12.10** Se lanza una pareja de dados no cargados. Si los dos números que salen son diferentes, encuentre la probabilidad  $p$  de que (a) la suma sea seis, (b) salga un 1, (c) la suma sea 4 o menos.

De las 36 maneras como pueden caer los dados, 6 producirán los mismos números: (1, 1), (2, 2), ..., (6, 6). Así el espacio muestral reducido consistirá de  $36 - 6 = 30$  elementos.

- (a) La suma seis puede aparecer de 4 maneras: (1, 5), (2, 4), (4, 2), (5, 1). (No podemos incluir a (3, 3) ya que los números serían iguales.) Por lo tanto  $p = 4/30 = 2/15$ .
- (b) Un 1 aparece de 10 maneras: (1, 2), (1, 3), ..., (1, 6) y (2, 1), (3, 1), ..., (6, 1). Por lo tanto  $p = 10/30 = 1/3$ .
- (c) La suma 4 o menos puede ocurrir de 4 maneras: (3, 1), (1, 3), (2, 1), (1, 2). Así  $p = 4/30 = 2/15$ .

- 12.11** Una clase tiene 12 niños y 4 niñas. Si tres de los alumnos se seleccionan al azar, ¿cuál es la probabilidad  $p$  de que todos sean niños?

La probabilidad de que el primer alumno seleccionado sea un niño es  $12/16$  ya que hay 12 niños entre 16 alumnos. Si el primer alumno es un niño, entonces la probabilidad de que el segundo sea un niño es  $11/15$  ya que quedan 11 niños entre 15 alumnos. Finalmente, si los dos primeros alumnos seleccionados fueran niños, entonces la probabilidad de que el tercer alumno sea un niño es  $10/14$  ya que quedan 10 niños entre 14 alumnos. Así, por el teorema de multiplicación, la probabilidad de que todos tres sean niños es

$$p = \frac{12}{16} \cdot \frac{11}{15} \cdot \frac{10}{14} = \frac{11}{28}$$

### Otro método

Hay  $C(16, 3) = 560$  maneras de seleccionar 3 alumnos entre 16, y  $C(12, 3) = 220$  maneras de seleccionar 3 niños entre 12. así

$$p = \frac{220}{560} = \frac{11}{28}$$

### Otro método

Si los alumnos se seleccionan uno después de otro, entonces hay  $16 \cdot 15 \cdot 14$  maneras de seleccionar tres alumnos, y  $12 \cdot 11 \cdot 10$  maneras de seleccionar tres niños. así

$$p = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{16 \cdot 15 \cdot 14} = \frac{11}{28}$$

- 12.12** Se reparten cinco cartas una después de otra de una baraja ordinaria de 52 cartas. ¿Cuál es la probabilidad  $p$  de que sean todas picas?

La probabilidad de que la primera sea una pica es  $13/52$ , que la segunda sea una pica es  $12/51$ , de que la tercera sea una pica es  $11/50$ , de que la cuarta sea una pica es  $10/49$ , y que la última sea una pica es  $9/48$ . (Suponemos en cada caso que las cartas anteriores eran picas.) Así

$$p = \frac{12}{16} \cdot \frac{11}{15} \cdot \frac{10}{14} = \frac{11}{28}$$

12.13 En cierta universidad, el 25% de los estudiantes pierden matemáticas, el 15% pierden química, y el 10% pierden tanto matemáticas como química. Se selecciona un estudiante aleatoriamente.

- (a) Si perdió química, ¿cuál es la probabilidad de que perdiera matemáticas?  
 (b) Si perdió matemáticas, ¿cuál es la probabilidad de que perdiera química?  
 (c) ¿Cuál es la probabilidad de que perdiera matemáticas o química?

Sea  $M = \{\text{estudiantes que perdieron matemáticas}\}$  y  $C = \{\text{estudiantes que perdieron química}\}$ ;

entonces  $P(M) = 0.25$   $P(Q) = 0.15$   $P(M \cap Q) = 0.10$

- (a) La probabilidad de que un estudiante perdiera matemáticas, dado que perdió química, es

$$P(M | Q) = \frac{P(M \cap Q)}{P(Q)} = \frac{0.10}{0.15} = \frac{2}{3}$$

- (b) La probabilidad de que un estudiante perdiera química, dado que perdió matemáticas es

$$P(Q | M) = \frac{P(Q \cap M)}{P(M)} = \frac{0.10}{0.25} = \frac{2}{5}$$

- (c)  $P(M \cup Q) = P(M) + P(Q) - P(M \cap Q) = 0.25 + 0.15 - 0.10 = 0.30 = \frac{3}{10}$

12.14 Encuentre  $P(B|A)$  si (a)  $A$  es un subconjunto de  $B$ , (b)  $A$  y  $B$  son mutuamente excluyentes. Suponga que  $P(A) > 0$ .

- (a) Si  $A$  es un subconjunto de  $B$ , entonces siempre que ocurra  $A$  ocurre  $B$ ; por lo tanto  $P(B|A) = 1$ .  
 Alternativamente,  $A \cap B = A$ ; así

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

- (b) Si  $A$  y  $B$  son mutuamente excluyentes, o sea disyuntos, entonces cada vez que ocurre  $A$  no ocurre  $B$ ; así  $P(B|A) = 0$ . Alternativamente,  $A \cap B = \emptyset$ ; así

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(\emptyset)}{P(A)} = \frac{0}{P(A)} = 0$$

## INDEPENDENCIA

12.15 La probabilidad de que un hombre viva 10 años más es  $1/4$ , y la probabilidad de que su esposa viva 10 años más es  $1/3$ . Encuentre la probabilidad de que (a) ambos estén vivos dentro de 10 años, (b) por lo menos uno esté vivo en 10 años, (c) ninguno esté vivo en 10 años, (d) solamente la esposa esté viva en 10 años.

Vamos a suponer que  $A \equiv$  evento de que el hombre esté vivo en 10 años, y  $B \equiv$  evento de que su esposa esté viva en 10 años, son eventos independientes; esto puede que corresponda o no a estadísticas vitales reales.

(a) 
$$P(A \cap B) = P(A) P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

(b) 
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$$

(c) Buscamos  $P(A^c \cap B)$ . Ahora

$$P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad \text{y} \quad P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Aún más,  $A^c$  y  $B^c$  son independientes (véase el problema 12.17). Así,

$$P(A^c \cap B^c) = P(A^c) P(B^c) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$$

Alternativamente, como  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ ,

$$P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

(d) Buscamos  $P(A^c \cap B)$ . Como

$$P(A^c) = \frac{3}{4} \quad \text{y} \quad P(B) = \frac{1}{3}$$

y  $A^c$  y  $B$  son independientes,

$$P(A^c \cap B) = P(A^c) P(B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

**12.16** La caja  $A$  contiene 8 artículos de los cuales 3 son defectuosos, y la caja  $B$  contiene 5 artículos de los cuales 2 son defectuosos. Se saca un artículo al azar de cada caja. (a) ¿Cuál es la probabilidad  $p$  de que ambos artículos sean no defectuosos? (b) ¿Cuál es la probabilidad  $p$  de que un artículo sea defectuoso y el otro no? (c) Si un artículo es defectuoso y uno no lo es, ¿cuál es la probabilidad  $p$  de que el artículo defectuoso venga de la caja  $A$ ?

(a) La probabilidad de escoger un artículo no defectuoso de la caja  $A$  es  $5/8$  y de  $B$  es  $3/5$ . Como los eventos son independientes,

$$p = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{8}$$

(b) Método 1. La probabilidad de escoger dos artículos defectuosos es

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{20}$$

Según (a), la probabilidad de escoger dos artículos no defectuosos es  $3/8$ . Así

$$p = 1 - \frac{3}{8} - \frac{3}{20} = \frac{19}{40}$$

Método 2. La probabilidad  $p_1$  de escoger un artículo defectuoso de  $A$  y uno no defectuoso de  $B$  es

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{40}$$

La probabilidad  $p_2$  de escoger un artículo no defectuoso de  $A$  y uno defectuoso de  $B$  es

$$\frac{5}{8} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{4}$$

Así

$$p = p_1 + p_2 = \frac{9}{40} + \frac{1}{4} = \frac{19}{40}$$

(c) Considere los eventos  $X = \{\text{artículo defectuoso de } A\}$  y  $Y = \{\text{un artículo es defectuoso y uno no lo es}\}$ . Buscamos  $P(X|Y)$ . Por (b),  $P(X \cap Y) = p_1 = 9/40$  y  $P(Y) = 19/40$ . Así

$$p = P(X|Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)} = \frac{9/40}{19/40} = \frac{9}{19}$$

**12.17** Demuestre: Si  $A$  y  $B$  son eventos independientes, entonces  $A^c$  y  $B^c$  son eventos independientes.

Sea  $P(A) = x$  y  $P(B) = y$ . Entonces  $P(A^c) = 1 - x$  y  $P(B^c) = 1 - y$ . Como  $A$  y  $B$  son independientes,  $P(A \cap B) = P(A)P(B) = xy$ . Aún más,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = x + y - xy$$

Por la ley de DeMorgan,  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ ; así

$$P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - x - y + xy$$

Por otra parte,

$$P(A^c)P(B^c) = (1 - x)(1 - y) = 1 - x - y + xy$$

Así  $P(A^c \cap B^c) = P(A^c)P(B^c)$ , y por lo tanto  $A^c$  y  $B^c$  son independientes.

De manera similar, podemos mostrar que  $A$  y  $B^c$ , y también  $A^c$  y  $B$ , son independientes.

### PRUEBAS REPETIDAS

**12.18** Una familia tiene tres hijos. Sea  $A \equiv$  evento de que la familia tenga hijos de ambos sexos, y sea  $B \equiv$  evento de que la familia tenga a lo más un niño (varón). ¿Son  $A$  y  $B$  eventos independientes?

Consideramos los tres nacimientos como pruebas independientes, con probabilidad  $p$  para una niña y  $q = 1 - p$  para un niño en cada prueba. Los puntos del espacio muestral son ( $m$  para masculino y  $f$  para femenino).

$$S = \{mmm, mmf, mfm, mff, fmm, fmf, ffm, fff\}$$

así que tienen probabilidad  $P(mmm) = q^3$ ,  $P(mmf) = pq^2$ . Tenemos

$$A = \{mmf, mfm, mff, fmm, fmf, ffm\}$$

$$B = \{mff, fmf, ffm, fff\}$$

$$A \cap B = \{mff, fmf, ffm\}$$

y así

$$P(A) = pq^2 + pq^2 + p^2q + pq^2 + p^2q + p^2q = 3pq(p + q) = 3pq$$

$$P(B) = p^2q + p^2q + p^2q + p^3 = (3q + p)p^2 = (2q + 1)p^2$$

$$P(A \cap B) = p^2q + p^2q + p^2q = 3p^2q$$

Así,  $A$  y  $B$  son eventos independientes si y sólo si

$$3p^2q = 3pq \cdot (2q + 1)p^2$$

que se reduce a

$$1 = 2pq + p \quad \text{o} \quad q = 2pq \quad \text{o} \quad p = \frac{1}{2}$$

Concluimos que  $A$  y  $B$  son independientes si es igualmente probable el nacimiento de un niño o de una niña; en caso contrario los eventos son dependientes.

**12.19** Calcule (a)  $b(2; 5, \frac{1}{3})$ , (b)  $b(3; 6, \frac{1}{2})$  (c)  $b(3; 4, \frac{1}{4})$ .

$$(a) \quad b(2; 5, \frac{1}{3}) = \binom{5}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{80}{243}$$

$$(b) \quad b(3; 6, \frac{1}{2}) = \binom{6}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{5}{16}$$

$$(c) \quad b(3; 4, \frac{1}{4}) = \binom{4}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^1 = \left(\frac{4}{1}\right) \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right) = 4 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{64}$$

- 12.20** Se lanza tres veces una moneda no cargada. Encuentre la probabilidad  $p$  de que salga (a) tres caras, (b) dos caras, (c) una cara, (d) ninguna cara.

**Método 1.**

Obtenemos el siguiente espacio equiprobable de ocho elementos:

$$S = \{CCC, CCS, CSC, CSS, SCC, SCS, SSC, SSS\}$$

- (a) Ocurren tres caras (CCC) solamente una vez entre los ocho puntos muestrales; así  $p = 1/8$ .  
 (b) Ocurren dos caras tres veces (CCS, CSC, y SCC); así  $p = 3/8$ .  
 (c) Ocurre una cara tres veces (CSS, CSC y SSC); así  $p = 3/8$ .  
 (d) No ocurren caras, o sea tres sellos (SSS), ocurre solamente una vez, así  $p = 1/8$ .

**Método 2.**

Use el teorema 12.5, con  $n = 3$  y  $p = q = 1/2$ .

$$\begin{aligned} (a) \quad p &= b(3; 3, \tfrac{1}{2}) = \binom{3}{3} \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 = 1 \cdot \tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{8} \\ (b) \quad p &= b(2; 3, \tfrac{1}{2}) = \binom{3}{2} \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 = 3 \cdot \tfrac{1}{8} = \tfrac{3}{8} \\ (c) \quad p &= b(1; 3, \tfrac{1}{2}) = \binom{3}{1} \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 = 3 \cdot \tfrac{1}{8} = \tfrac{3}{8} \\ (d) \quad p &= b(0; 3, \tfrac{1}{2}) = \binom{3}{0} \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 = 1 \cdot \tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{8} \end{aligned}$$

- 12.21** Supongamos que el 20% de los artículos producidos por una fábrica salen defectuosos. Si se escogen 4 artículos aleatoriamente, ¿cuál es la probabilidad  $p$  de que (a) 2 sean defectuosos, (b) 3 sean defectuosos, (c) por lo menos uno sea defectuoso?

Use el Teorema 12.5, con  $n = 4$ ,  $p = 0.2$  y  $q = 1 - p = 0.8$ .

$$\begin{aligned} (a) \quad p &= b(2; 4, 0.2) = \binom{4}{2} (0.2)^2 (0.8)^2 = 0.1536 \\ (b) \quad p &= b(3; 4, 0.2) = \binom{4}{3} (0.2)^3 (0.8)^1 = 0.0256 \\ (c) \quad p &= 1 - b(0; 4, 0.2) = 1 - (0.8)^4 = 0.5904 \end{aligned}$$

- 12.22** El equipo  $A$  tiene probabilidad  $2/3$  de ganar cada vez que juegue. Si  $A$  juega 3 partidos, encuentre la probabilidad de que  $A$  gane más de la mitad de los juegos.

Aquí  $n = 4$ ,  $p = 2/3$ , y  $q = 1 - p = 1/3$ .  $A$  gana más de la mitad de los partidos si gana 3 ó 4 partidos. Así que la probabilidad pedida es

$$b(3; 4, \tfrac{2}{3}) + b(4; 4, \tfrac{2}{3}) = \binom{4}{3} \left(\tfrac{2}{3}\right)^3 \left(\tfrac{1}{3}\right)^1 + \binom{4}{4} \left(\tfrac{2}{3}\right)^4 = \tfrac{32}{81} + \tfrac{16}{81} = \tfrac{48}{81} = \tfrac{16}{27}$$

- 12.23** Demuestre el Teorema 12.5.

El espacio muestral de las  $n$  pruebas repetidas consta de todas las  $n$ -tuplas ordenadas cuyas componentes son o  $e$  (éxito) o  $f$  (fracaso). El evento  $A$  de  $k$  éxitos consta de todas las  $n$ -tuplas ordenadas, de las cuales  $k$  componentes son  $e$  y las otras  $n - k$  componentes son  $f$ . El número de  $n$ -tuplas en el evento  $A$  es igual al número de maneras como  $k$  letras  $e$  se pueden distribuir entre  $n$  componentes de una  $n$ -tupla; así  $A$  consta de  $C(n, k)$  puntos muestrales. Como la probabilidad de cada punto en  $A$  es  $p^k q^{n-k}$ , tenemos

$$P(A) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

## Problemas suplementarios

### ESPACIOS DE PROBABILIDAD

- 12.24** Sean  $A$  y  $B$  eventos. Encuentre una expresión y dibuje el diagrama de Venn para el evento de que (a)  $A$  ocurra o  $B$  no ocurra, (b) ni  $A$  ni  $B$  ocurran.
- 12.25** Supongamos que lanzamos una moneda de un centavo, una de diez centavos y un dado.
- Describa un espacio muestral adecuado  $S$ .
  - Exprese explícitamente los siguientes eventos:  $A = \{\text{salen dos caras y un número par}\}$ ,  $B = \{\text{sale un 2}\}$ ,  $C = \{\text{salen exactamente una cara y un impar}\}$ .
  - Exprese explícitamente el evento de que (1) ocurran  $A$  y  $B$ , (2) solamente ocurre  $B$ , (3) ocurren  $B$  y  $C$ .
- 12.26** ¿Cuáles funciones, definidas en  $S = \{a_1, a_2, a_3\}$ , hacen a  $S$  un espacio de probabilidad?
- $P(a_1) = \frac{1}{4}$ ,  $P(a_2) = \frac{1}{3}$ ,  $P(a_3) = \frac{1}{2}$
  - $P(a_1) = \frac{2}{3}$ ,  $P(a_2) = -\frac{1}{3}$ ,  $P(a_3) = \frac{2}{3}$
  - $P(a_1) = \frac{1}{6}$ ,  $P(a_2) = \frac{1}{3}$ ,  $P(a_3) = \frac{1}{2}$
  - $P(a_1) = 0$ ,  $P(a_2) = \frac{1}{3}$ ,  $P(a_3) = \frac{2}{3}$
- 12.27** Sea  $P(\cdot)$  una función de probabilidad en  $S = \{a_1, a_2, a_3\}$ . Encuentre  $P(a_1)$  si (a)  $P(a_2) = 1/3$  y  $P(a_3) = 1/4$ , (b)  $P(a_1) = 2P(a_2)$  y  $P(a_3) = 1/4$ .
- 12.28** Una moneda está cargada de tal manera que las caras salen tres veces más que los sellos. Encuentre  $P(C)$  y  $P(S)$ .
- 12.29** Tres estudiantes  $A$ ,  $B$  y  $C$  compiten en una carrera de natación.  $A$  y  $B$  tienen la misma probabilidad de ganar y lo más posible es que cada uno gane dos veces más que lo que gana  $C$ . Encuentre la probabilidad de que (a) gane  $B$ , (b) gane  $C$ , (c) gane  $B$  o  $C$ .
- 12.30** Sean  $A$  y  $B$  eventos con  $P(A \cup B) = 7/8$ ,  $P(A \cap B) = 1/4$ , y  $P(A^c) = 5/8$ . Encuentre  $P(A)$ ,  $P(B)$  y  $P(A \cap B^c)$ .
- 12.31** En un salón hay 5 estudiantes de primer año, 4 de segundo, 8 de tercero y 3 de cuarto. Se escoge al azar un estudiante para representar el grupo. Encuentre la probabilidad de que el estudiante sea (a) de segundo, (b) de cuarto, (c) de tercero o de cuarto.
- 12.32** Se selecciona aleatoriamente una carta entre 50 cartas que han sido numeradas de 1 a 50. Encuentre la probabilidad de que el número en la carta sea (a) mayor que 10, (b) divisible por 5, (c) termine con el dígito 2.
- 12.33** Se colocan en una caja tres tornillos y tres tuercas. Si se cogen dos de estos objetos al azar, encuentre la probabilidad de que sea un tornillo y una tuerca.
- 12.34** Hay diez estudiantes,  $A, B, \dots$ , en una clase. Si se forma aleatoriamente con los estudiantes un comité de tres, encuentre la probabilidad de que (a)  $A$  pertenezca al comité, (b)  $B$  pertenezca al comité, (c)  $A$  y  $B$  pertenezcan al comité, (d)  $A$  ó  $B$  pertenezca al comité.
- 12.35** Se lanza un par de dados no cargados. Encuentre la probabilidad de que el máximo de los dos números sea mayor que 4.
- 12.36** Se lanza 50 veces un dado no cargado. La siguiente tabla da los seis números y sus frecuencias de ocurrencia:

Número	1	2	3	4	5	6
Frecuencia	7	9	8	7	9	10

Encuentre la frecuencia relativa del evento (a) sale un 4, (b) sale un número impar, (c) sale un número mayor que 4.

### PROBABILIDAD CONDICIONAL, INDEPENDENCIA

12.37 Se lanza un dado no cargado. Considere los eventos

$$A = \{2, 4, 6\} \quad B = \{1, 2\} \quad C = \{1, 2, 3, 4\}$$

- (a) Encuentre  $P(A \text{ y } B)$ ,  $P(A \text{ o } C)$ . (b) Encuentre  $P(A|B)$ ,  $P(B|A)$ . (c) Encuentre  $P(A|C)$ ,  $P(C|A)$ .  
(d) Encuentre  $P(B|C)$ ,  $P(C|B)$ . (e) son  $A$  y  $B$  independientes?  $A$  y  $C$ ?  $B$  y  $C$ ?

12.38 Se lanza un par de dados. Si los números que aparecen son diferentes, encuentre la probabilidad de que la suma sea par.

12.39 Se seleccionan al azar dos dígitos diferentes del 1 al 9. Si

$$E = \text{suma es impar} \quad F = \text{se selecciona el dígito 2}$$

encuentre (a)  $P(E|F)$ , (b)  $P(F|E)$ . (c) ¿Son  $E$  y  $F$  independientes?

12.40 Sean  $A$  y  $B$  eventos con  $P(A) = 1/3$ ,  $P(B) = 1/4$ , y  $P(A \cup B) = 1/2$ . (a) Encuentre  $P(A|B)$  y  $P(B|A)$ .  
(b) Son  $A$  y  $B$  independientes?

12.41 En cierta universidad, el 25% de los hombres y el 10% de las mujeres estudian matemáticas. Las mujeres constituyen el 60% de los estudiantes. Se escoge al azar un estudiante. (a) Encuentre la probabilidad de que el estudiante esté estudiando matemáticas. (b) Si el estudiante está estudiando matemáticas, encuentre la probabilidad de que el estudiante sea mujer.

12.42 Una caja contiene 5 transistores de los cuales 2 son defectuosos. Se prueban los transistores uno después de otro hasta que se identifican los defectuosos. (a) Encuentre la probabilidad de que el proceso se detenga en (i) la segunda prueba, (ii) en la tercera prueba. (Sugerencias: Si los tres primeros transistores resultan no defectuosos, ...) (b) Si el proceso se detiene en la tercera prueba, ¿cuál es la probabilidad de que el primer transistor probado era defectuosos?

12.43 Sean  $A$  y  $B$  eventos con  $P(A) = 1/4$ ,  $P(A \cup B) = 1/3$ , y  $P(B) = p$ . Encuentre  $p$  si (a)  $A$  y  $B$  son mutuamente excluyentes, (b)  $A$  y  $B$  son independientes, (c)  $A$  es un subconjunto de  $B$ .

12.44 Supongamos que lanzamos tres monedas. Sea  $A = \{\text{todas caras o todas sellos}\}$ ,  $B = \{\text{por lo menos dos caras}\}$  y  $C = \{\text{cuando más dos caras}\}$ . De las parejas  $(A, B)$ ,  $(A, C)$  y  $(B, C)$ , ¿cuáles son independientes y cuáles son dependientes?

12.45 Sean  $A$  y  $B$  eventos independientes con  $P(A) = 0.3$  y  $P(B) = 0.4$ . (a) Encuentre  $P(A \cap B)$  y  $P(A \cup B)$ .  
(b) Encuentre  $P(A|B)$  y  $P(B|A)$ .

### PRUEBAS INDEPENDIENTES

12.46 Muestre que si la familia del problema 12.18 tienen dos hijos,  $A$  y  $B$  deben ser dependientes.

12.47 Encuentre (a)  $b(1; 5, \frac{1}{3})$ , (b)  $b(2; 7, \frac{1}{3})$ , (c)  $b(2; 4, \frac{1}{4})$ .

12.48 De una baraja de 52 cartas se saca una y se vuelve a meter tres veces. Encuentre la probabilidad de que (a) se saquen dos corazones, (b) se saquen tres corazones, (c) se saque al menos un corazón.

12.49 El promedio de bateo de un jugador de baseball es .300. Si batea 4 veces, encuentre la probabilidad de que le pegue a la pelota (a) dos veces, (b) por lo menos una vez.

12.50 Un equipo gana (G) con probabilidad 0.5, pierde (P) con probabilidad 0.3 y empató (E) con probabilidad 0.2. El equipo juega dos veces. (a) Determine el espacio muestral  $S$  y las probabilidades de los eventos elementales. (b) Encuentre la probabilidad de que el equipo gane por lo menos una vez.

12.51 La probabilidad de que  $A$  le dé a un blanco es  $1/3$ . (a) si dispara 3 veces, encuentre la probabilidad de que le dé al blanco por lo menos una vez. (b) ¿Cuántas veces debe disparar de tal manera que la probabilidad de darle al blanco por lo menos una vez sea mayor que 90%?



## Respuestas a los problemas suplementarios

12.24 (a)  $A \cup B^c$ , (b)  $(A \cup B)^c$  or  $A^c \cap B^c$

12.25 (a)  $S = \{CC1, CC2, CC3, CC4, CC5, CC6, CS1, CS2, CS3, CS4, CS5, CS6, SC1, SC2, SC3, SC4, SC5, SC6, SS1, SS2, SS3, SS4, SS5, SS6\}$

(b)  $A = \{SS2, SS4, SS6\}$ ,  $B = \{CC2, CS2, SC2, SS2\}$ ,  $C = \{CS1, SC1, CS3, SC3, CS5, SC5\}$

(c) (1)  $A \cap B = \{CC2\}$

(2)  $B \cap (A \cup C)^c = \{CS2, SC2, SS2\}$

(3)  $B \cap C = \emptyset$

12.26 (c) y (d)

$$12.38 \quad \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$$

12.27 (a)  $\frac{5}{12}$ , (b)  $\frac{1}{2}$

12.39 (a)  $\frac{5}{8}$ , (b)  $\frac{1}{4}$ , (c) no

12.28  $P(C) = \frac{3}{4}$ ,  $P(S) = \frac{1}{4}$

12.40 (a)  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$ ; (b) sí

12.29 (a)  $2/5$ , (b)  $1/5$ , (c)  $3/5$

12.41 (a)  $\frac{4}{25}$ , (b)  $\frac{3}{8}$

12.30  $P(A) = \frac{3}{8}$ ,  $P(B) = \frac{3}{4}$ ,  $P(A \cap B^c) = \frac{1}{8}$

12.42 (a) (i)  $\frac{1}{10}$ , (ii)  $\frac{3}{10}$ ; (b)  $\frac{1}{3}$

12.31 (a)  $\frac{1}{5}$ , (b)  $\frac{3}{20}$ , (c)  $\frac{11}{20}$

12.43 (a)  $\frac{1}{12}$ , (b)  $\frac{1}{9}$ , (c)  $\frac{1}{3}$

12.32 (a)  $\frac{4}{5}$ , (b)  $\frac{1}{5}$ , (c)  $\frac{1}{10}$

12.44 Solamente A y B son independientes.

12.33  $3/5$

12.45 (a) 0.12, 0.58; (b) 0.3, 0.4

12.34 (a)  $\frac{3}{10}$ , (b)  $\frac{3}{10}$ , (c)  $\frac{1}{15}$ , (d)  $\frac{8}{15}$

12.47 (a)  $\frac{80}{243}$ , (b)  $\frac{21}{128}$ , (c)  $\frac{27}{128}$

12.35  $5/9$

12.48 (a)  $\frac{9}{64}$ , (b)  $\frac{1}{64}$ , (c)  $1 - \frac{27}{64} = \frac{37}{64}$

12.36 (a)  $\frac{7}{50}$ , (b)  $\frac{24}{50}$ , (c)  $\frac{19}{50}$

12.49 (a) 0.2646, (b)  $1 - (0.7)^4 = 0.7599$

12.37 (a)  $1/6$ ,  $5/6$

(b)  $1/2$ ,  $1/3$

(c)  $1/2$ ,  $2/3$

(d)  $1/2$ , 1

(e) sí, sí, no

12.50 (a)  $\{GG, GP, GE, PG, PP, PE, EG, EP, EE\}$

(b) 0.75

12.51 (a)  $1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$ , (b) 6



## Estadística: variables aleatorias

### 13.1 INTRODUCCION

*Estadística* significa, por una parte, listas de valores numéricos. Por ejemplo, los sueldos de los empleados de una compañía, o el número de niños por familia en una ciudad. La estadística es una ciencia, la rama de la matemática que organiza, analiza, e interpreta tales datos aún no procesados. Los métodos de la estadística se aplican a muchas áreas de la actividad humana en donde se recojan datos numéricos para algún proceso de decisión.

Este capítulo cubrirá primero algunos temas elementales de la estadística descriptiva. Luego discutiremos el importante concepto de variable aleatoria, relacionado tanto con conceptos de estadística como con la materia de la probabilidad, estudiada en el capítulo 12.

### 13.2 TABLAS DE FRECUENCIA, HISTOGRAMAS

Una de las primeras cosas que uno normalmente hace con una lista larga de datos numéricos es formar algún tipo de *tabla de frecuencia*, que muestre el número de veces que un dato individual ocurre, o el número de datos que caen dentro de un intervalo dado. Estas *distribuciones de frecuencia* se pueden representar por *histogramas*. Ilustramos la técnica con dos ejemplos.

**EJEMPLO 13.1** Un edificio de apartamentos tiene 45 apartamentos, con los siguientes números de inquilinos:

2, 1, 3, 5, 2, 2, 2, 1, 4, 2, 6, 2, 4, 3, 1  
2, 4, 3, 1, 4, 4, 2, 4, 4, 2, 2, 3, 1, 4, 2  
3, 1, 5, 2, 4, 1, 3, 2, 4, 4, 2, 5, 1, 3, 4

Observe que los únicos números que aparecen en la lista son 1, 2, 3, 4, 5 y 6. La distribución de frecuencia de estos números aparece en la columna 3 de la fig. 13-1. La columna 2 es el conteo. La última columna da la *frecuencia acumulada*, la cual se obtiene sumando las frecuencias fila por fila comenzando con la primera. Esta columna da el número de números de inquilinos por apartamento que no exceda al número dado. Por ejemplo, hay 29 apartamentos con 3 o menos inquilinos.

Número de personas	Conteo	Frecuencia	Frecuencia acumulada
1	//// ///	8	8
2	### ## //	14	22
3	### //	7	29
4	### ## //	12	41
5	///	3	44
6	/	1	45
SUMA		45	

Figura 13-1

Como una alternativa a la fig. 13-1, podemos representar la distribución de frecuencia por su histograma, fig. 13-2. Un histograma es simplemente un gráfico de rectángulos en donde la altura de los rectángulos da el número de veces que el número dado aparece en la lista. Análogamente, la distribución de frecuencia acumulada se podría representar como un histograma; las alturas serían 8, 22, 29, ..., 45.

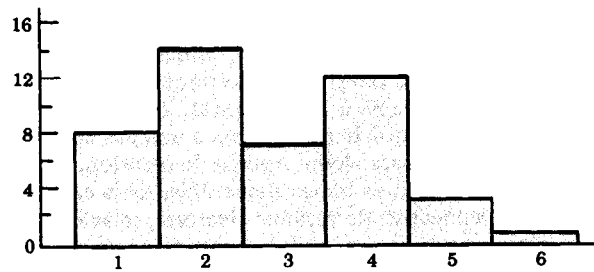


Figura 13-2

**EJEMPLO 13.2** Supongamos que las siguientes son las temperaturas (en grados Fahrenheit) a las 6:00 p.m. para un período de 35 días:

72, 78, 86, 93, 106, 107, 98, 82, 81, 77, 87, 82  
 91, 95, 92, 83, 76, 78, 73, 81, 86, 92, 93, 84  
 107, 99, 94, 86, 81, 77, 73, 76, 80, 88, 91

En lugar de encontrar la frecuencia de cada dato individual, es más útil construir una tabla de frecuencia que cuente el número de veces que la temperatura observada cae dentro de una determinada clase, o sea un intervalo dentro de ciertos límites. Esto se hace en la fig. 13-3.

Límites de clase °F	Valor de clase °F	Conteo	Frecuencia	Frecuencia acumulada
70-75	72.5	///	3	3
75-80	77.5	### /	6	9
80-85	82.5	### ///	8	17
85-90	87.5	###	5	22
90-95	92.5	### //	7	29
95-100	97.5	///	3	32
100-105	102.5		0	32
105-110	107.5	///	3	35
SUMA			35	

Figura 13-3

Los números 70, 75, 80, ..., se llama los *límites de clase*. Si los datos individuales caen en un límite de clase, comúnmente se le asigna a la clase más alta; por ejemplo, el número 95 se colocó en la clase 95-100. A veces una tabla de frecuencia también tiene un listado de cada valor de clase, o sea del punto medio del intervalo de clase, que sirve como una aproximación a los valores en el intervalo. El histograma correspondiente a la fig. 13-3 aparece en la fig. 13-4.

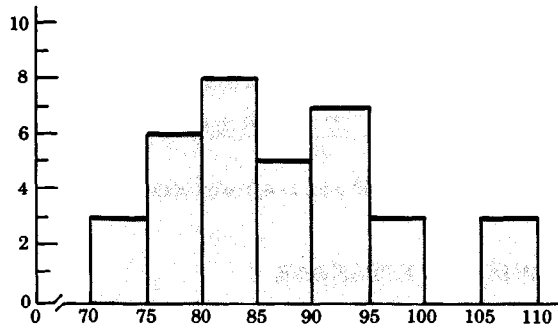


Figura 13-4

### 13.3 MEDIA

Supongamos que nos dan una lista de valores numéricos, digamos ocho números.

7, 11, 11, 8, 12, 7, 6, 6

El *promedio aritmético*, o *media aritmética*, o, simplemente, la *media*, se define como la suma de los valores dividida por el número de valores; o sea,

$$\text{media} = \frac{7 + 11 + 11 + 8 + 12 + 7 + 6 + 6}{8} = \frac{68}{8} = 8.5$$

Hablando en general, si  $x_1, x_2, \dots, x_n$  es una lista de  $n$  valores numéricos, entonces la media de los números, denotada por  $\bar{x}$ , se define como

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum x_i}{n} \quad (13.1)$$

(Para el símbolo de sumatoria, véase la sec. 9.5.)

Supongamos ahora que se organizan los datos en una tabla de frecuencia; supongamos que hay  $t$  valores numéricos *diferentes*,  $x_1, x_2, \dots, x_t$ , que ocurren con una frecuencia respectiva  $f_1, f_2, \dots, f_t$ . Entonces el producto  $f_1 x_1$  da la suma de los  $x_1$ ,  $f_2 x_2$  da la suma de los  $x_2$ , y así sucesivamente. Observe también que

$$f_1 + f_2 + \dots + f_t = n$$

el número total de datos individuales. Por lo tanto, la fórmula (13.1) para la media  $\bar{x}$  se puede escribir de nuevo como

$$\bar{x} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_t x_t}{f_1 + f_2 + \dots + f_t} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} \quad (13.2)$$

Recíprocamente, (13.2) se reduce a (13.1) en el caso especial  $t = n$  y todo  $f_i = 1$ .

Para organizar los datos en clases, uno normalmente aplica (13.2) con  $f_i$  interpretado como la frecuencia la clase  $i$ ,  $x_i$ .

**EJEMPLO 13.3**

- (a) Considere los datos del ejemplo 13.1, para los cuales se da la distribución de frecuencia en la fig. 13-1. La media es

$$\bar{x} = \frac{8(1) + 14(2) + 7(3) + 12(4) + 3(5) + 1(6)}{45} = \frac{126}{45} = 2.8$$

En otras palabras, hay un promedio de 2.8 inquilinos por apartamento.

- (b) Considere los datos del ejemplo 13.2, para los cuales se da la distribución de frecuencia en la fig. 13-3. Usando los valores de clase como aproximaciones a los datos originales, obtenemos

$$\bar{x} = \frac{3(72.5) + 6(77.5) + 8(82.5) + 5(87.5) + 7(92.5) + 0(102.5) + 3(107.5)}{35} = \frac{3042}{35} = 86.9$$

o sea que la temperatura a media a las 6:00 p.m. es aproximadamente 86.9 F.

**13.4 VARIANZA, DESVIACION ESTANDAR**

Considere las dos listas siguientes de valores numéricos:

Lista A: 12, 10, 9, 9, 10

Lista B: 7, 10, 14, 11, 8

Para cada lista, la media es  $\bar{x} = 10$ . Observe que los valores de la lista A están más apiñados alrededor de la media que los valores de la lista B. En esta sección discutiremos una manera importante de medir tal dispersión de datos.

Sea  $\bar{x}$  la media de los  $n$  valores  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . A la diferencia  $x_i - \bar{x}$  se le llama la *desviación* del valor  $x_i$  de la media  $\bar{x}$ ; esta es positiva o no negativa según que  $x_i$  sea mayor o menor que  $\bar{x}$ . Al promedio de los cuadrados de las desviaciones se le llama la *varianza* de los datos, y a la raíz cuadrada de la varianza se le llama la *desviación estándar*. O sea,

$$\text{varianza} = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} \quad (13.3)$$

$$\text{desviación estándar} = \sqrt{\text{varianza}} \quad (13.4)$$

Como cada cuadrado de desviaciones es no negativo, también lo es la varianza. Aún más, la varianza es cero si y solamente si los valores de los datos son todos iguales (y por lo tanto iguales a la media).

Una fórmula equivalente para (13.3) es

$$\text{varianza} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - \bar{x}^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2 \quad (13.5)$$

A veces  $s$  o  $s_x$  denota la desviación estándar de los  $x_i$ , en cuyo caso  $s^2$  o  $s_x^2$  designará la varianza de los  $x_i$ .

**EJEMPLO 13.4**

- (a) Considere la anterior lista A, cuya media es  $\bar{x} = 10$ . La desviación de los cinco valores son:

$$12 - 10 = 2 \quad 10 - 10 = 0 \quad 9 - 10 = -1 \quad 9 - 10 = -1 \quad 10 - 10 = 0$$

Los cuadrados de las desviaciones son entonces

$$2^2 = 4 \quad 0^2 = 0 \quad (-1)^2 = 1 \quad (-1)^2 = 1 \quad 0^2 = 0$$

Por lo tanto,

$$\text{varianza} = \frac{4 + 0 + 1 + 1 + 0}{5} = \frac{7}{5} = 1.4$$

$$\text{desviación estándar} = \sqrt{1.4} \approx 1.2$$

(b) Considere la lista B anterior, cuya media es  $\bar{x} = 10$ . Por (13.3),

$$\text{varianza} = \frac{(7-10)^2 + (10-10)^2 + (14-10)^2 + (11-10)^2 + (8-10)^2}{5} = \frac{9+0+16+1+4}{5} = \frac{30}{5} = 6$$

Alternativamente, por (13.5),

$$\text{varianza} = \frac{7^2 + 10^2 + 14^2 + 11^2 + 8^2}{5} - 10^2 = \frac{49 + 100 + 196 + 121 + 64}{5} - 100 = 106 - 100 = 6$$

Así  $\text{desviación estándar} = \sqrt{6} \approx 2.4$

Observe que la lista B, que está mucho más esparcida que la lista A, tiene una varianza (y una desviación estándar) mucho mayor.

Para datos organizados en una distribución de frecuencia —digamos,  $t$  valores diferentes  $x_1, x_2, \dots, x_t$  con frecuencias respectivas  $f_1, f_2, \dots, f_t$ — el producto  $f_1(x_1 - \bar{x})^2$  da la suma de los cuadrados de las desviaciones de los  $x_i$  de  $\bar{x}$ , etc. Así podemos escribir (13.3) y (13.5) de nuevo como

$$\text{varianza} = \frac{f_1(x_1 - \bar{x})^2 + f_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + f_t(x_t - \bar{x})^2}{f_1 + f_2 + \dots + f_t} = \frac{\sum f_i(x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i} \quad (13.6)$$

$$\text{varianza} = \frac{f_1x_1^2 + f_2x_2^2 + \dots + f_tx_t^2}{f_1 + f_2 + \dots + f_t} - \bar{x}^2 = \frac{\sum f_ix_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2 \quad (13.7)$$

Comúnmente se prefiere (13.7) a (13.6) para efectos de cómputo, ya que solamente requiere una resta.

De nuevo, si los datos se organizan en clases, uno usa los valores de clase como aproximaciones a los valores originales.

**EJEMPLO 13.5** Para los datos del ejemplo 13.1, la fig. 13-1 se expande a la fig. 13-5, de la cual obtenemos:

$$\bar{x} = \frac{\sum f_ix_i}{\sum f_i} = \frac{126}{45} = 2.8$$

$$\text{varianza} = \frac{\sum f_ix_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2 = \frac{430}{45} - (2.8)^2 = 9.56 - 7.84 = 1.72$$

$$\text{desviación estándar} = \sqrt{\text{varianza}} = \sqrt{1.72} = 1.31$$

Número de personas, $x_i$	Frecuencia $f_i$	$f_ix_i$	$x_i \cdot f_ix_i = f_ix_i^2$	Frecuencia acumulada
1	8	8	8	8
2	14	28	56	22
3	7	21	63	29
4	12	48	192	41
5	3	15	75	44
6	1	6	36	45
SUMAS	45	126	430	

Figura 13-5

**EJEMPLO 13.6** Trescientos nuevos estudiantes presentan un examen de matemáticas que consta de 75 preguntas de escogencia múltiple. Si la distribución de las notas del examen es

Notas	5-15	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65	65-75
Número de estudiantes	2	0	8	36	110	78	66

encuentre la media  $\bar{x}$ , la varianza  $s^2$ , y la desviación estándar  $s$  de la distribución.

Completamos las primeras cuatro columnas en la fig. 13-6 para obtener

$$\bar{x} = \frac{16\,500}{300} = 55$$

Usando este valor para la mediana, completamos el resto de las columnas en la fig. 13-6 y obtenemos

$$s^2 = \frac{36\,700}{300} = 122.3$$

$$s = \sqrt{122.3} = 11.1$$

Observe que aquí usamos (13.6) para la varianza.

Límites de clase	Valor de clase $x_i$	Frecuencia $f_i$	$f_i x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i(x_i - \bar{x})^2$	Frecuencia acumulada
5-15	10	2	20	-45	2025	4 050	2
15-25	20	0	0	-35	1525	0	2
25-35	30	8	240	-25	625	5 000	10
35-45	40	36	1 440	-15	225	8 100	46
45-55	50	110	5 500	-5	25	2 750	156
55-65	60	78	4 680	5	25	1 950	234
65-75	70	66	4 620	15	225	14 850	300
SUMAS		300	16 500			36 700	

Figura 13-6

La figura 13-7 es el diagrama de flujo de un programa de computador que calcula la media MEDIA, la varianza VAR [con base en (13.7)], y la desviación estándar DE, en donde los datos de entrada son los valores  $X_1, X_2, \dots, X_T$  con respecto a las frecuencias  $F_1, F_2, \dots, F_T$ . Observe que necesitamos las sumas

$$N = \sum F_k \quad \text{SUMA} = \sum F_k X_k \quad \text{SUMACR} = \sum F_k X_k^2$$

cada una de las cuales se inicializa en cero.

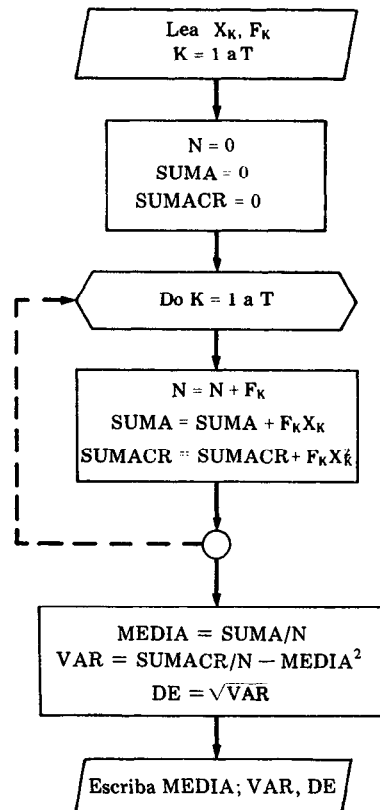


Figura 13-7

### 13.5 MEDIANA, MODA

Fuera de la media, hay otras dos medidas que sirven para definir lo que pudiéramos llamar el “centro” de un conjunto de datos numéricos.

#### Mediana

Considere una colección de  $n$  valores de datos que se ordenan en orden creciente. La *mediana* de los datos es el “punto medio”. O sea, si  $n$  es impar, entonces la mediana es el término  $(n + 1)/2$ ; pero si  $n$  es par, entonces la mediana es el promedio entre los términos  $n/2$  y  $n/2 + 1$ . Por ejemplo, considere las dos listas siguientes de números ordenados:

Lista A: 11, 11, 16, 17, 25

Lista B: 1, 4, 8, 8, 10, 16, 16, 19

La lista A tiene cinco términos; su mediana es 16, el término del medio o tercero. La lista B tiene ocho términos; su mediana es 9, el promedio de los términos cuarto, 8, y quinto, 10. Para cualquier colección de valores de datos (ordenados o no), observamos que tantos números serán menores o iguales que la mediana como mayores o iguales que esta. La distribución de frecuencia acumulada se puede usar para encontrar la mediana de un conjunto arbitrario de datos.



## Moda

La *moda* de una colección de valores de datos es aquel valor o valor de clase que ocurre más frecuentemente. Algunas colecciones tienen más de una moda; se llaman entonces *multi-modales*. Por ejemplo, la única moda de la lista A arriba es 11, ya que este número ocurre dos veces mientras que los otros números ocurren solamente una vez. Por otra parte, la lista B es bimodal; tiene dos modas, 8 y 16.

### EJEMPLO 13.7

- Considere los datos de la fig. 13-1. Hay  $n = 45$  valores. La columna de frecuencia acumulada nos dice que la mediana es 3, el valor 23-avo. La moda es 2, ya que 2 tiene la frecuencia más alta.
- Considere los datos de la fig. 13-3. La mediana es 87.5, el valor 18-avo aproximado; la moda es 82.5, ya que su clase tiene la frecuencia más alta.
- Considere los datos de la fig. 13-6. Observe que  $n = 300$ . La mediana y moda para esta distribución es el valor de clase 50.

## 13.6 VARIABLES ALEATORIAS

Frecuentemente queremos asignar un número específico a cada elemento de un espacio finito muestral  $S$ , especialmente cuando los elementos no son números. A una tal asignación,  $X$ , se le llama una *variable aleatoria* (en  $S$ ). O sea,

**Definición:** una variable aleatoria  $X$  en un espacio muestral  $S$  es una función de  $S$  en los números reales  $R$ .

**EJEMPLO 13.8** Considere el espacio muestral de los resultados de echar dos monedas:

$$S = \{CC, CS, SC, SS\}$$

- Sea  $X_1$  la variable aleatoria en  $S$  definida por

$$X_1(CC) = 1, X_1(CS) = 2, X_1(SC) = 3, X_1(SS) = 4$$

o sea, la imagen de  $X_1$  es el conjunto de los números reales

$$S' = \{1, 2, 3, 4\}$$

Podría resultar conveniente, para cualquier consideración posterior del experimento, tomar  $S'$  como el espacio muestral, en lugar de  $S$ .

- Supongamos que estuviéramos interesados solamente en el número de caras que ocurren. Entonces podríamos definir una variable aleatoria  $X_2$  en  $S$  por

$$X_2(CC) = 2, X_2(CS) = 1, X_2(SC) = 1, X_2(SS) = 0$$

y considerar  $S'' = \{0, 1, 2\}$ , la imagen de  $X_2$ , como el nuevo espacio muestral de resultados.

Sea ahora  $S$  un espacio finito de probabilidad (sección 12.3), y sea  $X$  una variable aleatoria en  $S$  cuyos valores son los números reales  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_t$ . (Como  $S$  es finito,  $X$  solamente puede tener un número finito de valores; llamamos a  $X$  una variable aleatoria *discreta*.) Entonces la asignación existente de probabilidades a los puntos muestrales de  $S$  induce una asignación de probabilidades a los puntos  $x_i$  de la imagen de  $X$ , como sigue:

$$p_i = P(x_i) = \text{suma de probabilidad de los puntos de } S \text{ cuya imagen sea } x_i \quad (13.8)$$

En otras palabras, una variable aleatoria transforma un espacio finito de probabilidad en un espacio finito de probabilidad de números reales, asignándose probabilidades a los puntos del nuevo espacio de acuerdo con la regla (13.8).

La función que le asigna  $p_i$  a  $x_i$ , o sea el conjunto de parejas ordenadas  $(x_1, p_1), \dots, (x_t, p_t)$ , se da usualmente con una tabla y se llama la *distribución* de la variable aleatoria  $X$ . Tam-

bién se dice que “ $X$  toma los valores de la variable  $x_i$  con probabilidad  $p_i$ ”, o, en términos del nuevo espacio muestral, que “ $x_i$  ocurre con probabilidad  $p_i$ ”.

$x_1$	$x_2$	$\cdots$	$x_i$
$p_1$	$p_2$	$\cdots$	$p_i$

En caso de que  $S$  sea un espacio equiprobable, fácilmente podemos obtener la distribución de una variable aleatoria en  $S$  con el siguiente resultado.

**Teorema 13.1:** Sea  $S$  un espacio finito equiprobable y  $X$  una variable aleatoria en  $S$ , con valores  $x_1, x_2, \dots, x_t$ . Entonces

$$P_i = P(x_i) \frac{\text{número de puntos en } S \text{ cuya imagen es } x_i}{\text{número de puntos en } S}$$

( $i = 1, 2, \dots, t$ ) da la distribución de  $X$ .

### EJEMPLO 13.9

- (a) Se lanza un par de dados no cargados. Obtenemos un espacio equiprobable  $S$  que consta de 36 parejas ordenadas de enteros de 1 a 6 :  $S = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 6)\}$ . Sea  $X$  la variable aleatoria que le asigna a cada elemento de  $S$  la suma de los dos enteros.  $X$  toma entonces los valores

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

Usamos el teorema 13.1 para obtener la distribución de  $X$ . Solamente hay un punto, (1, 1), cuya imagen es 2; por lo tanto  $P(2) = 1/36$ . Hay dos puntos en  $S$ , (1, 2) y (2, 1), con imagen 3; por lo tanto  $P(3) = 2/36$ . Hay tres puntos en  $S$ , (1, 3), (2, 2), y (3, 1), con imagen 4; por lo tanto  $P(4) = 3/36$ . Y así sucesivamente. La distribución de  $X$  consta de sus valores y sus respectivas probabilidades:

$x_i$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p_i$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

- (b) Se seleccionan aleatoriamente tres artículos de una caja que contiene 12 artículos de los cuales 3 son defectuosos. El espacio muestral consta de las diferentes, igualmente probables muestras de tamaño 3. Sea  $X$  la variable aleatoria que cuenta el número de artículos defectuosos en una muestra; los valores de  $X$  son 0, 1, 2, y 3.

Ahora el número de puntos muestrales en  $S$  que corresponden a  $x_i$  artículos defectuosos es igual al número de maneras como se pueden escoger  $x_i$  artículos defectuosos entre 3 artículos defectuosos y de escoger  $3 - x_i$  artículos no defectuosos entre 9:

$$\binom{3}{x_i} \binom{9}{3-x_i}$$

El número total de puntos muestrales en  $S$  es

$$\binom{12}{3}$$

Así, por el teorema 13.1, la probabilidad del valor  $x_i$  de  $X$  es

$$p_i = \frac{\binom{3}{x_i} \binom{9}{3-x_i}}{\binom{12}{3}} \quad (x_i = 0, 1, 2, 3)$$

Esta es la distribución de  $X$ , en forma funcional. (Se le llama una distribución hipergeométrica.) En forma tabular, tenemos:

$x_i$	0	1	2	3
$p_i$	84/220	108/220	27/220	1/220

### Funciones de variables aleatorias

Si  $X$  es una variable aleatoria (discreta) en un espacio finito de probabilidad  $S$ , entonces también lo es  $Y = f(X)$ , en donde  $f(\cdot)$  es cualquier función de valor real. La distribución de  $Y$  se obtiene de la distribución de  $X$  por una regla análoga a (13.8); específicamente,

$$P(y_k) = \text{suma de probabilidades de todas las } x_i \text{ tales que } y_k = f(x_i) \quad (13.9)$$

**EJEMPLO 13.10** Calculemos la distribución de  $Y = (X - 2)^2$ , en donde  $X$  es la variable aleatoria del ejemplo 13.9(b).

Los valores  $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, y x_4 = 3$  de  $X$  tienen como sus imágenes respectivas  $(2 - 2)^2 = 0$ , y  $(3 - 2)^2 = 1$ . Así, los valores de  $Y$  son  $y_1 = 0, y_2 = 1, y y_3 = 4$ ; y, por (13.9),

$$\begin{aligned} P(y_1) &= P(x_3) = \frac{27}{220} \\ P(y_2) &= P(x_2) + P(x_4) = \frac{108}{220} + \frac{1}{220} = \frac{109}{220} \\ P(y_3) &= P(x_1) = \frac{84}{220} \end{aligned}$$

en forma tabular, la distribución de  $Y$  es:

$y_k$	0	1	4
$p_k$	27/220	109/220	84/220

### 13.7 ESPERANZA Y VARIANZA DE UNA VARIABLE ALEATORIA

Sea  $X$  una variable aleatoria discreta en un espacio muestral  $S$ ;  $X$  toma los valores  $x_1, x_2, \dots, x_t$  con probabilidades respectivas  $p_1, p_2, \dots, p_t$ . Supongamos ahora que se repite  $n$  veces el experimento que genera  $S$ , y que los números  $x_1, x_2, \dots, x_t$  ocurren con frecuencias respectivas  $f_1, f_2, \dots, f_t$  ( $\sum f_i = n$ ). Si  $n$  es grande, se espera que

$$\frac{f_1}{n} \approx p_1 \quad \frac{f_2}{n} \approx p_2 \quad \dots \quad \frac{f_t}{n} \approx p_t$$

y que (13.2) se vuelva

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_t x_t}{n} = \frac{f_1}{n} x_1 + \frac{f_2}{n} x_2 + \dots + \frac{f_t}{n} x_t \\ &\approx x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_t p_t \end{aligned}$$

La última expresión depende solamente de la distribución de la variable  $X$ ; se denota  $\mu$  (o  $\mu_x$ ) o  $E(X)$ , y se llama la *media* o *esperanza* o *valor esperado* de  $X$ .

Análogamente para  $n$  grande tenemos de (13.6):

$$\begin{aligned} \text{varianza} &= \frac{f_1(x_1 - \bar{x})^2 + f_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + f_t(x_t - \bar{x})^2}{n} \\ &= \frac{f_1}{n} (x_1 - \bar{x})^2 + \frac{f_2}{n} (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + \frac{f_t}{n} (x_t - \bar{x})^2 \\ &\approx (x_1 - \mu)^2 p_1 + (x_2 - \mu)^2 p_2 + \dots + (x_t - \mu)^2 p_t \end{aligned}$$

De nuevo, la última expresión depende solamente de la distribución de  $X$ ; se designa por  $\sigma^2$  (o  $\sigma_x^2$ )  $\text{Var}(X)$  y se llama la *varianza* de  $X$ .

Repetimos formalmente los anteriores resultados como una

**Definición:** Supongamos que una variable aleatoria  $X$  toma los valores  $x_1, x_2, \dots, x_t$  con probabilidades respectivas  $p_1, p_2, \dots, p_t$ . Entonces

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_t p_t = \sum x_i p_i \quad (13.10)$$

(también denotado  $\mu$  o  $\mu_x$ ) se llama la *media* o *esperanza* o *valor esperado* de  $X$ . Aún más,

$$\text{Var}(X) = (x_1 - \mu)^2 p_1 + (x_2 - \mu)^2 p_2 + \dots + (x_t - \mu)^2 p_t = \sum (x_i - \mu)^2 p_i \quad (13.11)$$

(también denotado  $\sigma^2$  o  $\sigma_x^2$ ) se llama *varianza* de  $X$ . La cantidad

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

(también denotado  $\sigma_x$ ) se llama *desviación estándar* de  $X$ .

Una propiedad importante de la esperanza es su linealidad; si  $X_1$  y  $X_2$  son variables aleatorias en un espacio finito de probabilidad  $S$ , y  $c_1$  y  $c_2$  son constantes, entonces  $c_1 X_1 + c_2 X_2$  es una variable aleatoria en  $S$  y

$$E(c_1 X_1 + c_2 X_2) = c_1 E(X_1) + c_2 E(X_2) \quad (13.13)$$

(véase el problema 13.8). Aún más, dada una función de una variable aleatoria,  $Y = f(X)$ , es posible calcular la esperanza de  $Y$  directamente de la distribución de  $X$ , sin calcular primero la distribución de  $Y$ . En efecto, (13.9) implica

**Teorema 13.2:** Si  $Y = f(X)$ , en donde la variable aleatoria discreta  $X$  toma los valores  $x_1, x_2, \dots, x_t$  con probabilidades  $p_1, p_2, \dots, p_t$ , entonces

$$E(Y) = f(x_1)p_1 + f(x_2)p_2 + \dots + f(x_t)p_t = \sum f(x_i)p_i$$

**EJEMPLO 13.11** A partir de la ecuación (13.11) y del teorema 13.2, vemos que la varianza de  $X$  también puede escribirse como

$$\text{Var}(X) = E[(X - \mu)^2]$$

Entonces, por la linealidad,

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E[(X - \mu)^2] = E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) = E(X^2) - 2\mu E(X) + E(\mu^2) \\ &= E(X^2) - 2\mu \cdot \mu + \mu^2 = E(X^2) - \mu^2 \end{aligned}$$

y así, de nuevo usando el Teorema 13.2,

$$\text{Var}(X) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + \dots + x_t^2 p_t - \mu^2 = \left( \sum x_i^2 p_i \right) - \mu^2$$

La ecuación (13.14) es la análoga de (13.7); se puede usar como una alternativa más simple a la definición (13.11).

**EJEMPLO 13.12** Considere la variable aleatoria  $X$  del ejemplo 13.9(b), que da el número de artículos defectuosos en una muestra de tamaño 3. Tenemos

$$\mu = E(X) = 0\left(\frac{84}{220}\right) + 1\left(\frac{108}{220}\right) + 2\left(\frac{27}{220}\right) + 3\left(\frac{1}{220}\right) = \frac{3}{5}$$

O sea,  $3/5$  es el número esperado de artículos defectuosos en una muestra de tamaño 3. También se tiene que, de (13.14),

$$\text{Var}(X) = 0^2\left(\frac{84}{220}\right) + 1^2\left(\frac{108}{220}\right) + 2^2\left(\frac{27}{220}\right) + 3^2\left(\frac{1}{220}\right) - \left(\frac{3}{5}\right)^2 \approx 0.663$$

y, de esto,  $\sigma \approx \sqrt{0.663} \approx 0.81$ .

**EJEMPLO 13.13** Un jugador lanza un dado no cargado. Si aparece un número primo, él gana ese número de dólares; pero si aparece un número no primo, él pierde ese número de dólares. ¿Es este juego justo?

Denote la ganancia del jugador por una variable aleatoria  $X$ , definida en un espacio equiprobable

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

de resultados del lanzamiento. La distribución de  $X$  es como sigue:

$x_i$	2	3	5	-1	-4	-6
$p_i$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Los valores negativos  $-1$ ,  $-4$  y  $-6$  corresponden al hecho de que el jugador pierde cuando salen números no primos. Entonces

$$E(X) = 2(1/6) + 3(1/6) + 5(1/6) + (-1)(1/6) + (-4)(1/6) + (-6)(1/6) = -1/6$$

Para un juego justo,  $E(X) = 0$ ; el juego es no favorable para el jugador, ya que puede esperar perder un sexto de dólar cada vez que juegue. La cantidad  $E(X)$  es frecuentemente llamado el *valor del juego* para el jugador.

### Variables aleatorias binomialmente distribuidas

Considere la variable aleatoria  $X_n$ , definida en el espacio muestral de resultados de  $n$  pruebas repetidas de un experimento éxito-fracaso, que da el número de éxitos. Como se mostró en la sección 12.7, la distribución de  $X$  es la distribución binomial:

$$P(k) = b(k; n, p) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

o sea,

$k$	0	1	2	...	$n$
$P(k)$	$q^n$	$\binom{n}{1} p q^{n-1}$	$\binom{n}{2} p^2 q^{n-2}$	...	$p^n$

en donde  $p = 1 - q$  es la probabilidad de un éxito en una sola prueba.

Ahora se pueden calcular la media y varianza de  $X_n$  a partir de (13.10) y (13.14); establecemos estos resultados como

**Teorema 13.3:**

$$\begin{aligned} E(X_n) &= np \\ \text{Var}(X_n) &= npq \end{aligned}$$

**EJEMPLO 13.14** Si se lanza un dado no cargado 180 veces, el número esperado de veces que cae seis es

$$\mu = np = 180 \left( \frac{1}{6} \right) = 30$$

También, la desviación estandar del número de veces que cae seis es

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{180 \left( \frac{1}{6} \right) \left( \frac{5}{6} \right)} = 5$$

## Problemas resueltos

### ESTADISTICA

**13.1** Encuentre la (a) media, (b) varianza, (c) desviación estandar, (d) mediana, y (e) moda, de los seis números 4, 6, 6, 7, 9, 10.

(a) La media o promedio aritmético es igual a la suma de los seis números dividida por seis:

$$\text{media} = \frac{4+6+6+7+9+10}{6} = \frac{42}{6} = 7$$

(b) La varianza es el promedio de los cuadrados de las desviaciones de la media:

$$\begin{aligned}\text{varianza} &= \frac{(4-7)^2 + (6-7)^2 + (6-7)^2 + (7-7)^2 + (9-7)^2 + (10-7)^2}{6} \\ &= \frac{9+1+1+0+4+9}{6} = \frac{24}{6} = 4\end{aligned}$$

(c) La desviación estandar es la raíz cuadrada de la varianza:

$$\text{desviación estándar} = \sqrt{4} = 2$$

(d) Hay dos números en la mitad, el tercero y el cuarto, que son 6 y 7. La mediana es su promedio:

$$\text{mediana} = \frac{6+7}{2} = 6.5$$

(e) La moda es 6, ya que 6 es el número que más ocurre.

**13.2** Los resultados de un examen de 20 preguntas en un curso son los siguientes:

Número de respuestas correctas, $x$	20	19	18	17	16	15	14	13	12	10	9
Número de estudiantes	4	6	2	7	1	2	7	2	1	2	1

Encuentre la (a) media  $\bar{x}$ , (b) varianza  $s^2$ , (c) desviación estándar  $s$ , (d) mediana, (e) moda.

Complete una tabla como la de la fig. 13-8. Entonces:

(a)  $\bar{x} = \frac{560}{35} = 16$

(b)  $s^2 = \frac{9278}{35} - \bar{x}^2 = 265.1 - 256 = 9.1$

(c)  $s = \sqrt{9.1} = 3.0$

(d) La mediana es 17, ya que ésta es la nota del estudiante 18-avo (18-avo hacia abajo o hacia arriba).

(e) Hay dos modas, 14 y 17.

**13.3** La precipitación de lluvias anual, aproximada a décimas de centímetro, para un período de 30 años es como sigue:

42.3 35.7 47.6 31.2 28.3 37.0 41.3 32.4 41.3 29.3  
 34.3 35.2 43.0 36.3 35.7 41.5 43.2 30.7 38.4 46.5  
 43.2 31.7 36.8 43.6 45.2 32.8 30.7 36.2 34.7 35.3

Nota del examen $x_i$	Frecuencia $f_i$	Frecuencia acumulada	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
20	4	4	80	1600
19	6	10	114	2166
18	2	12	36	648
17	7	19	119	2023
16	1	20	16	256
15	2	22	30	450
14	7	29	98	1372
13	2	31	26	338
12	1	32	12	144
10	2	34	20	200
9	1	35	9	81
SUMAS	35		560	9278

Figura 13-8

Límites de clase cm	Valor de clase, $x_i$	Conteo	Frecuencia $f_i$	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
28-30	29	//	2	58	1 682
30-32	31	////	4	124	3 844
32-34	33	//	2	66	2 178
34-36	35	### /	6	210	7 350
36-38	37	////	4	148	5 476
38-40	39	/	1	39	1 521
40-42	41	///	3	123	5 043
42-44	43	###	5	215	9 245
44-46	45	/	1	45	2 025
46-48	47	//	2	94	4 418
SUMAS			30	1122	42 782

Figura 13-9

- (a) Clasifique los datos y construya una distribución de frecuencia.  
 (b) Encuentre la media, varianza, y desviación estándar de los datos por clases.  
 (a) Encuentre primero el *recorrido* de los datos (valor máximo menos valor mínimo):

$$\text{recorrido} = 47.6 - 28.3 = 19.3 \text{ cm}$$

La selección de las clases es arbitraria, aunque normalmente se cubre el recorrido con 7 a 12 clases. Escogemos diez clases con límites de clase 28–30, 30–32, 32–34, ..., 46–48. Podemos completar una tabla como la de la fig. 13-9.

- (b) De la figura 13-9.

$$\text{media} = \frac{1122}{30} = 37.4 \text{ cm}$$

$$\text{varianza} = \frac{42782}{30} - (37.4)^2 = 27.3 \text{ cm}^2$$

$$\text{desviación estándar} = \sqrt{27.3} = 5.2 \text{ cm}$$

Observe que la desviación estándar, como la media, va con las mismas unidades de los datos originales.

### VARIABLES ALEATORIAS, ESPERANZA

13.4 Se lanza un par de dados no cargados. Sea  $X$  el máximo de los dos números que salgan.

- (a) Encuentre la distribución de  $X$ . (b) Encuentre la esperanza  $E(X)$ , varianza  $\text{Var}(X)$ , y desviación estándar  $\sigma_X$ .

- (a) El espacio muestral  $S$  es el espacio equiprobable que consta de 36 parejas ordenadas de enteros entre 1 y 6; o sea,

$$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (6, 6)\}$$

Como  $X$  asigna a cada elemento de  $S$  el mayor de los dos enteros, los valores de  $X$  son los enteros de 1 a 6. Hay solamente un punto de  $S$ , (1, 1), que da un máximo de 1; así (Teorema 13.1)  $P(1) = 1/36$ . Cada uno de tres puntos en  $S$ , (1, 2), (2, 2) y (2, 1), da un máximo de 2; así  $P(2) = 3/36$ . Cada uno de tres puntos en  $S$ , (1, 3), (2, 3), (3, 3), (3, 2) y (3, 1), da 3; así  $P(3) = 5/36$ . Similarmente,  $P(4) = 7/36$  y  $P(5) = 9/36$  y  $P(6) = 11/36$ .

La distribución de  $X$ , que consta de sus valores con sus probabilidades respectivas, se da en la siguiente tabla:

$x_i$	1	2	3	4	5	6
$p_i$	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36

- (b) Encontramos la esperanza (media) de  $X$  multiplicando cada  $x_i$  por su probabilidad  $P_i$  y luego se suma:

$$\mu = E(X) = 1\left(\frac{1}{36}\right) + 2\left(\frac{3}{36}\right) + 3\left(\frac{5}{36}\right) + 4\left(\frac{7}{36}\right) + 5\left(\frac{9}{36}\right) + 6\left(\frac{11}{36}\right) = \frac{161}{36} \approx 4.5$$

Encontramos  $E(X^2)$  multiplicando  $x_i^2$  por  $p_i$  y sumando:

$$E(X^2) = 1\left(\frac{1}{36}\right) + 4\left(\frac{3}{36}\right) + 9\left(\frac{5}{36}\right) + 16\left(\frac{7}{36}\right) + 25\left(\frac{9}{36}\right) + 36\left(\frac{11}{36}\right) = \frac{791}{36} = 22.0$$

Entonces

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - \mu^2 = 22.0 - (4.5)^2 = 1.7 \quad \text{y} \quad \sigma_X = \sqrt{1.7} = 1.3$$



13.5 Sea  $X$  la variable aleatoria con la siguiente distribución:

$x_i$	1	3	4	5
$p_i$	0.4	0.1	0.2	0.3

- (a) Encuentre la media  $\mu_x$ , varianza  $\sigma_x^2$ , y desviación estándar  $\sigma_x$ .  
 (b) Encuentre la distribución de la variable aleatoria  $Y = X^2 + 2$ .  
 (c) Encuentre la distribución de la variable aleatoria  $Z = \max\{X, 4\}$  (o sea  $Z$  es el mayor de  $X$  y 4). Compute  $\mu_z$  de esta distribución y muestre que el mismo resultado se da con el teorema 13.2.

$$(a) \quad \mu_x = \sum x_i p_i = 1(0.4) + 3(0.1) + 4(0.2) + 5(0.3) = 3$$

$$E(X^2) = \sum x_i^2 p_i = 1(0.4) + 9(0.1) + 16(0.2) + 25(0.3) = 12$$

$$\sigma_x^2 = E(X^2) - \mu_x^2 = 12 - 9 = 3$$

$$\sigma_x = \sqrt{3} = 1.7$$

- (b) Para esta función, valores diferentes de  $X$  dan valores diferentes de  $Y$ :

$$y_1 = x_1^2 + 2 = 1^2 + 2 = 3 \quad y_3 = x_3^2 + 2 = 4^2 + 2 = 18$$

$$y_2 = x_2^2 + 2 = 3^2 + 2 = 11 \quad y_4 = x_4^2 + 2 = 5^2 + 2 = 27$$

Así a cada  $y_i$  se le asigna la probabilidad de  $x_i$ , y la distribución de  $Y$  es

$y_i$	3	11	18	27
$p_i$	0.4	0.1	0.2	0.3

- (c) Aquí  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 3$ , y  $x_3 = 4$  cada uno da el valor  $z_1 = 4$ , mientras que  $x_4 = 5$  da el valor  $z_2 = 5$ . Así hacemos las asignaciones

$$P(z_1) = P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) = 0.4 + 0.1 + 0.2 = 0.7$$

$$P(z_2) = P(x_4) = 0.3$$

y la distribución de  $Z$  es

$z_k$	4	5
$p_k$	0.7	0.3

De esta distribución.

$$\mu_z = 4(0.7) + 5(0.3) (= 4.3)$$

Por otra parte, en términos de la distribución de  $X$ ,

$$\begin{aligned} \mu_z &= [\max\{1, 4\}](0.4) + [\max\{3, 4\}](0.1) + [\max\{4, 4\}](0.2) + [\max\{5, 4\}](0.3) \\ &= 4(0.4) + 4(0.1) + 4(0.2) + 5(0.3) \\ &= 4(0.7) + 5(0.3) \end{aligned}$$

como antes.

- 13.6 Se numeran cinco cartas de 1 a 5. Se sacan dos cartas al azar. Sea  $X$  la suma de los números sacados. Encuentre (a) la distribución de  $X$ ; (b) la media, varianza, y desviación estándar de  $X$ .

- (a) Hay  $C(5, 2) = 10$  maneras de sacar dos cartas al azar. Los diez puntos muestrales equiprobables, con sus respectivos valores  $X$ , se muestran en seguida:

$\{1, 2\} \rightarrow 3$	$\{1, 3\} \rightarrow 4$	$\{1, 4\} \rightarrow 5$	$\{1, 5\} \rightarrow 6$	$\{2, 3\} \rightarrow 5$
$\{2, 4\} \rightarrow 6$	$\{2, 5\} \rightarrow 7$	$\{3, 4\} \rightarrow 7$	$\{3, 5\} \rightarrow 8$	$\{4, 5\} \rightarrow 9$

Observe que los valores de  $X$  son los siete números 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9; de estos 3, 4, 6 y 9 cada uno corresponde a un punto muestral, mientras que 5, 6, y 7 cada uno corresponde a dos puntos muestrales. Así la distribución de  $X$  es:

$x_i$	3	4	5	6	7	8	9
$p_i$	0.1	0.1	0.2	0.2	0.2	0.1	0.1

$$(b) \quad \mu = E(X) = \sum x_i p_i = 3(0.1) + 4(0.1) + 5(0.2) + 6(0.2) + 7(0.2) + 8(0.1) + 9(0.1) = 6$$

$$E(X^2) = \sum x_i^2 p_i = 9(0.1) + 16(0.1) + 25(0.2) + 36(0.2) + 49(0.2) + 64(0.1) + 81(0.1) = 39$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - \mu^2 = 39 - 6^2 = 3$$

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{3} = 1.7$$

- 13.7 Se lanza un dado no cargado. Sea  $X$  el doble del número que salga, e  $Y$  1 ó 3 según que el número que salga sea impar o par. Encuentre la distribución (a) de  $X$ , (b) de  $Y$ .

El espacio muestral es  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , con cada punto muestral con probabilidad  $1/6$ .

- (a) Las imágenes de los puntos muestrales son:

$$X(1) = 2 \quad X(2) = 4 \quad X(3) = 6 \quad X(4) = 8 \quad X(5) = 10 \quad X(6) = 12$$

Como estas son diferentes, la distribución de  $X$  es

$x_i$	2	4	6	8	10	12
$P(x_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

- (b) Las imágenes de los puntos muestrales son:

$$Y(1) = 1 \quad Y(2) = 3 \quad Y(3) = 1 \quad Y(4) = 3 \quad Y(5) = 1 \quad Y(6) = 3$$

Los dos valores de  $Y$ , 1 y 3, cada uno corresponde a tres puntos muestrales. Así tenemos la distribución

$y_i$	1	3
$P(y_i)$	3/6	3/6

- 13.8 Sean  $X$  e  $Y$  variables aleatorias definidas en el mismo espacio finito de probabilidad  $S$ . Entonces  $X + Y$  y  $XY$ , definidas por

$$(X + Y)(s) = X(s) + Y(s) \quad \text{y} \quad (XY)(s) = X(s) Y(s)$$

también son variables aleatorias en  $S$ . En particular, sean  $X$  e  $Y$  las variables aleatorias del problema 13.7. (a) Encuentre la distribución de  $X + Y$ . (b) Encuentre la distribución de  $XY$ . (c) Verifique que  $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ . (d) ¿Es cierto que  $E(XY) = E(X)E(Y)$ ?

El espacio muestral es aún  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , y cada muestral aún tiene probabilidad  $1/6$ .

(a) Usando  $(X + Y)(s) = X(s) + Y(s)$  y los valores de  $X$  e  $Y$  del problema 13.7, obtenemos:

$$\begin{aligned} (X + Y)(1) &= 2 + 1 = 3 & (X + Y)(3) &= 6 + 1 = 7 & (X + Y)(5) &= 10 + 1 = 11 \\ (X + Y)(2) &= 4 + 3 = 7 & (X + Y)(4) &= 8 + 3 = 11 & (X + Y)(6) &= 12 + 3 = 15 \end{aligned}$$

El conjunto de imágenes es  $\{3, 7, 11, 15\}$ . Los valores 3 y 15 cada uno corresponde a solamente un punto muestral y por lo tanto tienen probabilidad  $1/6$ ; los valores 7 y 11 cada uno corresponde a dos puntos muestrales y por lo tanto tienen probabilidad  $2/6$ . Así la distribución de  $Z = X + Y$  es:

$z_i$	3	7	11	15
$P(z_i)$	1/6	2/6	2/6	1/6

(b) Usando  $(XY)(s) = X(s)Y(s)$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} (XY)(1) &= 2 \cdot 1 = 2 & (XY)(3) &= 6 \cdot 1 = 6 & (XY)(5) &= 10 \cdot 1 = 10 \\ (XY)(2) &= 4 \cdot 3 = 12 & (XY)(4) &= 8 \cdot 3 = 24 & (XY)(6) &= 12 \cdot 3 = 36 \end{aligned}$$

Cada valor de  $XY$  corresponde a un punto muestral; así la distribución de  $W = XY$  es:

$w_i$	2	6	10	12	24	36
$P(w_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

(c) Usando la distribución encontrada en el problema 13.7,

$$E(X) = \sum x_i P(x_i) = \frac{2}{6} + \frac{4}{6} + \frac{6}{6} + \frac{8}{6} + \frac{10}{6} + \frac{12}{6} = 7$$

$$E(Y) = \sum y_i P(y_i) = \frac{3}{6} + \frac{9}{6} = 2$$

y usando la distribución encontrada en (a),

$$E(X + Y) = E(Z) = \sum z_i P(z_i) = \frac{3}{6} + \frac{14}{6} + \frac{22}{6} + \frac{15}{6} = 9 = 7 + 2$$

(d) Usando la distribución en (b).

$$E(XY) = E(W) = \sum w_i P(w_i) = \frac{2}{6} + \frac{6}{6} + \frac{10}{6} + \frac{12}{6} + \frac{24}{6} + \frac{36}{6} = 15$$

y  $15 \neq 7 \cdot 2$ . (Para variables aleatorias independientes,  $E(XY) = E(X)E(Y)$ ; debemos, sin embargo, omitir cualquier discusión de este tema.)

**13.9** Se lanza una moneda no cargada hasta que salga una cara o cinco sellos. Encuentre el número esperado de lanzamientos de la moneda.

Como en cualquier problema de probabilidad, uno debe primero identificar los posibles resultados del experimento de que se trata. Hay seis puntos:

C      SC      SSC      SSSC      SSSSC      SSSSS

con probabilidades respectivas (pruebas independientes).

$$\frac{1}{2} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

La variable aleatoria,  $X$ , es el número de componentes en un punto muestral. Así,

$$\begin{array}{lll} X(C) = 1 & X(SSC) = 3 & X(SSSSC) = 5 \\ X(SC) = 2 & X(SSSC) = 4 & X(SSSSS) = 5 \end{array}$$

y a estos valores de  $X$  se les asignan probabilidades

$$\begin{aligned} P(1) = P(C) &= \frac{1}{2} & P(3) = P(SSC) &= \frac{1}{8} & P(5) &= P(SSSSC) + P(SSSSS) \\ & & & & &= \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \frac{1}{16} \\ P(2) = P(SC) &= \frac{1}{4} & P(4) = P(SSSC) &= \frac{1}{16} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$E(X) = 1\left(\frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{1}{4}\right) + 3\left(\frac{1}{8}\right) + 4\left(\frac{1}{16}\right) + 5\left(\frac{1}{16}\right) = 1.9$$

La esperanza está bastante cerca de 2, que (se puede mostrar) es el número esperado de lanzamientos hasta la primera cara.

- 13.10** Una caja contiene 8 bombillos de los cuales 3 son defectuosos. Un bombillo se selecciona de la caja y se prueba, hasta que se coja un bombillo no defectuoso. Encuentre el número esperado de bombillos sacados.

Escribiendo D y N para defectuoso y no defectuoso, respectivamente, tenemos los puntos muestrales.

$$\begin{array}{cccc} N & DN & DDN & DDDN \end{array}$$

con probabilidades correspondientes dadas por el teorema 12.4 como

$$\begin{array}{cccc} \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{56} & \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{56} & \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{5} = \frac{1}{56} \end{array}$$

El número de bombillos sacados,  $X$ , tiene los valores

$$X(N) = 1 \quad X(DN) = 2 \quad X(DDN) = 3 \quad X(DDDN) = 4$$

con las anteriores probabilidades respectivas. Así

$$E(X) = 1\left(\frac{5}{8}\right) + 2\left(\frac{15}{56}\right) + 3\left(\frac{5}{56}\right) + 4\left(\frac{1}{56}\right) = \frac{3}{2}$$

- 13.11** Una caja contiene 10 artículos de los cuales 2 son defectuosos. Si se seleccionan cuatro artículos de la caja, ¿cuál es el número esperado de artículos defectuosos en la muestra de tamaño 4?

Como se ilustra en el ejemplo 13.9(b), la variable aleatoria  $X$  que cuenta el número de artículos defectuosos de una muestra tiene una distribución hipergeométrica, que en este caso está dado por

$$p_i = \frac{\binom{2}{x_i} \binom{8}{4-x_i}}{\binom{10}{4}} \quad (x_i = 0, 1, 2)$$

o

$x_i$	0	1	2
$p_i$	70/210	112/210	28/210

Por lo tanto,

$$E(X) = \sum x_i p_i = 0\left(\frac{70}{210}\right) + 1\left(\frac{112}{210}\right) + 2\left(\frac{28}{210}\right) = \frac{4}{5}$$

Observe que  $E(X) = 4(2/10) = np$ , en donde  $n$  es el tamaño de la muestra y  $p$  es la proporción de artículos defectuosos en la caja. Compare el resultado, que es cierto en general para la distribución hipergeométrica, con el teorema 13.3 para la distribución binomial.

- 13.12 Un jugador lanza dos monedas no cargadas. Gana \$2 si salen 2 caras, y \$1 si sale 1 cara. Por otra parte, pierde \$3 si no sale ninguna cara. Determine el valor esperado del juego y si éste es favorable al jugador.

El espacio muestral es  $S = \{CC, CS, SC, SS\}$  y cada punto muestral tiene probabilidad  $1/4$ . La ganancia para el jugador es

$$X(CC) = \$2 \quad X(CS) = X(SC) = \$1 \quad X(SS) = -\$3$$

y por lo tanto la distribución para  $X$  es

$x_i, \$$	2	1	-3
$p_i$	1/4	2/4	1/4

y

$$E(X) = 2\left(\frac{1}{4}\right) + 1\left(\frac{2}{4}\right) - 3\left(\frac{1}{4}\right) = \$0.25$$

Como  $E(X) > 0$ , el juego es favorable para el jugador.

- 13.13 Un jugador lanza dos monedas no cargadas. Gana \$3 si salen 2 caras, y \$1 si sale 1 cara. Si el juego debe ser justo, ¿cuánto debería perder si no sale ninguna cara?

La ganancia del jugador,  $X$ , tiene la distribución (véase el problema 13.12).

$x_i, \$$	3	1	$x_3$
$p_i$	1/4	2/4	1/4

y

$$E(X) = 3\left(\frac{1}{4}\right) + 1\left(\frac{2}{4}\right) + x_3\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{5 + x_3}{4}$$

Para un juego justo,  $E(X) = 0$ , o  $x_3 = -\$5$ . El jugador debería perder \$5 si no sale ninguna cara.

- 13.14 Demuestre la primera mitad del teorema 13.3:  $E(x_n) = np$ .

En el espacio muestral de  $n$  pruebas repetidas defina las variables aleatorias  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  como el número de éxitos (0 ó 1) en las pruebas primera, segunda,  $\dots$ ,  $n$ -ésima, respectivamente. Entonces cada  $Y_j$  tiene la distribución

$y$	0	1
$P(y)$	$q$	$p$

y el valor esperado  $E(Y_j) = 0(q) + 1(p) = p$ . Ahora, el número total de éxitos es precisamente

$$X_n = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$$

de tal manera que, por la linealidad de la media,

$$\begin{aligned} E(X_n) &= E(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n) = E(Y_1) + E(Y_2) + \dots + E(Y_n) \\ &= p + p + \dots + p = np \end{aligned}$$

- 13.15 Suponiendo que las varianzas de las  $Y_j$  en el problema 13.14 se pueden sumar como las medias, demuestre la segunda mitad del teorema 13.3:

$$\text{Var}(X_n) = npq$$

De la distribución común para las  $Y_j$  encontrada en el problema 13.14,

$$E(Y_j^2) = 0^2(q) + 1^2(p) = p$$

y así

$$\text{Var}(Y_j) = E(Y_j^2) - [E(Y_j)]^2 = p - p^2 = p(1 - p) = pq$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}\text{Var}(X_n) &= \text{Var}(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n) = \text{Var}(Y_1) + \text{Var}(Y_2) + \cdots + \text{Var}(Y_n) \\ &= pq + pq + \cdots + pq = npq\end{aligned}$$

**13.16** Se lanzan cuatro monedas no cargadas. Sea  $X_4$  el número de caras que ocurren. Calcule la esperanza de  $X_4$  directamente, y compare con el teorema 13.3.

$x_4$  tiene una distribución binomial, con  $n = 4$  y  $p = 1/2$ . Tenemos:

$$\begin{aligned}P(0) &= b(0; 4, \tfrac{1}{2}) = 1/16 & P(3) &= b(3; 4, \tfrac{1}{2}) = 4/16 \\ P(1) &= b(1; 4, \tfrac{1}{2}) = 4/16 & P(4) &= b(4; 4, \tfrac{1}{2}) = 1/16 \\ P(2) &= b(2; 4, \tfrac{1}{2}) = 6/16\end{aligned}$$

Así la distribución es

$x_i$	0	1	2	3	4
$p_i$	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16

y la esperanza es

$$E(X_4) = 0\left(\frac{1}{16}\right) + 1\left(\frac{4}{16}\right) + 2\left(\frac{6}{16}\right) + 3\left(\frac{4}{16}\right) + 4\left(\frac{1}{16}\right) = 2$$

Esto será de acuerdo con el Teorema 13.3, que dice que  $E(X_4) = np = 4(1/2) = 2$ .

**13.17** Se lanza un dado no cargado 300 veces. Encuentre el valor esperado,  $\mu$ , y la desviación estándar,  $\sigma$ , de los números de veces que cae seis.

El número de veces que cae seis tiene distribución binomial, con  $n = 300$  y  $p = 1/6$ . Por el teorema 13.3,

$$\mu = np = 300\left(\frac{1}{6}\right) = 50 \quad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{300\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)} = 6.45$$

**13.18** Una familia tiene ocho hijos. (a) Determine el número esperado de niñas, si los niños y las niñas son igualmente probables. (b) Encuentre la probabilidad  $P$  de que el número esperado de niñas en realidad ocurra.

(a) El número de niñas tiene distribución binomial, con  $n = 8$  y  $p = 0.5$ . Por el teorema 13.3, el número esperado de niñas es

$$\mu = np = 8(0.5) = 4$$

$$P = b(4; 8, 0.5) = \binom{8}{4}(0.5)^4(0.5)^4 = 0.27$$

**13.19** Existe una probabilidad fija de que un artículo producido por la fábrica A sea defectuoso. Una remesa de 10 000 artículos de la fábrica A es enviado a su depósito. Muestre

que la desviación estándar de la remesa (o sea el número de artículos defectuosos o no defectuosos) no puede exceder a 50 artículos.

Se trata de una distribución binomial, con  $n = 10\,000$  y  $P$  (que denota o la probabilidad de éxito o la probabilidad de fracaso) desconocida. La varianza de la remesa es entonces,

$$\sigma^2 = npq = np(1-p) = n \left[ \frac{1}{4} - \left( p - \frac{1}{2} \right)^2 \right]$$

El lado derecho es tan grande como sea posible cuando  $p = 1/2$ . Por lo tanto,

$$\sigma^2 \leq \frac{n}{4} = 2500 \quad \text{y} \quad \sigma \leq \sqrt{2500} = 50$$

### Problemas suplementarios

#### ESTADISTICA

**13.20** Los precios de una libra de café en siete almacenes son: \$2.58, \$3.18, \$2.84, \$2.75, \$2.67, \$2.95, \$2.62. Encuentre (a) la media del precio, (b) la mediana del precio.

**13.21** Durante un mes dado, diez vendedores en un almacén de automóviles venden 10, 14, 7, 15, 9, 14, 6, 14, 10 y 11 unidades respectivamente. Encuentre (a) la media, mediana y moda de los datos; (b) la varianza y la desviación estándar de los datos.

**13.22** Durante un período de 30 días, el número diario de camionetas alquiladas en una agencia de alquiler fue el siguiente:

7, 10, 6, 7, 9, 4, 7, 9, 9, 8, 5, 5, 7, 8, 4  
6, 9, 7, 12, 7, 9, 10, 4, 7, 5, 9, 8, 9, 5, 7

(a) Dé la distribución de frecuencia de los datos, (b) Encuentre la media, la varianza, y la desviación estándar.

**13.23** Las cantidades correspondientes a 45 préstamos personales en una compañía de préstamos son las siguientes:

\$700, \$450, \$725, \$1125, \$675, \$1650, \$750, \$400, \$1050  
\$500, \$750, \$850, \$1250, \$725, \$475, \$925, \$1050, \$925  
\$850, \$625, \$900, \$1750, \$700, \$825, \$550, \$925, \$850  
\$475, \$750, \$550, \$725, \$575, \$575, \$1450, \$700, \$450  
\$700, \$1650, \$925, \$500, \$675, \$1300, \$1125, \$775, \$850

Agrupe los datos en clases de a \$200, comenzando con \$400. (a) Encuentre la distribución de frecuencia de los datos de clases, (b) Encuentre la media, la varianza, y la desviación estándar de los datos, usando los valores de clase.

**13.24** Los salarios semanales para un grupo de trabajadores no calificados son los siguientes:

Salarios semanales, \$	140-160	160-180	180-200	200-220	220-240	240-260	260-280
Número de trabajadores	18	24	32	20	8	6	2

Encuentre la media y desviación estándar de los datos.

- 13.25 La siguiente distribución da los números de horas extras trabajadas durante un mes por los empleados de una compañía:

Horas extras, $h$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Empleados	10	2	4	2	6	4	2	4	6	2	8

Encuentre la media, la varianza y la desviación estándar de los datos.

### VARIABLES ALEATORIAS, ESPERANZA

- 13.26 Encuentre la media  $\mu$ , la varianza  $\sigma^2$  y la desviación estándar  $\sigma$  de cada distribución:

(a)

$x_i$	2	3	8
$p_i$	1/4	1/2	1/4

(b)

$x_i$	-2	-1	7
$p_i$	1/3	1/2	1/6

(c)

$x_i$	-1	0	1	2	3
$p_i$	0.3	0.1	0.1	0.3	0.2

- 13.27 Se lanzan un par de dados no cargados. Sea  $X$  la variable aleatoria que denota el mínimo de los dos números que salen. Encuentre la distribución, la media, la varianza y la desviación estándar de  $X$ .
- 13.28 Se lanza una moneda no cargada cuatro veces. Sea  $Y$  la longitud de la sucesión más larga de caras que resulta. Encuentre la distribución, la media, la varianza y la desviación estándar de  $Y$ .
- 13.29 Se seleccionan al azar dos cartas de una caja que contiene cinco cartas numeradas 1, 1, 2, 2 y 3. Sea  $X$  la suma e  $Y$  el máximo de los dos números que salgan. Encuentre la distribución, media, varianza, y la desviación estándar de (a)  $X$ , (b)  $Y$ , (c)  $X + Y$ , (d)  $XY$ . (Véase el problema 13.8 para la definición de  $X + Y$  y  $XY$ .)
- 13.30 Se lanza una moneda no cargada hasta que ocurra una cara o cuatro sellos. Encuentre el número esperado de lanzamientos de la moneda.
- 13.31 Una caja contiene 8 artículos de los cuales 2 son defectuosos. Una persona selecciona 3 artículos de la caja. Encuentre el número esperado de artículos defectuosos sacados.
- 13.32 Una caja contiene 10 transistores de los cuales 2 son defectuosos. Se selecciona un transistor de la caja y se prueba, hasta extraer uno no defectuoso. Encuentre el número esperado de transistores escogidos.
- 13.33 La probabilidad de que un equipo  $A$  gane cualquier juego es 0.5.  $A$  juega con  $B$  en un torneo. El primer equipo en ganar dos juegos seguidos o un total de 3 juegos gana el torneo. Encuentre el número esperado de juegos en el torneo.
- 13.34 Un jugador lanza tres monedas no cargadas. Gana \$5 si salen 3 caras, \$3 si salen 2 caras, y \$1 si sólo sale una cara. Por otra parte, pierde \$15 si salen 3 sellos. Encuentre el valor del juego para el jugador.
- 13.35 Un jugador lanza tres monedas no cargadas. Gana \$8 si salen 3 caras, \$3 si salen 2 caras y \$1 si solamente sale 1 cara. Si el juego debe ser justo, ¿cuánto debería perder si no sale ninguna cara?
- 13.36 Evalúe (a)  $b(3; 6, 0.4)$ , (b)  $b(2; 5, 0.7)$ , (c)  $b(4; 6, 0.3)$ .



- 13.37 Un examen de geología de respuestas múltiples consta de 10 preguntas, con cuatro respuestas posibles para escoger por cada pregunta. ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante pase el examen, si la nota para pasar es el 70%?
- 13.38 El equipo A tiene probabilidad  $p = 0.4$  de ganar cada vez que juegue. Sea  $X$  el número de veces que gana A en cuatro partidos. (a) Encuentre la distribución de  $X$ . (b) Encuentre la media, la varianza, y la desviación estándar de  $X$ .
- 13.39 Se saca una carta de naipes y se vuelve a colocar en una baraja ordinaria de 52 cartas. Encuentre el número de veces que se debe sacar una carta para que (a) haya igual posibilidad de sacar o no sacar un corazón, (b) la probabilidad de sacar un corazón sea más de  $3/4$ .
- 13.40 Sea  $X$  una variable aleatoria binomialmente distribuida con  $E(X) = 2$  y  $\text{Var}(X) = 4/3$ . Tabule la distribución de  $X$ .

### Respuestas a los problemas suplementarios

13.20 (a) \$2.80, (b) \$2.75

13.21 (a) media = 11, mediana = 10.5, moda = 10 y 14; (b) varianza = 9.6, desviación estándar = 3.1.

13.22 (a)

Camionetas	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Días	3	4	2	8	3	7	2	0	1

(b) media = 7.3, varianza = 3.88, desviación estándar = 1.97

13.23 (a)

Cantidad + \$200	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9
Número de préstamos	11	14	10	4	2	1	3

(b) media = \$842, varianza = 109 925  $\$^2$ , desviación estándar = \$332

13.24 media = \$190, desviación estándar = \$31

13.25 media 2.46 h, varianza = 12.41  $h^2$ , desviación estándar = 3.52 h

13.26 (a)  $\mu = 4$ ,  $\sigma^2 = 5.5$ ,  $\sigma = 2.3$ ; (b)  $\mu = 0$ ,  $\sigma^2 = 10$ ,  $\sigma = 3.2$ ; (c)  $\mu = 1$ ,  $\sigma^2 = 2.4$ ,  $\sigma = 1.5$

13.27

$x_i$	1	2	3	4	5	6
$p_i$	11/36	9/36	7/36	5/36	3/36	1/36

,  $E(X) = 2.5$ ,  $\text{Var}(X) = 2.1$ ,  $\sigma_X = 1.4$

13.28

$y_i$	0	1	2	3	4
$p_i$	1/16	7/16	5/16	2/16	1/16

,  $E(Y) = 1.7$ ,  $\text{Var}(Y) = 0.9$ ,  $\sigma_Y = 0.95$

**13.29 (a)**

$x_i$	2	3	4	5
$P(x_i)$	0.1	0.4	0.3	0.2

,  $E(X) = 3.6$ ,  $\text{Var}(X) = 0.84$ ,  $\sigma_X = 0.9$

**(b)**

$y_j$	1	2	3
$P(y_j)$	0.1	0.5	0.4

,  $E(Y) = 2.3$ ,  $\text{Var}(Y) = 0.41$ ,  $\sigma_Y = 0.64$

**(c)**

$z_k$	3	5	6	7	8
$P(z_k)$	0.1	0.4	0.1	0.2	0.2

,  $E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 5.9$ ,  $\text{Var}(X + Y) = 2.3$ ,  $\sigma_{X+Y} = 1.5$

**(d)**

$w_k$	2	6	8	12	15
$P(w_k)$	0.1	0.4	0.1	0.2	0.2

,  $E(XY) = 8.8$ ,  $\text{Var}(XY) = 17.6$ ,  $\sigma_{XY} = 4.2$

**13.30** 15/8**13.31** 3/4**13.32** 11/9**13.33** 23/8**13.34** \$0.25**13.35** \$20**13.36** (a) 0.276, (b) 0.132, (c) 0.060**13.37**  $b(7; 10, \frac{1}{4}) + b(8; 10, \frac{1}{4}) + b(9; 10, \frac{1}{4}) + b(10; 10, \frac{1}{4}) = 0.0035$ 

**13.38 (a)**

$x_i$	0	1	2	3	4
$p_i$	0.13	0.35	0.35	0.15	0.03

(b)  $n = 4$ ,  $p = 0.4$ , de tal manera que  $\mu = np = 1.6$ ,  $\sigma^2 = npq = 0.96$ , y  $\sigma = 0.98$ .

**13.39** (a) tres, (b) cinco

**13.40**

$x_i$	0	1	2	3	4	5	6
$p_i$	64/729	192/729	240/729	160/729	60/729	12/729	1/729

## Grafos, grafos dirigidos, máquinas

### 14.1 INTRODUCCION

El término “gráfico” tiene varios sentidos en matemáticas. Hemos usado el término “gráfica” en el sentido de una relación o de una función. En el presente capítulo introduciremos la palabra “grafo” con un sentido muy especial —al cual ya aludimos en la sección 6-13, cuando hablamos del grafo dirigido de una relación.

En muchas partes de la ciencia de los computadores y de la informática aparecen los grafos, especialmente los grafos de árbol, y los grafos dirigidos. Los diagramas de flujo, por ejemplo, discutidos en el capítulo 5, son grafos dirigidos. En este capítulo tratamos otros ejemplos. Terminamos el capítulo con la definición de una máquina de estado finito, de la cual el computador es un ejemplo.

### 14.2 GRAFOS Y MULTIGRAFOS

Un *grafo* consta de dos cosas:

- Un conjunto  $N$  cuyos elementos se llaman *nod*os, *vértices* o *puntos*.
- Un conjunto  $S$  de parejas no ordenadas de nodos diferentes, llamadas *segmentos* o *aristas*.

Denotamos un grafo por  $G(N, S)$  cuando queremos destacar las dos partes de  $G$ .

Los nodos  $u$  y  $v$  se llaman *adyacentes* si hay un segmento  $\{u, v\}$ .

Representamos de una manera natural los grafos por diagramas en el plano. O sea, cada nodo  $v$  de  $N$  se representa por un punto (o pequeño círculo) y cada segmento  $s = \{v_1, v_2\}$  se representa por una curva que conecta sus *terminales*  $v_1$  y  $v_2$ .

#### EJEMPLO 14.1

- La figura 14-1 representa el grafo  $G$  con cuatro vértices,  $A, B, C$ , y  $D$ , y cinco segmentos  $s_1 = \{A, B\}$ ,  $s_2 = \{B, C\}$ ,  $s_3 = \{C, D\}$ ,  $s_4 = \{A, C\}$ ,  $s_5 = \{B, D\}$ . Usualmente denotamos un grafo dibujando su diagrama en lugar de hacer una lista explícita de sus nodos y segmentos.
- La figura 14-1(b) no es un grafo sino un *multígrafo*. La razón es que  $s_4$  y  $s_5$  son segmentos múltiples, o sea segmentos que conectan las mismas terminales, y  $s_6$  es un *lazo*, o sea, un segmento cuyas terminales son el mismo nodo. La definición de grafo no permite ni segmentos múltiples ni lazos. En otras palabras, podemos definir un grafo como un *multígrafo sin segmentos múltiples ni lazos*. A no ser que se diga otra cosa, los multígrafos considerados en este libro serán finitos. Observe que un grafo con un número finito de nodos automáticamente debe tener un número finito de segmentos y por lo tanto debe ser finito.

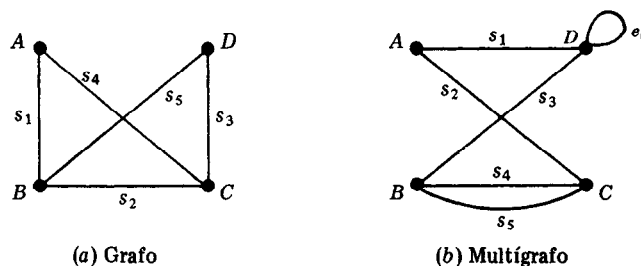


Figura 14-1

Sean  $G(N, S)$  un grafo;  $N'$  un subconjunto de  $N$ , y  $S'$  un subconjunto de  $S$  cuyas terminales pertenecen a  $N'$ . Entonces  $G(N', S')$  es un grafo y se llama un *subgrafo* de  $G(N, S)$ . Si  $S'$  contiene todos los segmentos de  $S$  cuyas terminales están en  $N'$ , entonces  $G(N', S')$  se llama el subgrafo *generado por*  $N'$ .

### 14.3 GRADO DE UN NODO

Si  $v$  es una terminal de un segmento  $s$ , decimos que  $s$  es *incidente* en  $v$ . El *grado* de  $v$ , escrito  $\text{gr}(v)$ , es igual al número de segmentos que inciden en  $v$ . (Un nodo de grado cero, o sea un nodo que no pertenece a ningún segmento, se llama un nodo *aislado*.) Como cada segmento se cuenta dos veces al sumar los grados de los nodos de un grafo, tenemos el siguiente resultado sencillo pero importante.

**Teorema 14.1:** La suma de los grados de los nodos de un grafo es igual al doble del número de segmentos.

**EJEMPLO 14.2** En la figura 14-1(a).

$$\text{gr}(A) = 2 \quad \text{gr}(B) = 3 \quad \text{gr}(C) = 3 \quad \text{gr}(D) = 2$$

La suma de los grados es diez, que, como era de esperar, es el doble del número de segmentos. Se dice que un nodo es *par* o *impar* según que su grado sea par o impar. Así  $A$  y  $D$  son nodos pares, mientras que  $B$  y  $C$  son nodos impares.

El Teorema 14.1 también es cierto para multigrafos si un lazo se cuenta dos veces para el grado de su terminal. Así, en la fig. 14-1(b), tenemos que  $\text{gr}(D) = 4$ , ya que el segmento  $s_6$  se cuenta dos veces; así  $D$  es un nodo par.

### 14.4 CONEXIDAD

Un *camino* en un multigrafo consta de una sucesión alternada de nodos y segmentos de la forma

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_{n-1}, v_{n-1}, e_n, v_n$$

en donde cada segmento  $s_i$  es incidente en  $v_{i-1}$  y  $v_i$ . El número  $n$  de segmentos se llama la *longitud* del camino. Cuando no hay ambigüedad denotamos un camino por su sucesión de segmentos  $(s_1, s_2, \dots, s_n)$  o por su sucesión de nodos  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ . El camino se dice que es *cerrado* si  $v_0 = v_n$ . De otro modo, decimos que el camino va de  $v_0$  a  $v_n$ , o entre  $v_0$  y  $v_n$ , o *que conecta a*  $v_0$  con  $v_n$ .

Un *sendero* es un camino en el cual todos los segmentos son diferentes. Una *trayectoria* es un camino en el cual todos los nodos son diferentes; así toda trayectoria debe ser un sendero. Un *ciclo* es un camino cerrado tal que todos sus vértices son diferentes excepto  $v_0 = v_n$ . Un ciclo de longitud  $k$  se llama un  $k$ -*ciclo*. En un grafo, cualquier ciclo debe tener longitud (número de segmentos o número de nodos) tres o más.

**EJEMPLO 14.3** Considere el grafo de la fig. 14-2. Entonces la sucesión

$$(P_4, P_1, P_2, P_5, P_1, P_2, P_3, P_6)$$

es un camino de  $P_4$  a  $P_6$ . No es un sendero ya que el segmento  $\{P_1, P_2\}$  se usa dos veces. La sucesión

$$(P_4, P_1, P_5, P_2, P_6)$$

no es un camino ya que no hay segmento  $\{P_2, P_6\}$ . La sucesión

$$(P_4, P_1, P_5, P_2, P_3, P_5, P_6)$$

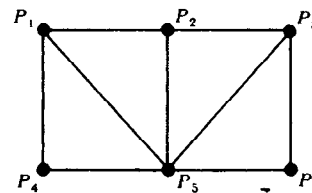


Figura 14-2

es un sendero ya que ningún segmento se usa dos veces; pero no es una trayectoria ya que el nodo  $P_5$  se usa dos veces. La sucesión

$$(P_4, P_1, P_5, P_3, P_6)$$

es una trayectoria de  $P_4$  a  $P_6$ . La mínima trayectoria (con respecto a longitud) de  $P_4$  a  $P_6$  es  $(P_4, P_5, P_6)$ , que tiene longitud 2.

Eliminando segmentos innecesarios, no es difícil demostrar que cualquier camino de un nodo  $u$  a un nodo  $v$  se puede reemplazar por una trayectoria de  $u$  a  $v$ . Establecemos este resultado formalmente.

**Teorema 14.2:** Hay un camino de un nodo  $u$  a un nodo  $v$  si y solamente si hay una trayectoria de  $u$  a  $v$ .

Un grafo se dice que es *conexo* si hay una trayectoria entre dos cualesquiera de sus nodos. El grafo de la fig. 14-2 es conexo, pero el grafo de la fig. 14-3(a) no es conexo porque, por ejemplo, no hay trayectoria entre  $D$  y  $E$ . Un subgrafo conexo de un grafo  $G$  se llama una *componente conexa* de  $G$  si no está contenido en ningún subgrafo conexo mayor. Es intuitivamente claro que cualquier grafo puede particionarse en componentes conexas. Por ejemplo, el grafo de la fig. 14-3(a) tiene tres componentes conexas. Todo grafo conexo es en sí su única componente conexa.

La *distancia* entre dos nodos  $u$  y  $v$  de un grafo conexo  $G$ , escrito  $d(u, v)$  es la longitud de la trayectoria más corta entre  $u$  y  $v$ . El diámetro de un grafo conexo  $G$  es la máxima distancia entre dos cualesquiera de sus nodos. En la fig. 14-3(b), tenemos  $d(A, F) = 2$  y el diámetro del grafo es 3. (Aunque los segmentos  $\{A, D\}$  y  $\{B, C\}$  se dibujaron en la fig. 14-3(b) cruzándose, no se cruzan en un nodo.)

Sea  $v$  el nodo de un grafo  $G$ . Por  $G - v$  queremos significar el grafo obtenido a partir de  $G$  quitándole  $v$  y todos los segmentos que incidan en  $v$ . Un nodo  $v$  en un grafo conexo  $G$  se llama un *punto corte* si  $G - v$  es inconexo. El nodo  $D$  en la fig. 14-3(b) es un punto corte.

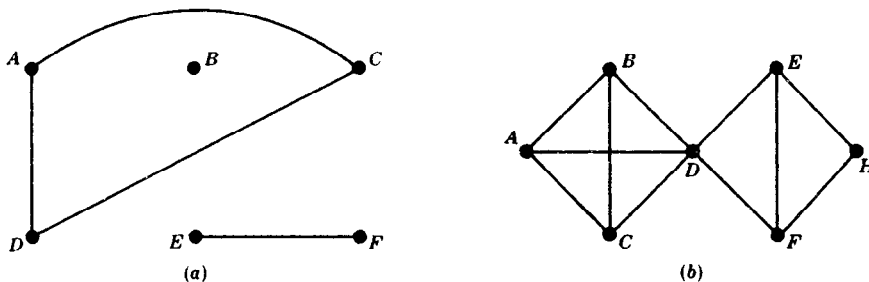


Figura 14-3

## 14.5 TIPOS ESPECIALES DE GRAFOS

Hay muchos tipos de grafos, vamos a mencionar cuatro de ellos.

### Grafos completos

Un grafo es *completo* si cada nodo está conectado con todo otro nodo. Al grafo completo de  $n$  nodos se le denota  $K_n$ . La fig. 14-4 muestra los grafos  $K_1, K_2, \dots, K_6$ . Al grafo  $K_1$ , un nodo aislado, se le llama el *grafo trivial*.

### Grafos regulares

Un grafo o multígrafo es *regular* de grado  $k$  o *k-regular* si cada nodo tiene grado  $k$ . Los grafos regulares conexos de grados 0, 1 ó 2 son fácilmente descritos. El grafo  $k$ -regular es el grafo

trivial. El grafo 1-regular conexo es el grafo con dos nodos y un segmento que los conecta. El grafo 2-regular conexo con  $n > 2$  nodos es el grafo que consta de un solo  $n$ -ciclo. (El 2-ciclo es un multígrafo.) Véase la fig. 14-5.

Los grafos 3-regulares deben tener, por el teorema 14.1, un número par de nodos. La fig. 14-6 da dos ejemplos de grafos 3-regulares conexos con seis nodos. En general, hay diecinueve grafos 3-regulares con diez nodos. Observamos que el grafo completo con  $n$  nodos,  $K_n$ , es regular de grado  $n - 1$ .

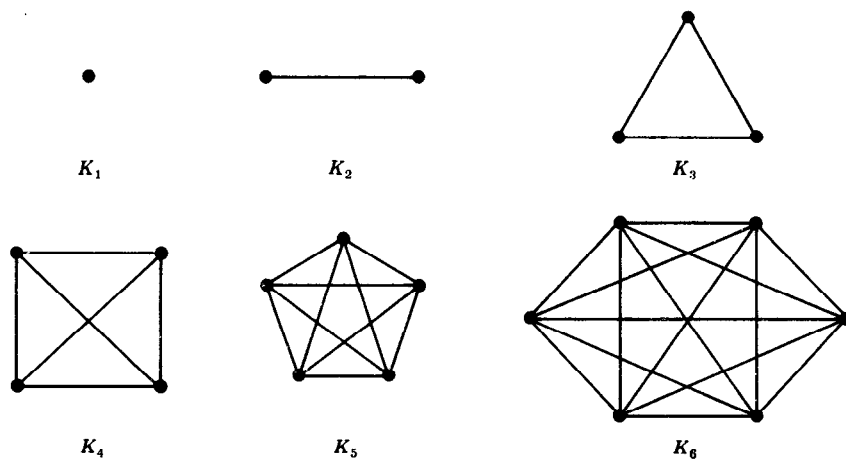


Figura 14-4

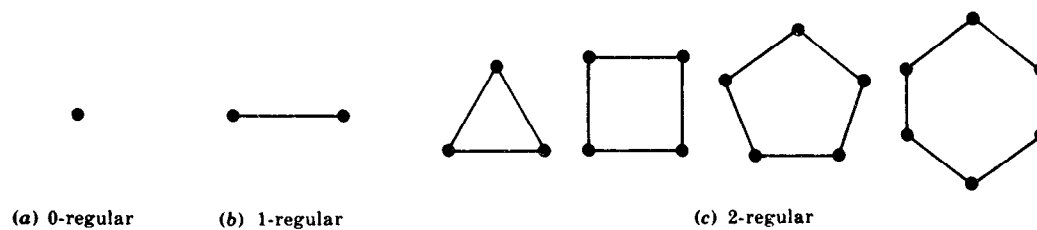


Figura 14-5

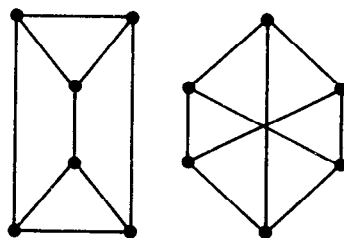


Figura 14-6

### Grafos bipartitos

Un grafo  $G$  se dice que es *bipartito* si su conjunto de nodos  $N$  se puede particionar en dos subconjuntos  $P$  y  $Q$  tales que cada segmento de  $G$  conecta un nodo de  $P$  con un nodo de  $Q$ . Por un grafo *bipartito* completo, significamos que cada nodo de  $P$  está conectado con cada nodo de  $Q$ ; este grafo se denota  $K_{p,q}$  en donde  $p$  es el número de nodos de  $P$  y  $q$  es el número de nodos de  $Q$ , y, para estandarización, asumimos  $p \leq q$ . La fig. 14-7 muestra los grafos  $K_{2,3}$ ,  $K_{3,3}$  y  $K_{2,4}$ . Claramente,  $K_{p,q}$  tiene  $pq$  segmentos.

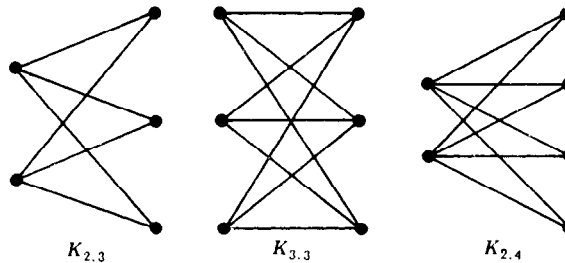


Figura 14-7

### Grafos planos

Un grafo o multigrafo que se puede dibujar en un plano de tal manera que los segmentos no se corten se dice que es *plano*. Aunque el grafo completo con cuatro nodos,  $K_4$ , comúnmente se dibuja con segmentos cruzados, como en la fig. 14-8(a), también se puede dibujar sin que se crucen los segmentos, como en la fig. 14-8(b). Así,  $K_4$  es un grafo plano.

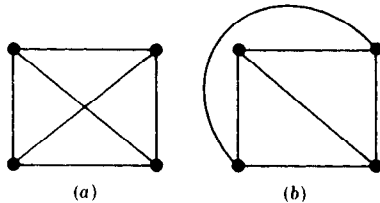


Figura 14-8

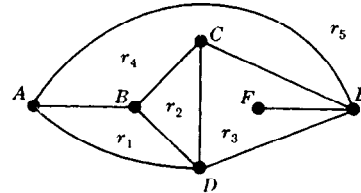


Figura 14-9

Se llama *mapa* a una representación plana particular de un multigrafo plano finito. Decimos que el mapa es *conexo* si el correspondiente multigrafo es conexo. Un mapa dado divide el plano en varias regiones. Por ejemplo, el mapa de la fig. 14-9 divide al plano en cinco regiones. Observe que cuatro de las regiones son acotadas, pero la quinta región, fuera del diagrama, es no acotada. Así no hay pérdida de generalidad al contar las regiones si suponemos que nuestro mapa está contenido en algún rectángulo mayor en lugar de en el plano completo.

Euler dio una fórmula que conecta el número de nodos  $N$ , el número de segmentos  $S$  y el número de regiones  $R$  para cualquier mapa conexo.

**Teorema 14.3 (Euler):**  $N - S + R = 2$

**EJEMPLO 14.4** En la figura 14-9 tenemos  $N = 6$ ,  $S = 9$ ,  $R = 5$ ; y, de acuerdo con la fórmula de Euler:

$$N - S + R = 6 - 9 + 5 = 2$$

La fórmula de Euler también es cierta para mapas inconexos, siempre y cuando la constante 2 se reemplace por  $\nu + 1$ , en donde  $\nu$  es el número de componentes conexos del mapa.

## 14.6 GRAFOS ROTULADOS

Un grafo  $G$  se llama un *grafo rotulado* si a sus segmentos y/o nodos se le asignan datos de alguna clase. En particular, si a cada segmento  $s$  de  $G$  se le asigna un número no negativo  $l(s)$  entonces a  $l(s)$  se le llama el *peso* o *longitud* de  $s$ . La fig. 14-10 muestra un grafo rotulado en donde el peso de cada segmento está indicado en la manera obvia. Frecuentemente es importante encontrar una trayectoria de peso mínimo entre dos nodos dados de un grafo rotulado. Una trayectoria mínima entre  $P$  y  $Q$  en la fig. 14-10 se da por la sucesión

$$(P, A_1, A_2, A_5, A_3, A_6, Q)$$

La trayectoria tiene peso 14. (Encuentre otra trayectoria mínima entre los mismos dos nodos.)

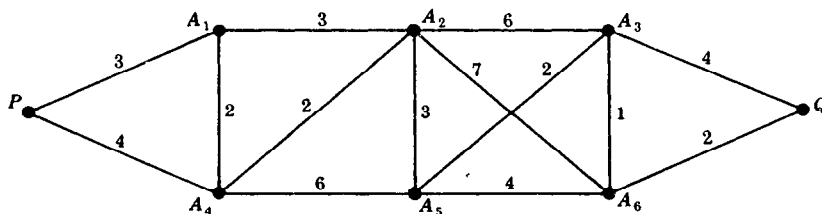
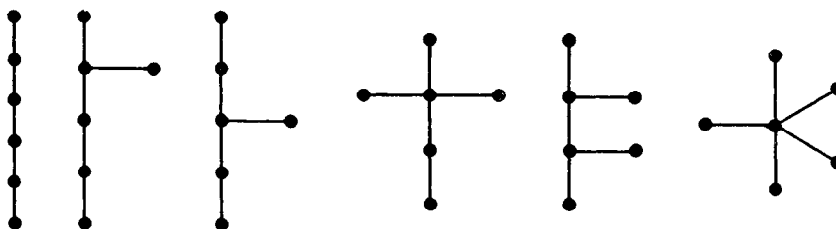


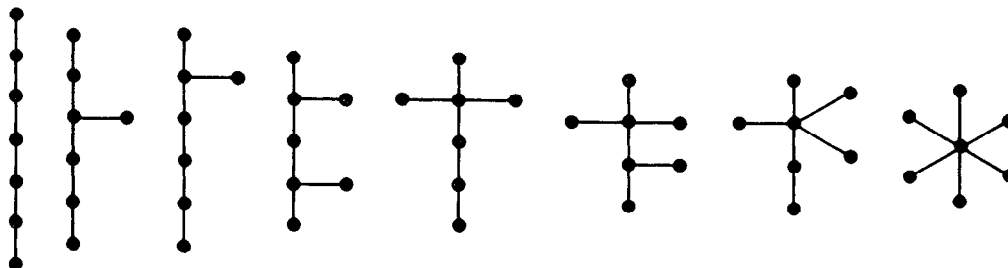
Figura 14-10

## 14.7 GRAFOS ARBOLES

Un grafo  $G$  se dice que es *acíclico* o *libre de ciclos* si no contiene ciclos. Un *árbol* es un grafo acíclico conexo. Un *bosque* es un grafo sin ciclos; así las componentes conexas de un bosque son árboles. La fig. 14-11(a) muestra todos los árboles con seis nodos, y la fig. 14-11(b) muestra ocho de los árboles con siete nodos.



(a)



(b)

Figura 14-11



Hay un número de maneras equivalentes de definir un árbol, como se muestra en el siguiente teorema.

**Teorema 14.4:** Sea  $G$  un grafo con más de un nodo. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

- (i)  $G$  es un árbol.
- (ii) Cada pareja de nodos está conectada por exactamente una trayectoria.
- (iii)  $G$  es conexo, pero si se quita cualquiera de sus segmentos el grafo que resulta no es conexo.
- (iv)  $G$  es libre de ciclos, pero si se le agrega al grafo cualquier segmento el grafo resultante tiene exactamente un ciclo.

En caso de que nuestros grafos sean finitos, tenemos entonces nuevas maneras de definir un árbol.

**Teorema 14.5:** Sea  $G$  un grafo finito con  $n > 1$  nodos. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

- (i)  $G$  es un árbol.
- (ii)  $G$  es libre de ciclos y tiene  $n - 1$  segmentos.
- (iii)  $G$  es conexo y tiene  $n - 1$  segmentos.

En particular, el teorema 14.5 nos dice que un árbol finito tiene un nodo más que el número de segmentos. (Esto en particular es cierto para el *árbol trivial*,  $n = 1$ .)

Algunas propiedades generales de los árboles son:

- (1) Un árbol es un grafo bipartito.
- (2) Un árbol es un grafo plano.
- (3) Un árbol finito no trivial tiene al menos dos *nodos colgantes* (de grado 1).
- (4) En un árbol no trivial, cada nodo es colgante o es un punto de corte.

#### Arboles maximales

Un subgrafo  $A$  de un grafo  $G$  se llama *grafo maximal* de  $G$  si  $A$  es un árbol e incluye todos los nodos de  $G$ . La fig. 14-12 muestra un grafo  $G$  y árboles maximales  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  de  $G$ . Si  $G$  es un grafo cuyos segmentos tienen pesos, entonces un *árbol maximal minimal* de  $G$  es un árbol maximal de  $G$  tal que la suma de los pesos de sus segmentos es minimal entre todos los árboles maximales de  $G$ .

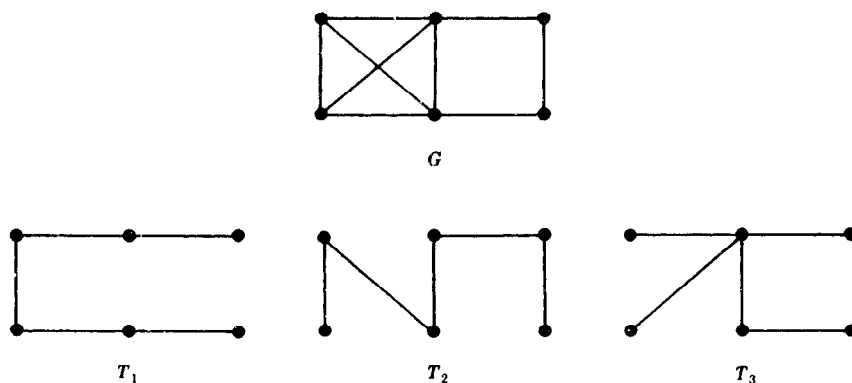


Figura 14-12

Damos dos algoritmos para encontrar un árbol maximal minimal de un grafo rotulado conexo  $G$  con  $m$  nodos. Primero, ordenamos los segmentos de  $G$  por orden descendente de sus pesos. Procediendo secuencialmente, quite cada segmento que no desconecte al grafo hasta que queden  $m - 1$  segmentos. Estos segmentos formarán entonces un árbol maximal minimal de  $G$ . En este algoritmo es indispensable decidir si un grafo es conexo o no, lo cual, en general, no es fácilmente programable.

Para el segundo algoritmo, los segmentos se ordenan en orden ascendente por sus pesos. Entonces, comenzando solamente con los nodos de  $G$ , vamos agregando un segmento después de otro en el que cada segmento tiene peso minimal y no forma un ciclo. Después de agregar  $m - 1$  segmentos obtenemos un árbol maximal minimal.

Debemos destacar que como algunos segmentos pueden ser del mismo peso, podemos obtener diferentes árboles maximales minimales. La fig. 14-13 da un grafo conexo rotulado  $G$  y un árbol maximal minimal  $M$ .

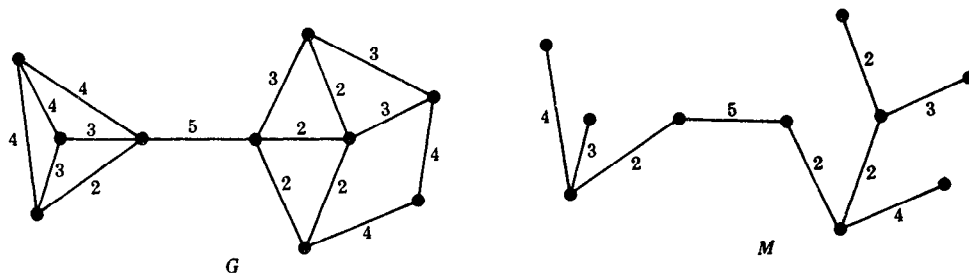


Figura 14-13

#### 14.8 ARBOLES CON RAICES

Un árbol con raíz  $R$  consta de un grafo árbol junto con un nodo designado  $r$  llamado la raíz del árbol. Se llama *nivel*, o *profundidad* o *generación* de  $v$  a la longitud de la única trayectoria de la raíz  $r$  a  $v$ . Los puntos colgantes de  $R$  (excepto  $r$ , si es que  $r$  es un punto colgante) se llaman *hojas* del árbol con raíz. La fig. 14-14 muestra un árbol con raíz en donde se dibuja la raíz  $r$  arriba en el árbol. El árbol tiene hojas  $d$ ,  $f$ ,  $h$ ,  $i$  y  $j$ . El nivel de  $a$  es 1, el de  $f$  es 2, y el de  $j$  es 3. Hacemos hincapié en que todo árbol se puede constituir en árbol con raíz simplemente escogiendo uno de sus nodos como la raíz.

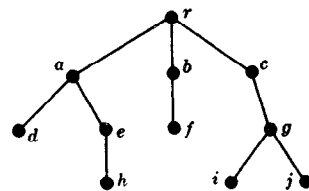


Figura 14-14

El hecho de que haya una única trayectoria de la raíz a todo nodo de  $R$  introduce una orientación para los segmentos de  $R$ . Se llama *rama* una trayectoria dirigida continua de un nodo a una hoja de  $R$ . Diremos que un nodo  $u$  *precede* a otro  $v$  o que  $v$  *sigue* a  $u$ , si la trayectoria de la raíz  $r$  a  $v$  incluye a  $u$ . En particular, decimos que  $v$  *sigue inmediatamente* después de  $u$  si  $v$  sigue a  $u$  y es adyacente a  $u$ . En la fig. 14-14 el nodo  $j$  sigue a  $c$ , pero sigue inmediatamente a  $g$ . Observe que todo nodo excepto la raíz sigue inmediatamente después de algún nodo único, pero puede ser seguido inmediatamente por más de un nodo, por ejemplo, los vértices  $i$  y  $j$  ambos siguen inmediatamente después de  $g$ .

#### Arboles con raíz ordenados

Un árbol con raíz  $R$  en el cual los segmentos que salen de cada nodo están ordenados linealmente se llama un *árbol con raíz ordenado*. Supongamos que  $s$  y  $s'$  son segmentos de  $R$  que salen de un vértice  $v$ , y que van a  $s$  y  $s'$ , respectivamente. Si  $s$  precede a  $s'$  en el orden de  $R$ ,

entonces dibujamos a  $s$  a la izquierda de  $s'$ , como en la fig. 14-15. Luego asignamos el mismo orden a los vértices  $a$  y  $b$  como el que le corresponde a los segmentos  $s$  y  $s'$ ; o sea,  $a$  precede a  $b$ . (Observe que este ordenamiento de los nodos no tiene nada que ver con el ordenamiento a lo largo de las ramas, descrito anteriormente.)

Los árboles con raíz ordenados ocurren en muchos lugares en la ciencia de los computadores y en la informática, como se ilustra con los dos ejemplos siguientes.

**EJEMPLO 14.5 (Expresiones aritméticas).** Cualquier expresión aritmética con solamente operaciones binarias, por ejemplo, adición, sustracción, multiplicación y división, se puede representar por un árbol con raíz ordenado. Por ejemplo, la expresión aritmética

$$(a - b) / ((c \times d) + e)$$

se puede representar por el árbol con raíz ordenado en la fig. 14-16(a). Observe que las variables en la expresión,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  y  $e$ , aparecen como hojas, y las operaciones aparecen como los otros nodos. El árbol debe ser ordenado;  $a - b$  y  $b - a$  dan el mismo árbol pero no el mismo árbol con raíz ordenado.

El matemático polaco Lukasiewicz observó que colocando el símbolo operacional antes de sus argumentos, por ejemplo

$$+ ab \text{ en lugar de } a + b \quad \text{y} \quad /cd \text{ en lugar de } c/d$$

se puede evitar el uso de paréntesis. A esta notación se le llama *notación polaca en forma prefija*. (Análogamente, se puede colocar el símbolo después de sus argumentos, llamada *notación polaca en forma postfija*.) Volviendo a escribir la expresión aritmética de arriba en forma prefija, obtenemos

$$/- a b + \times c d e$$

Observe que este es precisamente el orden de los nodos cuando se recorre el árbol como se indica en la fig. 14-16(b).

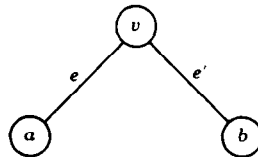


Figura 14-15

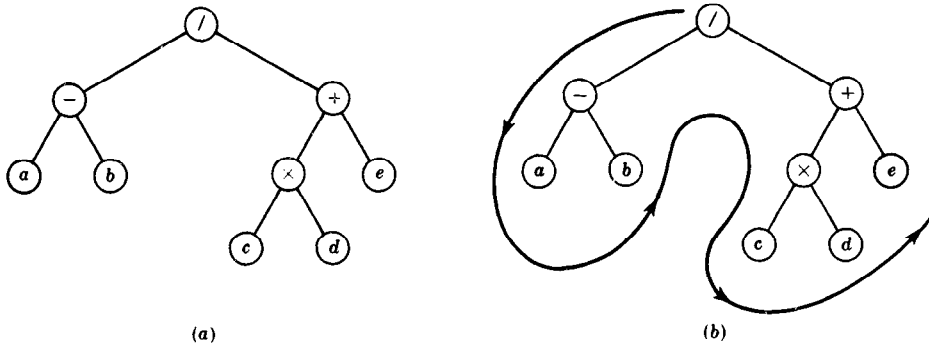


Figura 14-16

**EJEMPLO 14.6 (Estructura de registro).** Los datos se organizan frecuentemente en jerarquías de campos, registros, y archivos, como sigue. Un *registro* es una colección de datos de campo, o *campos*, relacionados que son tratados como una unidad; y un *archivo* es una colección de registros similares. Por ejemplo, un registro de personal para un empleado puede tener los datos de campo:

Número de seguro social, Nombre, Dirección, Edad, Sueldo, Dependientes

El archivo de empleados de la compañía contendría la lista de los registros de los empleados.

Aunque un archivo es normalmente una lista lineal de registros, los campos de datos de un registro usualmente forman un árbol con raíz ordenado. La razón es que algunos de los campos de datos pueden ser grupos de subcampos, o sea, campos formados por dos o más partes en lugar de campos que no se pudieran dividir más. Por ejemplo, el anterior registro de personal para un empleado puede formar el árbol con raíz que se muestra en la fig. 14-17. Observe que Nombre es un campo, con subcampos Apellido, Primer Nombre, e Inicial. También, Dirección es un campo, con subcampos Calle y Area, mientras Area en sí se puede volver a dividir en Ciudad, Estado y País. Hay once campos elementales (atómicos), las hojas del árbol.

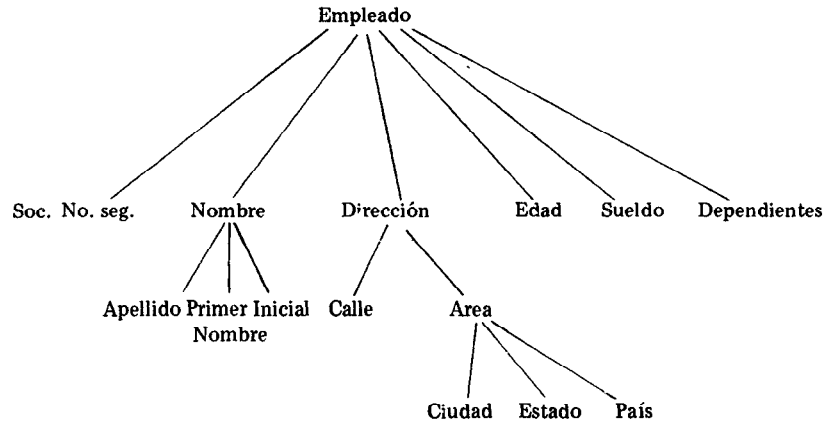


Figura 14-17

El anterior árbol con raíz orientado también se puede describir en términos de los niveles de los nodos:

```

00 Empleado
   01 Número de Seguro Social
   01 Nombre
      02 Apellido
      02 Primer Nombre
      02 Inicial
   01 Dirección
      02 Calle
      02 Area
         03 Ciudad
         03 Estado
         03 País
   01 Edad
   01 Sueldo
   01 Dependientes
  
```

Este listado es equivalente a recorrer el árbol en la manera de la fig. 14-16(b); por medio de éste, se puede leer el registro completo en un computador en forma lineal.

## 14.9 GRAFOS DIRIGIDOS

Acabamos de ver, en la sección 14.8, que los árboles con raíz tienen una dirección natural definida a lo largo de cada segmento; así pueden ser considerados como grafos dirigidos. Hablando en general, un *grafo dirigido*, también llamado un *digrafo*, es un multigrafo con una dirección asignada a cada segmento. Llamamos arcos a los segmentos dirigidos, y escribimos  $a = \langle u, v \rangle$  para cualquiera de los arcos que unen al *punto inicial*  $u$  con el *punto final*  $v$ .

**EJEMPLO 14.7** La figura 14-18 representa un digrafo con cuatro nodos y siete arcos. Observe el lazo dirigido,  $a_7 = \langle B, B \rangle$ . Arcos como  $a_2$  y  $a_3$ , que tienen el mismo punto inicial y el mismo punto final, se llaman *paralelos*.

Sea  $D$  un grafo dirigido. Un arco  $a = \langle u, v \rangle$  se dice que *comienza* en su punto inicial  $u$  y *termina* en su punto final  $v$ . El *grado de salida* y el *grado de llegada* de un nodo  $v$  son iguales respectivamente al número de arcos que comienzan y terminan en  $v$ . Como cada arco comienza y termina en un nodo, vemos que la suma de los grados de salida de los nodos es igual a la suma de los grados de llegada de los nodos, y ésta es igual al número de arcos. Un nodo con grado de llegada cero se llama *fuentes*, y un nodo con grado de salida cero se llama *sumidero*. En la fig. 14-16, el nodo  $C$  es un sumidero, pero el digrafo no tiene fuentes. También, el grado de salida de  $D$  es 2 y su grado de entrada es 1.

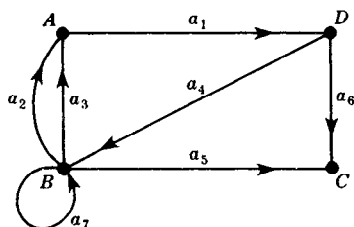


Figura 14-18

Si se rotulan los arcos y/o nodos de un digrafo con algún tipo de datos, entonces tenemos un *grafo dirigido rotulado*. Tales grafos se usan frecuentemente para representar situaciones dinámicas. Por ejemplo, los diagramas de flujo son grafos dirigidos en los cuales los nodos (cajas) se rotulan, y los arcos que salen de una caja de decisión se rotulan. En seguida otro ejemplo.

**EJEMPLO 14.8** Tres niños  $A, B$ , y  $C$ , se están lanzando un balón de tal manera que  $A$  siempre le lanza el balón a  $B$ , pero tanto  $B$  como  $C$  le lanzan el balón a  $A$  con tanta frecuencia como entre ellos. La fig. 14-19 ilustra esta situación dinámica, en donde los arcos están rotulados con sus respectivas probabilidades, o sea,  $A$  le lanza el balón a  $B$  con probabilidad 1,  $B$  se lo lanza a  $A$  y  $C$  con probabilidad  $1/2$  a cada uno, y  $C$  se lo lanza a  $A$  y  $B$  con probabilidad  $1/2$  a cada uno.

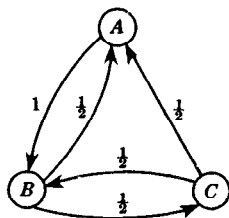


Figura 14-19

### Digrafos y relaciones

Considere un digrafo  $D$  que no tiene arcos paralelos; sea  $N$  el conjunto de nodos y  $A$  el conjunto de sus arcos. Como los arcos representan parejas ordenadas de nodos,  $A$  es simplemente un subconjunto de  $N \times N$  y, por lo tanto,  $A$  es una relación en  $N$ . Recíprocamente, si  $R$  es una relación en un conjunto  $N$ , entonces  $N$  se puede tomar como el conjunto de nodos y  $R$  como el conjunto de arcos de un digrafo,  $D(N, R)$ , que no tiene arcos paralelos. Así, los conceptos de relaciones en un conjunto y digrafos sin arcos paralelos son una y la misma cosa. En efecto, en

el capítulo 6 ya habíamos introducido el grafo dirigido correspondiente a una relación en un conjunto.

### Digrafos y matrices

Sea  $D$  un grafo dirigido con nodos  $v_1, v_2, \dots, v_m$ . La matriz de  $D$  es la matriz  $m \times m$   $M_D = (m_{ij})$ , en donde

$m_{ij}$  = el número de arcos que comienzan en  $v_i$  y terminan en  $v_j$ .

Si  $D$  no tiene arcos paralelos, entonces las entradas de  $M_D$  serán ceros y unos; en caso contrario las entradas serán enteros no negativos. Recíprocamente, toda matriz  $M$  de dimensiones  $m \times m$  con enteros no negativos como entradas define de una manera unívoca un digrafo con  $m$  nodos. La fig. 14-20 muestra un digrafo  $D$  y la correspondiente matriz  $M$ .

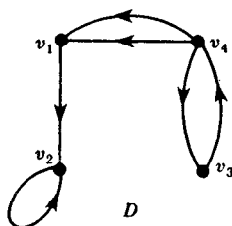


Figura 14-20

### 14.10 DIGRAFOS CONEXOS

Los conceptos de camino, sendero, trayectoria, y ciclo se pueden usar tal como se usó el de grafo no dirigido, salvo que la dirección del camino, etc., debe coincidir con las direcciones de los arcos. Específicamente, un *camino* (dirigido)  $C$  en un digrafo  $D$  es una sucesión alternada de nodos y arcos,

$$C = (v_0, a_1, v_1, a_2, v_2, \dots, a_n, v_n)$$

tal que cada arco  $a_i$  comienza en  $v_{i-1}$  y termina en  $v_i$ . Un *semicamino* es lo mismo que un camino, salvo que el arco  $a_i$  puede comenzar ya sea en  $v$  o en  $u$  y terminar en el otro nodo; en otras palabras, un *semicamino* es lo mismo que un camino en el multigrafo no dirigido  $D$ . *Semisendero* y *semitrayectoria* tienen definiciones análogas.

Hay tres tipos de conectivas en un digrafo  $D$ . Decimos que  $D$  es *débilmente conexo* o *débil* si hay un *semicamino* entre dos nodos cualesquiera  $u$  y  $v$  de  $D$ . Decimos que  $D$  es *unilateralmente conexo* o *unilateral* si para nodos cualesquiera  $u$  y  $v$  en  $D$ , existe una trayectoria de  $u$  a  $v$  o hay una trayectoria de  $v$  a  $u$ . Decimos que  $D$  es *fuertemente conexo* o *fuerte* si, para nodos cualesquiera  $u$  y  $v$  de  $D$ , hay una trayectoria de  $u$  a  $v$  y una trayectoria de  $v$  a  $u$ . Observe que fuertemente conexo implica unilateralmente conexo, y que unilateralmente conexo implica débilmente conexo. Decimos que  $D$  es *estrictamente unilateral* si es unilateral, pero no fuerte; que es *estrictamente débil* si es débil, pero no unilateral. Por ejemplo, la fig. 14-21 muestra un grafo (a) que es estrictamente débil, un grafo (b) que es estrictamente unilateral, y un grafo (c) que es fuerte.

En términos de *caminos maximales* (caminos que pasan por todos los nodos del grafo), la conectividad se puede caracterizar como sigue:

**Teorema 14.6:** Sea  $D$  un digrafo dirigido finito. Entonces

- (a)  $D$  es débil si y solamente si  $D$  tiene un *semicamino* maximal.
- (b)  $D$  es unilateral si y solamente si  $D$  tiene un *camino* maximal.
- (c)  $D$  es fuerte si y solamente si  $D$  tiene un *camino* maximal cerrado.

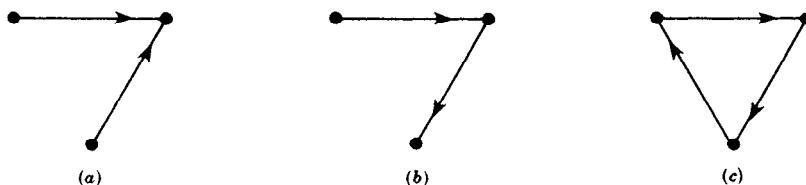


Figura 14-21

La matriz  $M$  de un digrafo es útil al contar los caminos en  $D$ . En efecto, tenemos:

**Teorema 14.7:** Sea  $M$  la matriz de un digrafo  $D$ . Entonces la entrada  $(i, j)$  de la matriz  $M^n$  da el número de caminos de longitud  $n$  del nodo  $v_i$  al nodo  $v_j$ .

Los digrafos con fuentes y sumideros aparecen en muchas aplicaciones (por ejemplo en los diagramas de flujo). Una condición para que existan tales nodos es la siguiente:

**Teorema 14.8:** Si un digrafo finito  $D$  no contiene ciclos (dirigidos), entonces  $D$  contiene por lo menos una fuente y por lo menos un sumidero.

### 14.11 MAQUINAS DE ESTADO FINITO

Podemos considerar un computador digital como una máquina que está en un cierto “estado interno” en cada momento dado. El computador “lee” un símbolo de entrada, y luego “imprime” un símbolo de salida y cambia su “estado”. El símbolo de salida depende solamente del símbolo de entrada y del estado interno de la máquina, y el estado interno de la máquina depende solamente del estado precedente de la máquina y el símbolo precedente de entrada. El número de estados, símbolos de entrada y símbolos de salida se suponen finitos. Estas ideas se formalizan con la siguiente definición.

Una *máquina de estado finito* (o una *máquina secuencialmente completa*)  $M$  consta de cinco cosas.

- (1) Un conjunto finito  $A$  de *símbolo de entrada*.
- (2) Un conjunto finito  $S$  de *estados internos*.
- (3) Un conjunto finito  $Z$  de *símbolos de salida*.
- (4) Una *función de próximo estado*  $f$  de  $S \times A$  en  $S$ .
- (5) Una *función de salida*  $g$  de  $S \times A$  en  $Z$ .

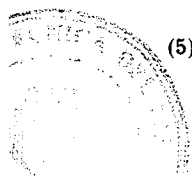
Esta máquina  $M$  se denota  $M = \langle A, S, Z, f, g \rangle$  cuando queramos designar sus cinco partes. A veces también se da un estado inicial  $q_0$  en  $S$ , y entonces la máquina  $M$  se designa por la séxtupla  $M = \langle A, S, Z, q_0, f, g \rangle$ .

**EJEMPLO 14.9** Lo siguiente define una máquina de estado finito con dos símbolos de entrada, tres estados internos, y tres símbolos de salida:

- (1)  $A = \{a, b\}$
- (2)  $S = \{q_0, q_1, q_2\}$
- (3)  $Z = \{x, y, z\}$
- (4) Función de próximo estado  $f : S \times A \rightarrow S$  definida por

$$\begin{array}{lll} f(q_0, a) = q_1 & f(q_1, a) = q_2 & f(q_2, a) = q_0 \\ f(q_0, b) = q_2 & f(q_1, b) = q_1 & f(q_2, b) = q_1 \end{array}$$

- (5) Función de salida  $g : S \times A \rightarrow Z$  definida por



$$\begin{array}{lll} g(q_0, a) = x & g(q_1, a) = x & g(q_2, a) = z \\ g(q_0, b) = y & g(q_1, b) = z & g(q_2, b) = y \end{array}$$

Es tradicional usar la letra  $q$  para los estados de la máquina y usar el símbolo  $q_0$  para el estado inicial.

Hay dos maneras de representar a una máquina de estado finito en forma compacta. El diagrama de estado  $D$  de una máquina de estado finito  $M = \langle A, S, Z, f, g \rangle$  es un grafo dirigido rotulado  $D$ . Los nodos de  $D$  son los estados  $S$  de  $M$ , y si

$$f(q_i, a_j) = q_k \quad \text{y} \quad g(q_i, a_j) = z_r$$

entonces hay un arco de  $q_i$  a  $q_k$  que está rotulado con la pareja  $a_j z_r$ . Comúnmente escribimos el símbolo de entrada  $a_j$  cerca de la base de la flecha que representa el arco (cerca de  $q_i$ ) y el símbolo de salida  $z_r$  cerca del centro de la flecha. En caso de que se dé un estado inicial, entonces rotulamos el nodo  $q_0$  dibujando una flecha extra en dirección a  $q_0$ . Por ejemplo, la fig. 14-22(a) es el diagrama de estado de la máquina en el ejemplo 14.9, con  $q_0$  como el estado inicial.

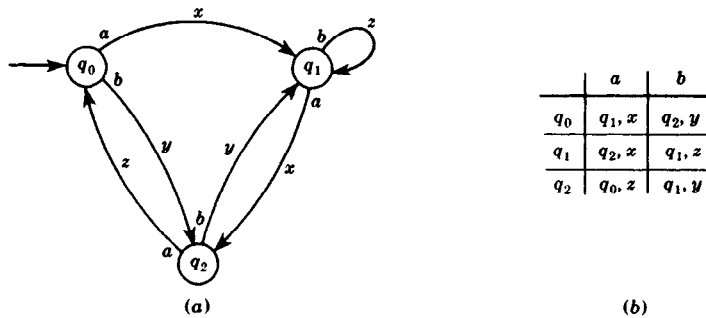


Figura 14-22

Alternativamente, la máquina se puede representar por su tabla de estados, que para cada combinación de estado y entrada da el próximo estado y la salida. La fig. 14-22(b) es la tabla de estado para la máquina del ejemplo 14.9.

#### 14.12 CADENAS, CINTAS DE ENTRADA Y DE SALIDA

La sección anterior no muestra la cualidad dinámica de una máquina. Supongamos que a una máquina de estado finito  $M$  se le da una cadena de símbolos de entrada:

$$U = a_1 a_2 \dots a_n$$

Visualizamos estos símbolos en una “cinta de entrada”; la máquina  $M$  “lee” estos símbolos de entrada uno por uno y, simultáneamente, cambia a lo largo de una cadena de estados

$$V = s_0 s_1 s_2 \dots s_n$$

en donde  $s_0$  es el estado inicial, mientras que “imprime” una cadena de símbolos de salida

$$W = z_1 z_2 \dots z_n$$

en una “cinta de salida”. Formalmente, el estado inicial  $s_0$  y la cadena de entrada  $U$  determina las cadenas  $V$  y  $W$  por

$$s_i = f(s_{i-1}, a_i) \quad \text{y} \quad z_i = g(s_{i-1}, a_i)$$

en donde  $i = 1, 2, \dots, n$ . (Observe que la palabra “cadena” se usa para una sucesión finita en lugar de “ $n$ -tupla” o “lista”.)



**EJEMPLO 14.10** Suponga que  $q_0$  es el estado inicial de la máquina en el ejemplo 14.9, y además que se da a la máquina la cadena de entrada  $abaab$ . Calculamos la cadena de estados y la cadena de símbolos de salida del diagrama de estado comenzando en el vértice  $q_0$  y siguiendo las flechas que se rotulan con los símbolos de entrada

$$q_0 \xrightarrow{a, x} q_1 \xrightarrow{b, z} q_1 \xrightarrow{a, x} q_2 \xrightarrow{a, z} q_0 \xrightarrow{b, y} q_2$$

Esto da las siguientes cadenas de estados y símbolos de salida:

$$q_0 q_1 q_1 q_2 q_0 q_2 \quad \text{y} \quad xzxzy$$

Queremos ahora describir una máquina que puede ejecutar adición binaria. Agregándole 0s al principio de nuestros números, podemos asegurarnos de que todos los números tienen el mismo número de dígitos. Si se le da a la máquina la entrada

$$\begin{array}{r} 1101011 \\ + 0111011 \\ \hline \end{array}$$

entonces queremos que la salida sea la suma binaria

$$10100110$$

Específicamente, la entrada es una cadena de parejas de dígitos que hay que sumar:

$$11, 11, 00, 11, 01, 11, 10, b$$

en donde  $b$  denota un espacio en blanco, y la salida debe ser la cadena

$$0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1$$

También queremos que la máquina entre a un estado llamado “pare” cuando termina la adición.

y los símbolos de salida son

$$A = \{00, 01, 10, 11, b\}$$

Los símbolos de entrada son

$$Z = \{0, 1, b\}$$

La máquina que hemos construido tiene tres estados:

$$S = \{\text{lleve } (l), \text{ no lleve } (n), \text{ pare } (p)\}$$

Aquí  $n$  es el estado inicial. La fig. 14-23 es un diagrama de la máquina.

Para mostrar las limitaciones de nuestras máquinas, establecemos el siguiente teorema.

**Teorema 14.9:** No existe una máquina de estado finito que pueda ejecutar multiplicación binaria.

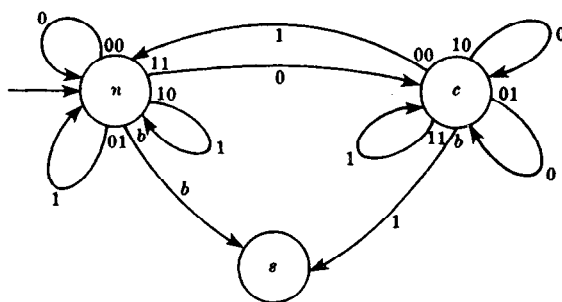


Figura 14-23

Sin embargo, si limitamos el tamaño de los números que vamos a multiplicar, entonces tales máquinas existen. Los computadores son ejemplos importantes de máquinas de estado finito que multiplican números restringidos.

### 14.13 AUTOMATAS FINITOS

Un autómata finito es similar a una máquina de estado finito excepto que el autómata tiene estados de “aceptación” y “rechazo” en lugar de una salida. Específicamente, un *autómata finito*  $M$  consta de cinco cosas:

- (1) Un conjunto finito  $A$  de *símbolos de entrada*.
- (2) Un conjunto finito  $S$  de *estados internos*.
- (3) Un subconjunto  $T$  de  $S$  (cuyos elementos se llaman *estados de aceptación*).
- (4) Un *estado inicial*  $q_0$  en  $S$ .
- (5) Una *función de estado próximo*  $f$  de  $S \times A$  en  $S$ .

El autómata  $M$  se denota por  $M = \langle A, S, T, q_0, f \rangle$  cuando queremos designar sus cinco partes.

**EJEMPLO 14.11** Lo siguiente define un autómata finito con dos símbolos de entrada y tres estados.

- (1)  $A = \{a, b\}$ , símbolos de entrada
- (2)  $S = \{q_0, q_1, q_2\}$ , estados
- (3)  $T = \{q_0, q_1\}$ , estados de aceptación
- (4)  $q_0$ , el estado inicial.
- (5) La función de estado próximo  $f : S \times A \rightarrow S$  definida por la tabla de la derecha.

	$a$	$b$
$q_0$	$q_0$	$q_1$
$q_1$	$q_0$	$q_2$
$q_2$	$q_2$	$q_2$

Podemos describir concisamente un autómata finito  $M$  por su diagrama de estado como se hizo con las máquinas de estado finito, excepto que ahora usamos círculos dobles para estados de aceptación, y cada segmento se rotula solamente con el símbolo de entrada. Específicamente, el *diagrama de estado*  $D$  de  $M$  es un grafo dirigido rotulado cuyos nodos son los estados de  $S$ ; los estados de aceptación son rotulados con un doble círculo; y si  $f(q_j, a_i) = q_k$ , entonces hay un arco de  $q_j$  a  $q_k$  que se rotula con  $a_i$ . También, el estado inicial  $q_0$  se denota poniendo una flecha que entra al nodo  $q_0$ . Por ejemplo, el diagrama de estado para el autómata  $M$  del ejemplo 14.11 se da en la fig. 14-24.

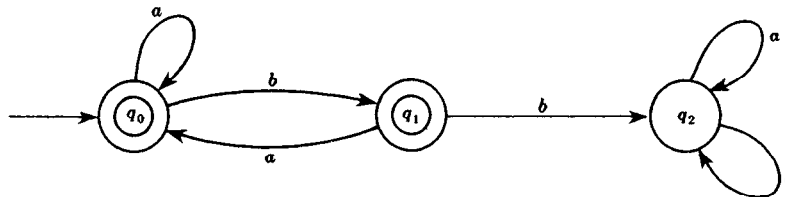


Figura 14-24

Dada una cadena finita  $W = a_1 a_2 a_3 \dots a_n$  de símbolos de entrada de un autómata  $M$ , obtenemos una sucesión de estados  $s_0 s_1 s_2 \dots s_n$ , en donde  $s_0$  es el estado inicial y  $s_i = f(s_{i-1}, a_i)$  para  $i > 0$ . Decimos que  $M$  *reconoce o acepta* la cadena  $W$  si el estado final,  $s_n$ , es un estado de aceptación, o sea si  $s_n \in T$ .  $L(M)$  denotará el conjunto de las cadenas que reconoce  $M$ . Por ejemplo, se puede mostrar que el autómata  $M$  del ejemplo 14.11 reconocerá aquellas cadenas que no tienen dos  $b$  sucesivas.

### Los autómatas como máquinas de estado finito

También podemos considerar un autómata finito  $M$  como una máquina de estado finito con dos símbolos de salida, digamos SI y NO, en donde la salida es SI si  $M$  va en estado de aceptación y la salida es NO si  $M$  va en estado de no aceptación. En otras palabras, hacemos a  $M$  en una máquina de estado finito definiendo una función de salida  $g$  de  $S \times A$  en  $Z = \{SI, NO\}$  como sigue:

$$g(q_i, a_j) = \begin{cases} SI & \text{si } f(q_i, a_j) \text{ está aceptando (pertenece a } T) \\ NO & \text{si } f(q_i, a_j) \text{ no está aceptando} \end{cases}$$

Recíprocamente, una máquina de estado finito con dos símbolos de salida puede considerarse como un autómata finito de una manera análoga.

## Problemas resueltos

### GRAFOS, CONEXIDAD

- 14.1 Dibuje el diagrama del grafo  $G$  con: (a) nodos  $A, B, C, D$  y segmentos  $\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{C, D\}$ ; (b) nodos  $a, b, c, d, e$ , y segmentos  $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{d, e\}$ .  
¿Cuáles de los grafos, son conexos, si alguno lo es?

Dibuje un punto por cada nodo  $v$ , y por cada segmento  $\{x, y\}$  dibuje una curva entre el nodo  $x$  y el nodo  $y$ , como se muestra en la fig. 14-25. El grafo (a) es conexo. Sin embargo, el grafo (b) no es conexo, ya que, por ejemplo, no hay una trayectoria del nodo  $a$  al nodo  $d$ .

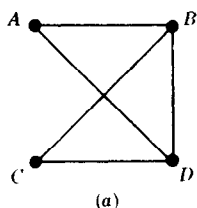
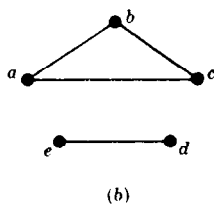


Figura 14-25



(b)

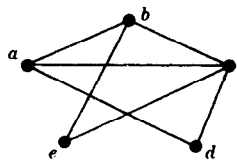


Figura 14-26

- 14.2 Considere el grafo de la fig. 14-26. Encuentre el grado de cada nodo y verifique el teorema 14.1 para este grafo.

El grado de un nodo es el número de segmentos al cual pertenece; por ejemplo,  $gr(a) = 3$ , ya que  $a$  pertenece a los tres segmentos  $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}$ . Análogamente,  $gr(b) = 3$ ,  $gr(c) = 4$ ,  $gr(d) = 2$ ,  $gr(e) = 2$ .

La suma de los grados de los nodos es  $3 + 3 + 4 + 2 + 2 = 14$ , que es el doble del número de segmentos ( $2 \times 7$ ).

- 14.3 Considere el grafo de la fig. 14-27. Encuentre (a) todas las trayectorias del nodo  $a$  al nodo  $f$ , (b) todos los senderos de  $a$  a  $f$ , (c) la distancia entre  $a$  y  $f$ , (d) el diámetro del grafo.

(a) Una trayectoria de  $a$  a  $f$  es un camino tal que ningún nodo y por lo tanto ningún segmento se repite. Hay siete de tales trayectorias:

- |                   |                      |
|-------------------|----------------------|
| $(a, b, c, f)$    | $(a, d, e, f)$       |
| $(a, b, c, e, f)$ | $(a, d, e, b, c, f)$ |
| $(a, b, e, f)$    | $(a, d, e, c, f)$    |
| $(a, b, e, c, f)$ |                      |

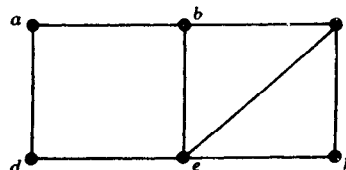


Figura 14-27

- (b) Un sendero de  $a$  a  $f$  es un camino tal que no se repite ningún segmento. Hay nueve de tales senderos, las siete trayectorias de (a), junto con

$$(a, d, e, b, c, e, f) \quad \text{y} \quad (a, d, e, c, b, e, f)$$

- (c) La distancia de  $a$  a  $f$  es 3, ya que hay una trayectoria,  $(a, b, c, f)$ , de  $a$  a  $f$  de longitud 3 y no hay ninguna trayectoria más corta de  $a$  a  $f$ .
- (d) La distancia entre dos nodos cualesquiera no es mayor que 3, y la distancia entre  $a$  y  $f$  es 3; por lo tanto el diámetro del grafo es 3.

14.4 ¿Cuáles de los multigrafos de la fig. 14-28 son (a) conexos, (b) libres de lazos, (c) grafos?

- (a) Solamente (i) y (iii) son conexos.
- (b) Solamente (iv) tiene un lazo, o sea, un segmento con las mismas terminales.
- (c) Solamente (i) y (ii) son grafos. El multigrafo (iii) tiene múltiples segmentos y (iv) tiene múltiples segmentos y un lazo.

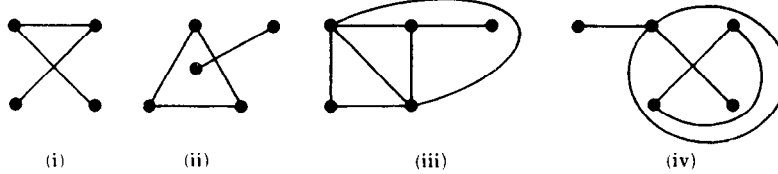


Figura 14-28

14.5 Considere el grafo  $G$  de la fig. 14-27 (problema 14.3). Encuentre los subgrafos obtenidos cuando se quita cada nodo. ¿Tiene el grafo algún punto corte?

Cuando quitamos un nodo de un grafo, también quitamos todos los segmentos que inciden en el nodo. Los seis grafos obtenidos al quitar cada uno de los nodos de la fig. 14-27 se muestran en la fig. 14-29. Todos los seis grafos son conexos; así ningún nodo es un punto corte.

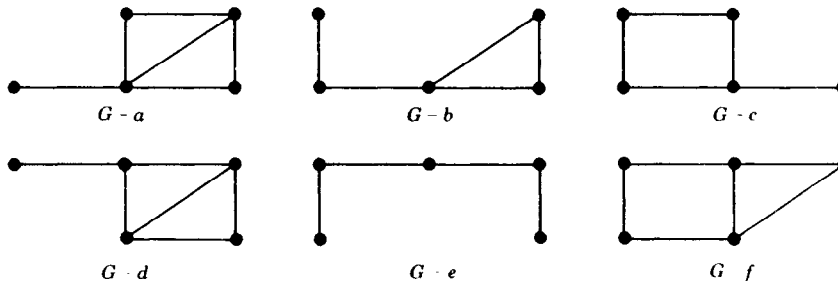


Figura 14-29

14.6 Dibuje el grafo  $K_{2,5}$ .

$K_{2,5}$  consta de siete nodos particionados en un conjunto  $M$  de dos nodos, digamos  $u_1$  y  $u_2$ , y un conjunto  $N$  de cinco nodos, digamos  $v_1, v_2, v_3, v_4$ , y  $v_5$  y todos los posibles segmentos de un nodo  $u_i$  en un nodo  $v_j$ . Véase la fig. 14-30.

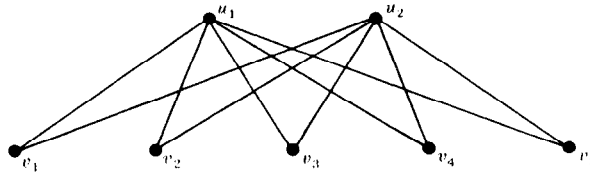


Figura 14-30

### 14.7 ¿Cuáles son los grafos conexos tanto regulares como bipartitos?

El grafo bipartito  $K_{m,m}$  es conexo y regular de grado  $m$ , ya que cada nodo está conectado con los otros  $m$  nodos. Si se quitan  $m$  segmentos disjuntos de  $K_{m,m}$ , el grafo que resulta  $G_{m-1}$  es necesariamente bipartito y regular de grado  $m-1$ , pero no es necesariamente conexo. Por ejemplo el subgrafo de  $K_{4,4}$  que se muestra en la fig. 14-31(a) es 3-regular y conexo, mientras que el subgrafo de  $K_{2,2}$  en la fig. 14-31(b) es 1-regular e inconexo. De todas maneras, las componentes conexas de  $G_{m-1}$  tienen todas las propiedades deseadas.

Podemos continuar el proceso quitando  $m$  segmentos disjuntos de  $G_{m-1}$ , obteniéndose componentes conexas, bipartitas, regulares de grado  $m-2$ .

Y así sucesivamente.

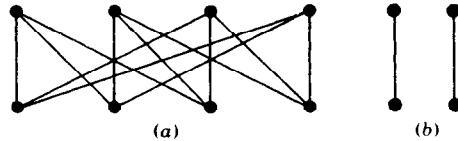


Figura 14-31

### 14.8 Demuestre el teorema 14.3.

Si nuestro mapa conexo  $M$  consta de un solo nodo  $P$ , como en la fig. 14-32(a), entonces  $N = 1$ ,  $S = 0$ , y hay una sola región, o sea,  $R = 1$ . Así en este caso  $N - S + R = 2$ . En caso contrario,  $M$  se puede construir de un solo nodo mediante una de las dos construcciones siguientes:

- (1) Agregue un nuevo nodo  $Q_2$  y conéctelo con el nodo existente  $Q_1$  por un segmento que no cruce ningún segmento existente, como en la fig. 14-32(b).
- (2) Conecte dos nodos existentes  $Q_1$  y  $Q_2$  con un segmento que no cruce ningún segmento existente, como en la fig. 14-32(c).

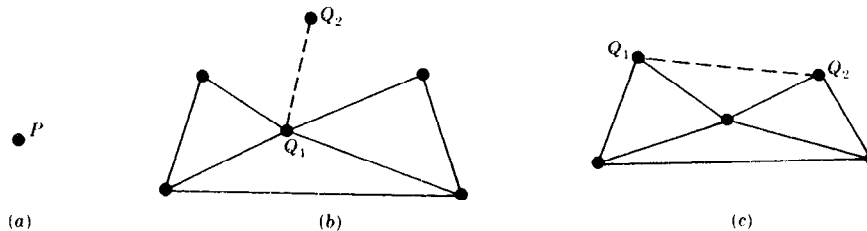


Figura 14-32

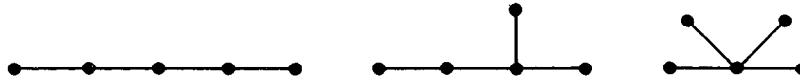
La primera operación no cambia el valor de  $N - S + R$ , ya que tanto  $N$  como  $S$  se aumentan en 1 y el número  $R$  de regiones no se cambia. La segunda operación tampoco cambia el valor de  $N - S + R$ , ya que  $N$  no cambia,  $S$  se aumenta en 1 y (se puede mostrar) el número  $R$  de regiones también se aumenta en 1. Por lo tanto,  $M$  debe tener el mismo valor para  $N - S + R$  que para el mapa que consta de un solo nodo; o sea,  $N - S + R = 2$ , y se ha demostrado el teorema.

## GRAFOS ARBOLES

Dibuje todos los árboles con cinco o menos nodos.

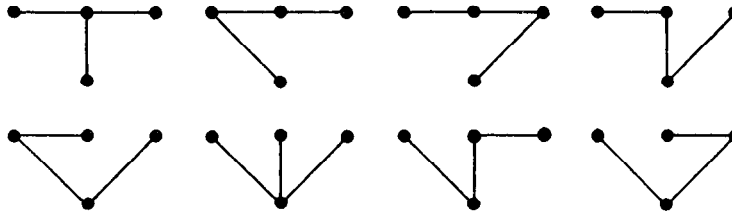
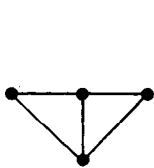
Hay ocho de tales árboles, que se muestran en la fig. 14-33.



**Figura 14-33**

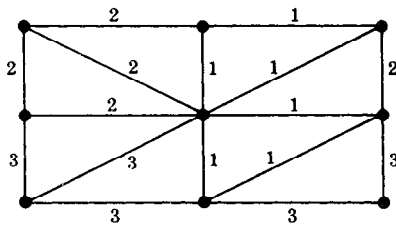
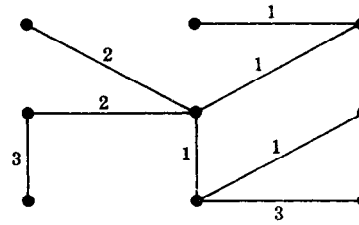
**14.10 Encuentre todos los árboles maximales del grafo  $G$  que se muestra en la fig. 14-34.**

Hay ocho tales árboles maximales, como se muestra en la fig. 14-35. Cada árbol maximal debe tener  $4 - 1 = 3$  segmentos ya que  $G$  tiene cuatro nodos. Así, cada árbol se puede obtener al quitar dos de los cinco nodos de  $G$ . Esto se puede hacer de diez maneras, salvo que dos de ellas producen grafos inconexos. Por lo tanto, los ocho árboles maximales anteriores son todos los árboles maximales de  $G$ .

**Figura 14-34****Figura 14-35**

14.11 Encuentre un árbol maximal minimal para el grafo con segmentos rotulados de la fig. 14-36.

Se van quitando segmentos de peso máximo sin desconectar el grafo. De lo contrario, comience con los ocho nodos y vaya agregando segmentos de peso mínimo sin que se forme ningún ciclo. Ambos métodos dan un árbol maximal minimal tal como se muestra en la fig. 14-37.

**Figura 14-36****Figura 14-37**

14.12 Considere el árbol que se muestra en la fig. 14-38. (a) ¿Cuáles nodos, son puntos corte, si alguno lo es? (b) Encuentre todos los nodos de nivel 3 si el nodo que se toma como raíz es (i)  $u$ , (ii)  $w$ .

- (a) Cada nodo de grado mayor que 1 es un punto corte en el árbol, por lo tanto éstos son  $c$ ,  $r$ ,  $u$ , e  $y$ .
- (b) Encuentre todas las trayectorias de longitud 3 a partir de la raíz para obtener nodos de nivel (o profundidad) 3. Así: (i)  $a$ ,  $b$ , y  $z$ ; (ii)  $c$ ,  $d$ ,  $s$ , y  $t$ .

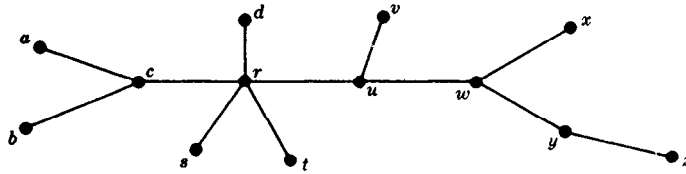


Figura 14-38

**14.13** Considere la expresión algebraica  $(2x + y)(5a - b)^3$ . (a) Dibuje el árbol con raíz ordenado correspondiente. (b) Encuentre el alcance de la operación exponenciación. (El *alcance* de un nodo  $v$  en un árbol con raíz es el subárbol, con raíz  $v$ , generado por  $v$  y por los nodos que siguen a  $v$  en el árbol.) (c) Escriba de nuevo la expresión en notación polaca prefija.

- (a) Use una flecha ( $\uparrow$ ) para exponenciación y un asterisco (\*) para multiplicación y obtener de este modo el árbol que se muestra en la fig. 14-39.  
 (b) El alcance de  $\uparrow$  es el árbol encerrado en la fig. 14-39. Corresponde a la expresión  $(5a - b)^3$ .  
 (c) Recorra el árbol como en la fig. 14-16(b) para obtener

$$* + 2xy \uparrow - * 5ab 3$$

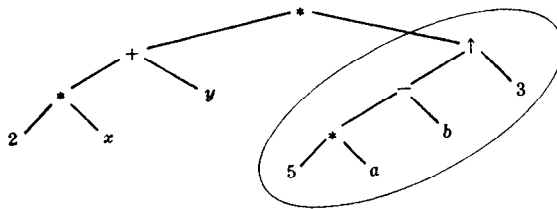
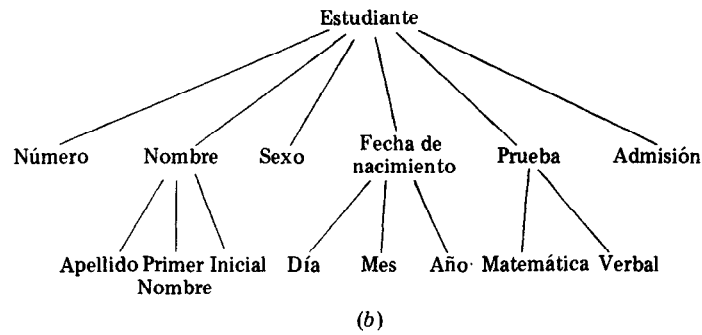


Figura 14-39

**14.14** La figura 14-40(a) muestra los datos del registro de un estudiante. (a) Dibuje el árbol con raíz. (b) ¿Cuáles de los datos en el registro son campos grupos? (c) ¿Cuáles son campos elementales?

- (a) Véase la figura 14-40(b).  
 (b) Los campos grupos son aquellos campos que constan de dos o más, subcampos. Estos son Nombre, Fecha de Nacimiento, y Prueba. Además, no son ni hojas ni raíz.  
 (c) Los campos elementales son los campos que no se subdividen más en subcampos. Estos son Número, Apellido, Primer Nombre, Inicial, Sexo, Día, Mes, Año, Matemática, Verbal, Admisión. Estas son las hojas del árbol.

- 00 Estudiante  
 01 Número  
 01 Nombre  
   02 Apellido  
   02 Primer Nombre  
   02 Inicial  
 01 Sexo  
 01 Fecha de Nacimiento  
   02 Día  
   02 Mes  
   02 Año  
 01 Nota de la Prueba  
   02 Matemática  
   02 Verbal  
 01 Admisión (fecha)



(a)

Figura 14-40

14.15 Suponga que hay dos trayectorias diferentes, digamos  $P_1$  y  $P_2$ , de un nodo  $u$  a un nodo  $v$  en un grafo  $G$ . Demuestre que  $G$  contiene un ciclo.

Sea  $w$  un nodo en  $P_1$  y  $P_2$  tal que los siguientes nodos en  $P_1$  y  $P_2$  son diferentes. Sea  $w'$  el siguiente nodo después de  $w$  que esté tanto en  $P_1$  como en  $P_2$ . (Véase la fig. 14-41.) Entonces las subtrayectorias de  $P_1$  y  $P_2$  entre  $w$  y  $w'$  no tienen nodos en común excepto  $w$  y  $w'$ ; por lo tanto estas subtrayectorias forman un ciclo.

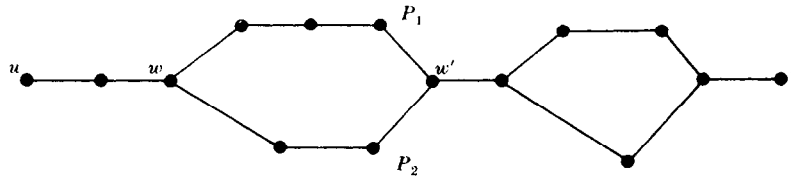


Figura 14-41

14.16 Para un grafo conexo  $G$ , demuestre: (a) Si  $G$  contiene un ciclo  $C$  que no contiene un segmento  $s$ , entonces  $G - s$  es aún conexo. (b) Si  $s = \{u, v\}$  es un segmento tal que  $G - s$  es inconexo, entonces  $u$  y  $v$  pertenecen a componentes diferentes de  $G - s$ .

- (a) Como  $G$  es conexo, dos nodos cualesquiera  $u$  y  $v$  están unidos por una trayectoria  $P$ . Siempre podemos suponer que  $P$  no incluye a  $s$ ; porque de otro modo podríamos construir una tal trayectoria de subtrayectorias de  $P$  y una subtrayectoria de  $C - s$  (véase la fig. 14-42). Así al quitar  $s$  no se puede desconectar  $G$ .
- (b) Suponga, en caso contrario, que  $u$  y  $v$  pertenecen a la misma componente conexa de  $G - s$ . Existe entonces una trayectoria en  $G - s$  que une a  $u$  y a  $v$ . Juntos,  $P$  y  $s$  forman un ciclo  $C$  de  $G$ . Pero entonces, por (a) arriba,  $G - s$  es inconexo. La contradicción da la demostración.

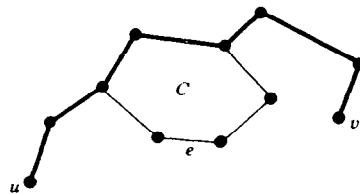


Figura 14-42



**14.17** Demuestre el teorema 14.4: Sea  $G$  un grafo con más de un nodo. Entonces lo siguiente es equivalente: (i)  $G$  es un árbol. (ii) Cada par de nodos está conectado con una única trayectoria. (iii)  $G$  es conexo; pero si se quita cualquier segmento el grafo resultante es inconexo. (iv)  $G$  es libre de ciclos, pero si se le agrega cualquier segmento al grafo entonces el grafo resultante tiene exactamente un ciclo.

(i) implica (ii). Sean  $u$  y  $v$  dos nodos en  $G$ . Como  $G$  es un árbol,  $G$  es conexo y hay por lo menos una trayectoria entre  $u$  y  $v$ . Solamente puede haber una trayectoria entre  $u$  y  $v$ , si no  $G$  contuviera un ciclo (problema 14.15).

(ii) implica (iii). Supongamos que quitamos el segmento  $s = \{u, v\}$  del grafo conexo  $G$ . Como  $s$  está en la única trayectoria de  $u$  a  $v$ ,  $G - s$  es inconexo.

(iii) implica (iv). Por el problema 14.16(a),  $G$  es libre de ciclos. Ahora sean  $x$  e  $y$  dos nodos de  $G$  y  $H$  el grafo obtenido al agregar el segmento  $s = \{x, y\}$  a  $G$ . Como  $G$  es conexo, hay una trayectoria  $P$  de  $x$  a  $y$  en  $G$ ; por lo tanto  $C = Ps$  forma un ciclo en  $H$ . Supongamos que  $H$  contiene otro ciclo  $C'$ . Como  $G$  es libre de ciclos,  $C'$  debe contener el segmento  $s$ , digamos  $C' = P's$ . Entonces  $P$  y  $P'$  son dos trayectorias en  $G$  de  $x$  a  $y$ . (Véase la fig. 14-43.) Por el problema 14.15,  $G$  contiene un ciclo, que contradice el hecho de que  $G$  es libre de ciclos. Por lo tanto  $H$  contiene solamente un ciclo.

(iv) implica (i). Como al agregar cualquier segmento  $s = \{x, y\}$  a  $G$  produce un ciclo, los nodos  $x$  e  $y$  deben ya estar conectados. Por lo tanto  $G$  es conexo y, por hipótesis,  $G$  es libre de ciclos; o sea  $G$  es un árbol.

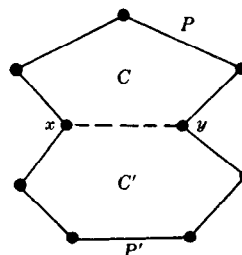


Figura 14-43

## GRAFOS DIRIGIDOS

**14.18** Considere el grafo dirigido  $D$  dibujado en la fig. 14-44. (a) Describa  $D$  formalmente. (b) Encuentre el número de trayectorias de  $X$  a  $Z$ . (c) Encuentre el número de trayectorias de  $Y$  a  $Z$ . (d) ¿Hay fuentes o sumideros? (e) Determine la matriz  $M_D$  del digrafo  $D$ . (f) ¿Es  $D$  débilmente conexo? ¿unilateralmente conexo? ¿fuertemente conexo?

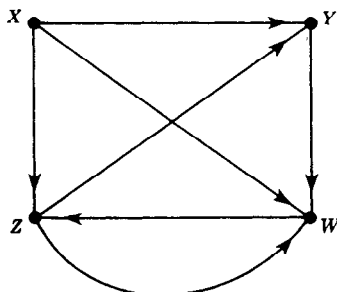


Figura 14-44

(a) Hay cuatro nodos:  $X, Y, Z, W$ , y siete arcos:  $\langle X, Y \rangle, \langle X, W \rangle, \langle X, Z \rangle, \langle Y, W \rangle, \langle Z, Y \rangle, \langle Z, W \rangle, \langle W, Z \rangle$ .

(b) Hay tres trayectorias de  $X$  a  $Z$ :  $(X, Z)$ ,  $(X, W, Z)$  y  $(X, Y, W, Z)$ .

(c) Solamente hay una trayectoria de  $Y$  a  $Z$ :  $(Y, W, Z)$ .

(d)  $X$  es una fuente ya que no es punto terminal de ningún arco, o sea, su grado de entrada es cero. No hay sumideros ya que cada nodo tiene grado de salida no cero, o sea, cada nodo es el punto inicial de algún arco.

(e)

$$M_D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(Rotulamos las filas y columnas de  $M_D$  por  $X, Y, Z, W$ , respectivamente.) La entrada  $m_{ij}$  denota el número de arcos del nodo  $i$  al nodo  $j$ .

- (f) El digrafo no es fuertemente conexo ya que  $X$  es una fuente y por lo tanto no hay trayectoria desde ningún otro nodo, digamos,  $Y$ , a  $X$ . Sin embargo,  $D$  es unilateralmente conexo ya que la trayectoria  $(X, Y, W, Z)$  pasa a través de todos los nodos, y por lo tanto hay una subtrayectoria que conecta a cualquier pareja de nodos.

- 14.19 Considere el grafo dirigido  $D$  dibujado en la fig. 14-45. (a) ¿Hay alguna fuente o sumidero? (b) Encuentre la matriz  $M$  de  $D$ . (c) ¿Es  $D$  unilateralmente conexo? ¿fuertemente conexo?

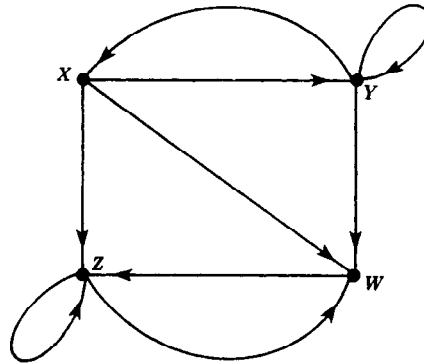


Figura 14-45

- (a) No hay fuentes ni sumideros.

(b) 
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (c)  $D$  es unilateralmente conexo; no es fuertemente conexo, ya que no hay trayectoria de  $Z$  a  $X$ .

- 14.20 Sea  $N = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ . Sea  $R$  la relación en  $N$  definida por:  $xRy$  si  $x$  es menor que  $y$  y  $x$  es primo relativo con  $y$  (o sea,  $x$  e  $y$  no tienen divisores comunes diferentes de 1). (a) Escriba  $R$  como un conjunto de parejas ordenadas. (b) Dibuje el grafo dirigido que corresponde a  $R$ .

(a)  $R = \{(2, 3), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5), (5, 6)\}$

- (b) Dibujamos un arco de  $x$  a  $y$  si  $(x, y)$  pertenece a  $R$ , como se muestra en la fig. 14-46.

- 14.21 Dibuje un digrafo  $D$  que corresponde a la siguiente matriz  $M$  (que tiene como entradas enteros no negativos):

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como  $M$  es una matriz  $4 \times 4$ ,  $D$  tiene cuatro nodos, digamos,  $v_1, v_2, v_3, v_4$ . Para cada entrada  $m_{ij}$ , dibuje  $m_{ij}$  arcos del nodo  $v_i$  al nodo  $v_j$  para obtener el digrafo de la fig. 14-47.

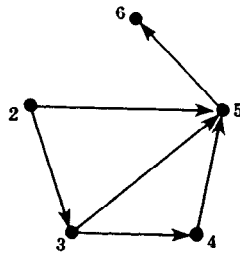


Figura 14-46

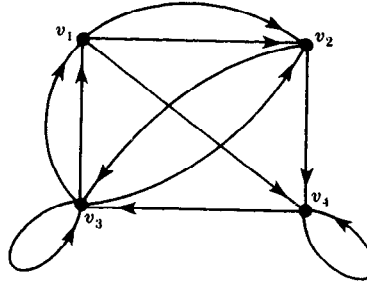


Figura 14-47

## MAQUINAS DE ESTADO FINITO

14.22 Considere una máquina de estado finito  $M$  con símbolos de entrada  $a$  y  $b$  y símbolos de salida  $x$ ,  $y$ ,  $z$  y con diagramas de estado dado en la fig. 14-48. (a) Encuentre la tabla de estado para  $M$ . (b) Determine la salida si la entrada es la cadena de símbolos

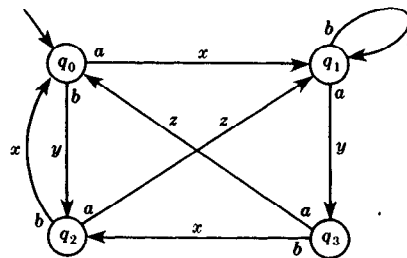


Figura 14-48

- (a) Rotulemos las filas de la tabla con los cuatro estados  $q_0, q_1, q_2, q_3$  y las columnas con los símbolos de entrada  $a, b$ . Usando el diagrama de estado, fig. 14-48, encontramos las entradas en la tabla como sigue. Del estado  $q_0$ , la flecha rotulada  $a$  va al estado  $q_1$  y es rotulada con el símbolo de salida  $x$ . Así  $q_1, x$  se coloca en la tabla en la posición correspondiente a la fila  $q_0$  y, la columna  $a$ . Las otras entradas en la tabla de estado se obtienen análogamente.

	$a$	$b$
$q_0$	$q_1, x$	$q_2, y$
$q_1$	$q_3, y$	$q_1, z$
$q_2$	$q_1, z$	$q_0, x$
$q_3$	$q_0, z$	$q_2, x$

- (b) Comenzando con  $q_0$ , el estado inicial, vamos de estado en estado por las flechas que son rotuladas respectivamente con los símbolos de entrada dados:

$$q_0 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{a} q_3 \xrightarrow{b} q_2 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{b} q_1 \xrightarrow{a} q_3 \xrightarrow{a} q_0 \xrightarrow{b} q_2 \xrightarrow{b} q_0 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{b} q_1$$

Los símbolos de salida en las flechas anteriores son respectivamente  $xyxzzzyyxxz$ .

- 14.23 Sean  $a$  y  $b$  los símbolos de entrada. Construya un autómata finito  $M$  que acepte precisamente aquellas cadenas en  $a$  y  $b$  que tienen un número par de  $a$ 's.

Solamente necesitamos dos estados,  $q_0$  y  $q_1$ . Suponemos que  $M$  está en estado  $q_0$  o  $q_1$ , según que el número de  $a$  es hasta el estado dado sea par o impar. (Así  $q_0$  es un estado de aceptación, pero  $q_1$  es un estado de no aceptación.) Entonces solamente  $a$  cambiará el estado. También,  $q_0$  es el estado inicial. El diagrama de estado de  $M$  está en la fig. 14-49.

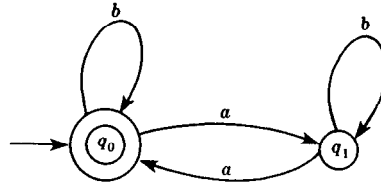


Figura 14-49

## Problemas suplementarios

### GRAFOS, CONEXIDAD

- 14.24 Encuentre el diámetro del grafo  $G$  con nodos  $u, v, w, x, y$  y segmentos

$$(a) \{u, v\}, \{u, x\}, \{v, w\}, \{v, x\}, \{v, y\}, \{x, y\} \quad (b) \{u, v\}, \{v, w\}, \{w, x\}, \{w, y\}, \{x, y\}$$

- 14.25 Considere el grafo de la fig. 14-50. Encuentre: (a) todas las trayectorias del nodo  $A$  al nodo  $H$ , (b) el diámetro del grafo, y (c) el grado de cada nodo. (d) ¿Cuáles nodos son puntos corte, si alguno lo es? (e) Un segmento  $s$  es un grafo conexo  $G$  se llama un *punto de corte* si  $G - s$ , el subgrafo obtenido al quitarle a  $G$  el segmento  $s$ , es inconexo. ¿Cuáles segmentos, si alguno de ellos lo es, son puentes?

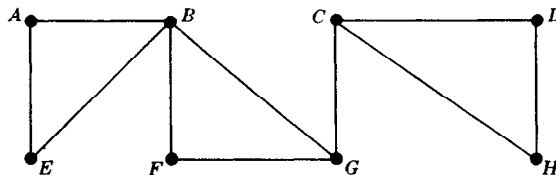


Figura 14-50

- 14.26 Demuestre que un segmento  $s$  es un puente de un grafo conexo  $G$  si y solamente si  $s$  no está contenido en ningún ciclo de  $G$ . (Sugerencia: Use el problema 14.16(a).)
- 14.27 Considere los multigrafos de la fig. 1451. ¿Cuáles de ellos son (a) conexos, (b) libre de lazos, (c) grafos?

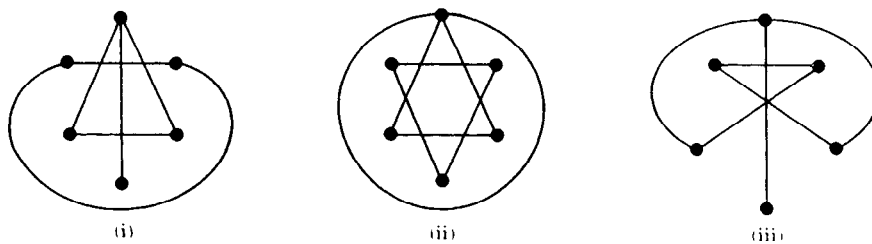


Figura 14-51

- 14.28 Encuentre todos los grafos conexos con cuatro nodos.
- 14.29 Dibuje dos grafos 3-regulares con ocho nodos.
- 14.30 Determine el diámetro de cualquier grafo bipartito completo.
- 14.31 Demuestre que un grafo es bipartito si y solamente si cada uno de sus ciclos es de longitud par.
- 14.32 Muestre que cualquier árbol es un grado bipartito. (*Sugerencia:* Use el problema 14.31.)
- 14.33 Considere las dos operaciones siguientes en un grafo  $G$ : (1) Quitar un segmento. (2) Quitar un nodo y todos los segmentos que incidan en el nodo. Demuestre que cada subgrafo de un grafo finito  $G$  se puede obtener por una sucesión de estas dos operaciones.
- 14.34 Demuestre que todo grafo  $G$  se puede particionar en subgrafos conexos disyuntos maximales (o sea, sus componentes conexas) escogiendo la relación de equivalencia apropiada en los nodos de  $G$ .

### GRAFOS ARBOL

- 14.35 La figura 14-11(b) muestra que ocho de los árboles tienen exactamente siete nodos. Hay otros dos; encuentrelos.
- 14.36 Demuestre que un árbol finito (con por lo menos un segmento) tiene por lo menos dos nodos de grado 1. (*Sugerencia:* Considere una trayectoria de longitud máxima.)
- 14.37 Encuentre el número de árboles maximales para el grafo de la fig. 14-52.

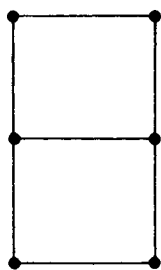


Figura 14-52

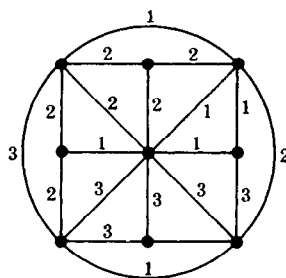


Figura 14-53

14.38 Encuentre un árbol maximal minimal para el grafo rotulado de la fig. 14-53.

14.39 Considere la expresión algebraica.

$$\frac{(3x - 5z)^4}{a(2b + c^2)}$$

- (a) Dibuje el árbol con raíz ordenado correspondiente, usando una flecha ( $\uparrow$ ) para exponenciación, un asterisco (\*) para multiplicación y una línea inclinada (/) para la división.  
 (b) Escriba de nuevo la expresión en (i) notación polaca prefija, (ii) notación polaca postfija.  
 (c) Encuentre el alcance de cada operación de multiplicación.
- 14.40 Supongamos que el registro de pago para un empleado se organiza como sigue: 00 Empleado, 01 Número, 01 Nombre, 02 Apellido, 02 Primer Nombre, 02 Inicial, 01 Horas, 02 Regulares, 02 Extras, 01 Tasa. (a) Dibuje el diagrama de árbol correspondiente, (b) ¿Cuáles son campos grupos? (c) ¿Cuáles son campos elementales?

## GRAFOS DIRIGIDOS

14.41 Considere el grafo dirigido  $D$  de la fig. 14-54.

- (a) Encuentre los grados de entrada y de salida de cada nodo.  
 (b) Encuentre el número de trayectorias de  $v_1$  a  $v_4$ .  
 (c) ¿Hay fuentes y sumideros?  
 (d) Encuentre la matriz  $M$  de  $D$ .  
 (e) Encuentre el número de caminos de longitud 3 o menos de  $v_1$  a  $v_3$ .  
 (f) ¿Es  $D$  unilateralmente conexo? ¿fuertemente conexo?

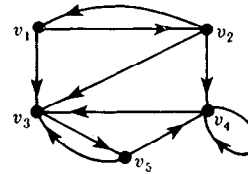


Figura 14-54

14.42 Sea  $D$  el digrafo con nodos  $v_1, v_2, v_3, v_4$  correspondiente a la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Dibuje el digrafo de  $D$ . (b) Encuentre el número de caminos de longitud 3 de  $V_1$  a (i)  $v_1$ , (ii)  $v_2$ , (iii)  $v_3$ , (iv)  $v_4$ . (c) ¿Es  $D$  unilateralmente conexo? ¿fuertemente conexo?
- 14.43 Sea  $R$  la relación en  $N = \{2, 3, 4, 9, 15\}$  definida por “ $x$  es menor que y primo relativo con  $y$ ” (compare con el problema 14.20). (a) Dibuje el diagrama del digrafo de  $R$ . (b) ¿Es  $R$  débilmente conexo? ¿Unilateralmente conexo? ¿fuertemente conexo?
- 14.44 Un digrafo  $D$  es *completo* si para cada par de nodos diferentes  $v_i$  y  $v_j$  o  $\langle v_i, v_j \rangle$  es un arco o  $\langle v_j, v_i \rangle$  es un arco. Demuestre que un digrafo completo finito  $D$  tiene una trayectoria que incluye todos los nodos. (Esto obviamente es cierto para los grafos completos no dirigidos.) Por lo tanto,  $D$  es unilateralmente conexo.
- 14.45 Considere el grafo dirigido rotulado de la fig. 14-55. (a) ¿Cuántas trayectorias (dirigidas) hay del nodo  $x$  al nodo  $y$ ? (b) Encuentre la trayectoria mínima de  $x$  a  $y$ .

## MAQUINAS DE ESTADO FINITO

14.46 Considere la máquina de estado finito con símbolos de entrada  $a, b, c$  y símbolos de salida  $x, y, z$ , y el diagrama de estado de la fig. 14-56. (a) Construya la tabla de estado de  $M$ . (b) Encuentre la salida si la entrada es la cadena  $W = caabbaccab$ .

14.47 Sea  $M$  la máquina de estado finito con la tabla de estado en la fig. 14-57, (a) Dibuje el diagrama de estado de  $M$  dado el estado inicial  $q_0$ . (b) Encuentre la salida si la entrada es la cadena.  $W = aabbabbaab$ .

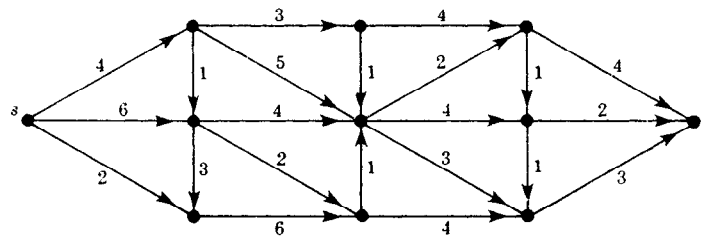


Figura 14-55

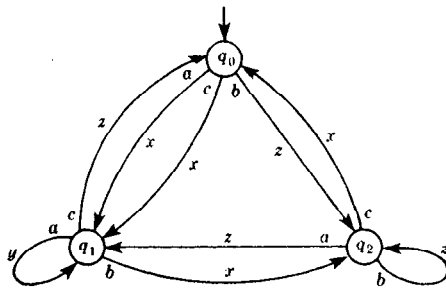


Figura 14-56

	a	b
q <sub>0</sub>	q <sub>1</sub> , x	q <sub>2</sub> , y
q <sub>1</sub>	q <sub>2</sub> , y	q <sub>1</sub> , z
q <sub>2</sub>	q <sub>1</sub> , z	q <sub>0</sub> , x
q <sub>3</sub>	q <sub>0</sub> , z	q <sub>2</sub> , x

Figura 14-57

14.48 Para cada una de las máquinas de la fig. 14-58, con símbolos de entrada  $a$  y  $b$  y símbolos de salida  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , encuentre la salida si la entrada es la cadena  $W = abuaabbbaabaa$ .

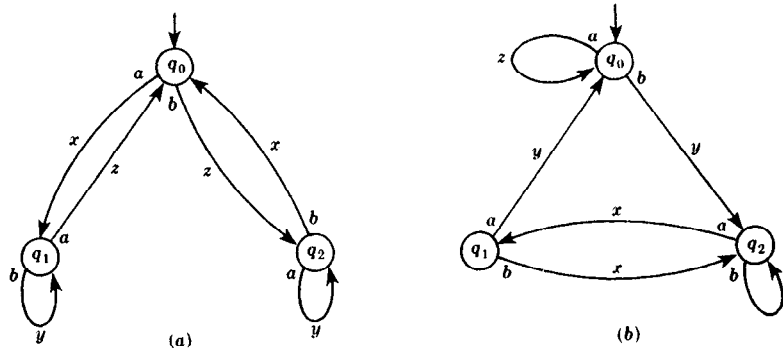


Figura 14-58

14.49 Construya un autómata finito  $M$  con símbolos de entrada  $a$  y  $b$  que acepte solamente aquellas cadenas con  $a$  y  $b$  tales que el número de  $b$ 's es divisible por 3. (Sugerencia: Se requieren tres estados.)

14.50 Construya un autómata finito  $M$  con símbolos de entrada  $a$  y  $b$  que acepte solamente aquellas cadenas con  $a$  y  $b$  tales que  $aabb$  aparezca como una subcadena. (Por ejemplo,  $ba(aabb)ba$  y  $bab(aabb)a$  serán aceptables, pero  $babbaa$  y  $aababaa$  no lo serán.)

## Respuestas a los problemas suplementarios

14.24 (a)  $\text{diam}(G) = 2$ , (b)  $\text{diam}(G) = 3$

14.25 (a) Hay ocho trayectorias:

(A, B, G, C, H)

(A, B, F, G, C, H)

(A, B, G, C, D, H)

(A, B, F, G, C, D, H)

(A, E, B, G, C, H)

(A, E, B, F, G, C, H)

(A, E, B, G, C, D, H)

(A, E, B, F, G, C, D, H)

(b) 4

(d) B, C, G

(c)  $\text{gr}(B) = 4$ ,  $\text{gr}(C) = \text{gr}(G) = 3$ ; los otros tienen grado 2.

(e) {C, G}

14.27 (a) (iii), (b) (i) y (iii), (c) (iii)

14.28 Véase la figura 14-59

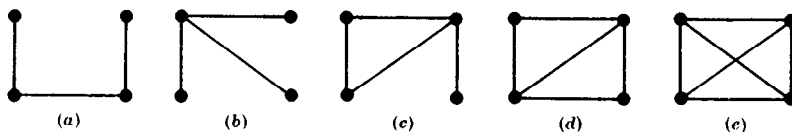


Figura 14-59

14.29 Los dos grafos 3-regulares en la fig. 14-60 son grafos diferentes ya que (b) tiene un 5-ciclo pero (a) no lo tiene.

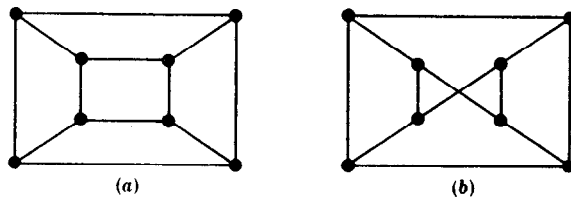


Figura 14-60

14.30  $\text{diam}(K_{1,1}) = 1$ ; todos los otros tienen diámetro 2.

14.34 Sea  $u \sim v$  si  $u = v$  o si hay una trayectoria de  $u$  a  $v$ . Muestre que  $\sim$  es una relación de equivalencia.

14.35 Véase la figura 14-61.

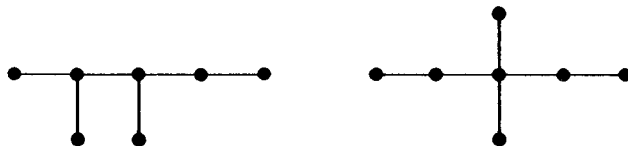


Figura 14-61

14.37 quince

14.38 peso 12



14.39 (a) Véase la figura 14-62.

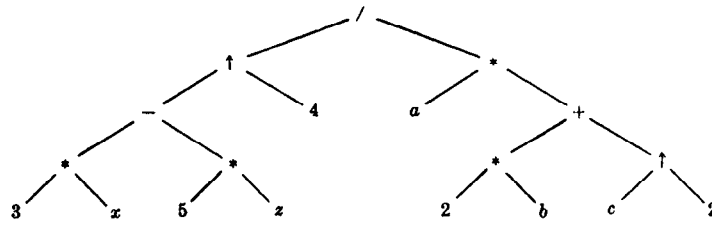


Figura 14-62

- (b) (i)  $/ \uparrow - * 3 x * 5 z 4 * a + * 2 b \uparrow c 2$   
 (ii)  $3 x * 5 z * - 4 \uparrow a 2 b * c 2 \uparrow + *$

(c)  $3x, 5z, a(2b + c^2), 2b$

14.40 (a) Véase la figura 14-63.

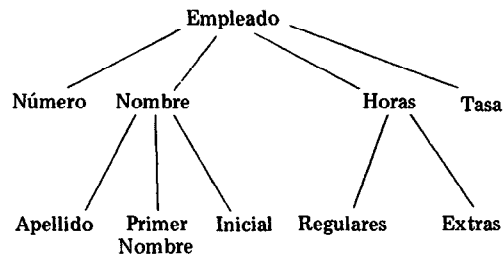


Figura 14-63

- (b) Nombre, Horas  
 (c) Número, Apellido, Primer Nombre, Inicial, Regulares, Extras, Tasa

14.41 (a) Grados de entrada: 1, 2, 4, 3, 1. Grados de salida: 2, 3, 1, 2, 2.

(b) Tres:  $(v_1, v_2, v_4), (v_1, v_3, v_5, v_4), (v_1, v_2, v_3, v_5, v_4)$ . (c) No.

(d)  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  (e) 5. (f) Unilateral, pero no fuerte.

14.42 (a) Véase la figura 14-64. (b) (i) 3, (ii) 5, (iii) 4, (iv) 4. (c) Unilateral fuerte.

14.43 (a) Véase la figura 14-65. (b) Solo débilmente conexo.

14.44 *Sugerencia:* Suponga que  $(v_1, v_2, \dots, v_m)$  es una trayectoria de longitud máxima en  $D$  y que no incluye al nodo  $u$ . Entonces  $\langle u, v_1 \rangle$  y  $\langle v_m, u \rangle$  no son arcos ya que, si lo fueran, la trayectoria podría extenderse. Así  $\langle v_1, u \rangle$  y  $\langle u, v_m \rangle$  son arcos. Sea  $k$  el mínimo entero tal que  $\langle v_k, u \rangle$  y  $\langle u, v_{k+1} \rangle$  son arcos. Entonces  $(v_1, \dots, u, v_{k+1}, \dots, v_m)$  es una trayectoria de mayor longitud.

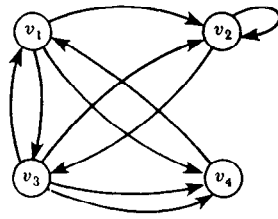


Figura 14-64

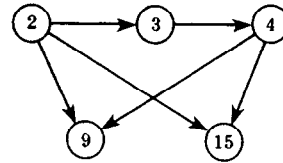
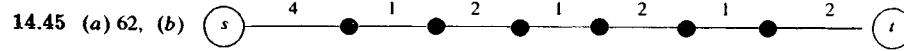


Figura 14-65



14.46 (a) 

	$a$	$b$	$c$
$q_0$	$q_1, x$	$q_2, z$	$q_1, x$
$q_1$	$q_1, y$	$q_2, x$	$q_0, z$
$q_2$	$q_1, z$	$q_2, z$	$q_0, x$

 (b)  $xyyxzzzxyx$

14.47 Véase la figura 14-66(b)  $yyzyzxxyz$

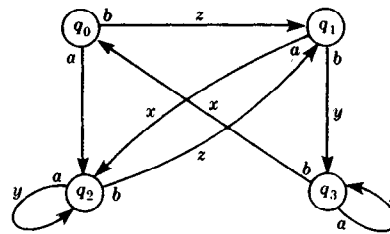


Figura 14-66

14.48 (a)  $xyzxyzzzyxxz$ , (b)  $zyxyyxxzxyxy$

14.49 Véase la figura 14-67.

14.50 Véase la figura 14-68.

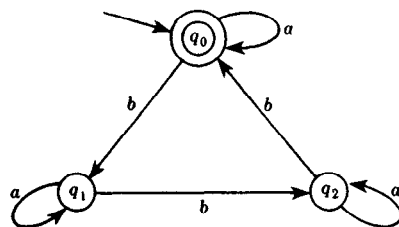


Figura 14-67

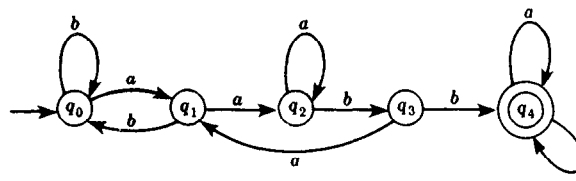


Figura 14-68

# Indice

- Absoluto, error, 66
- Absoluto, valor, 61
- Absorción, leyes de, 171
- Abstracción, principio de, 133
- Aceptación, estados de, 333
- Acíclico, grafo, 323
- Acotamiento, Ley de, 171
- Acumulador, 104
- Adición binaria, 7
  - decimal, 2
- Adyacentes:
  - productos, 194
  - segmentos, 318
- Aislado, nodo, 319
- Alcance de un nodo, 338
- Aleatoria, variable, 300
  - desviación estándar de, 303
  - discreta, 300
  - distribución de, 301
  - función de, 302
  - valor esperado de, 302
  - varianza de, 302
- Algoritmo, 95
- Alto nivel, Lenguaje de, 96
- Análisis combinatorio, 257
- AND, compuerta, 176
- AND-OR, circuito, 178
  - mínimo, 198
- Anormal, salida, 123
- Aproximación, 60
  - por debajo, 60
  - por encima, 60
- Aproximación, error de, 60
- Aproximado, número, 5
- Arbol, 323
  - ordenado con raíz, 325
  - raíz, 325
  - maximal, 324
- Archivo, 326
- Arco, 328
- Argumento, 82
- Aritmética binaria, 7
  - de enteros, 64
  - del computador, 59, 64
  - hexadecimal, 36
  - octal, 82
  - real, 65
- Aritmético promedio, 295
- Arreglo, 218
- ASCII-8, 40
- ASCII. Código americano estándar para intercambio de información, 40
- Asignación, proposición de, 99
- Atomo, 172
- Autómata, 333
- BASIC, operaciones, 115
- Base menos uno, complemento de, 14
- Base, 1
  - complemento de, 14
- Básico, rectángulo, 195
  - máximo, 197
- BCD, Decimal codificado en binario, 37
- Bernoulli:
  - distribución de, 282
  - pruebas de, 282
- Bicondicional, 80
- Binaria decimal, conversión, 3, 5
- Binaria directa, codificación, 37, 38
- Binaria, relación, 142
- Binomial:
  - coeficientes, 258
  - distribución, 282, 304
- Bipartita, grafo, 322
- Bit (Dígito binario), 1, 3
- Bit de verificación, 39
- Boole, G., 169
- Booleana:
  - álgebra, 169
  - expresión, 173
- Bosque, 323
- Byte, 40
- $C(n, r)$  (símbolo de combinación), 262
- Cadena (de símbolos), 331
- Cadena, 171
- Camino cerrado, 319
- Campos, 63, 326
- Carácter especial, 38
- Caracteres, conjunto de, 96
- Característica, 63
- Carrol, Lewis, 135, 160
- Cartesiano:
  - plano, 141
  - producto, 141
- Cero:
  - elemento, 169
  - matriz, 211
  - vector, 210
- Ciclo, 102, 319

- Ciclos, grafo libre de, 323
- Científica, notación, 61
- Cinta, 331
- Circuito AND-OR, 178
  - de interruptores, 175
  - en paralelo, 175
  - en serie, 176
  - equivalente, 179
  - lógico, 174, 177
  - simplificado, 192
- Clases, 140, 295
  - de equivalencia, 145
  - frontera de, 295
  - límites de, 295
  - valor de, 295
- Cociente, conjunto, 145
- Codificación BCD, 37
  - para computadores, 28
  - ponderada, 37
  - XS-3, 38
  - 4-bit, 37
  - 6-bit, 38
  - 8-bit, 40
- Código exceso-tres (XS-3), 38
- Código extendido de intercambio decimal
  - codificado en binario (EBCDIC), 40
- Codominio, 146
- Coefficiente, 239
  - matriz de, 239
- Colección, 140
- Columna de una matriz, 211
- Combinaciones, 262
- Comentario, 97
- Compilador, 96
- Complemento a quince, 36
- Complemento, 14, 23, 136, 169
  - binario, 16
  - decimal, 14
- Complemento, interruptor de, 177
- Complementos, leyes de, 81, 138, 169
- Completo (s):
  - digrafo, 345
  - forma de suma de productos, 174
  - grafo, 320
- Componentes de un vector, 210
- Composición de funciones, 163
- Compuerta, lógica, 174
  - AND, 176
  - NAND, 186
  - NOR, 186
  - NOT, 177
  - OR, 174
- Computadoras:
  - aritmética de, 59, 64
  - codificación para, 28
  - programas para, 96
- Con raíz, árbol, 325
- Conclusión, 82
- Condicional:
  - oración, 80
  - probabilidad, 279
- Conector de entrada, 102
- Conector, símbolo de, 101
- Conexo, grafo, 320
  - débilmente, 329
  - fuertemente, 329
  - unilateralmente, 329
- Congruencia módulo m, 145
- Conjunción, 76
- Conjunto parcialmente ordenado, 171
- Conjunto vacío, 133
- Conjunto, 132
  - cociente, 145
  - de caracteres, 96
  - potencia, 140
  - universal, 133
  - vacio, 133
- Conjuntos, álgebra de, 137
- Conmutativas, Leyes, 81, 138, 169
- Consenso, 200
  - método de, 193, 200
- Constante, 96, 239
  - numérica, 97
- Contador, 104
- Conteo, Principio Fundamental de, 257
- Contradicción, 79
- Contrarrecíproca, 82
- Conversión, binaria-decimal, 3, 5, 19, 21
  - decimal-base-b, 29, 30
  - hexadecimal-binaria, 35
  - hexadecimal-decimal, 34
  - octal-binaria, 32
  - octal-decimal, 31
- Conversión, errores de, 67
- Coordenadas, diagrama de, 143
- Corte, punto de, 320
- Cramer, regla de, 245
- Cruz, partición en, 161
- Cuadrada, matriz, 215
- Cuadráticas, ecuaciones, 101
- Cuerpo de una iteración, 106
- Datos, detalles de, 326
- Datos, nombres de los, 96
- DeMorgan, leyes de, 81, 138, 171
- Débilmente conexo, 329
- Decimal-base-b, conversión, 29, 30
- Decimal:
  - aritmética, 2
  - complementos, 14
  - dígitos, 1
  - lugares, 2
  - sistema, 1
- Decisión, símbolo de, 1 ) ~
- Degenerada, ecuación, 244

- Dependiente:
  - eventos, 280
  - variable, 148
- Desbordamiento, 16
- Desviación, 296
  - estándar, 296, 303
- Determinante, 216
  - y ecuaciones lineales, 244
- Diagonal de una matriz, 215
- Diagrama de coordenadas, 144
  - de Venn, 134
  - del estado, 331, 333
- Diagrama de flujo, 95, 97
- Diagrama de flujo, símbolos:
  - conector, 101
  - decisión, 100
  - entrada, 98
  - preparación, 102
  - proceso, 99
  - salida, 98
  - terminal, 98
- Diámetro de un grafo, 320
- Diez, complemento a, 14
- Diferencia de conjuntos, 137
- Dígitos, 1, 28
  - hexadecimal, 34
  - significativos, 59
- Digrafo, 327
  - completo, 345
  - matriz de un, 328
- Dimensión de un arreglo, 218
- Directo, código binario, 37
- Dirigido, grafo, 327
  - matriz de un, 328
- Discriminante, 101
- Distribución de Bernoulli, 282
  - binomial, 282
  - de frecuencia, 293,
  - hipergeométrica, 301
- Distribución de una variable aleatoria, 301
- Distributivas, Leyes, 81, 138, 169
- Disyunción, 77
  - exclusiva, 77
- Disyunto, 134
- División binaria, 12
  - decimal, 2
- DO, ciclo, 106
- Doble suma, 20
- Dominio, 142, 146
- Dos, complemento a, 16
- DOUNTIL, 112
- DOWHILE, 112
- Dualidad, 137, 170
- $E(X)$  (valor esperado), 303
- EBCDIC, 40
- Ecuación, degenerada, 244
  - determinantes y, 244
  - lineal, 236
- Elemental:
  - evento, 276
  - objeto (dato), 326
- Elemento, 132
- Eliminación de Gauss, 242
- ELSE, 109
- ELSEIF, 110
- Empaquetado, formato decimal, 42
- ENDDO, 112
- ENDIF, 108
- Entero, binario, 3
  - decimal, 3
- Enteros:
  - aritmética de, 64
  - representación de, 63
- Entrada Salida, Símbolos de, 98
- Entrada:
  - símbolos, 330, 333
  - cinta, 331
- EOF (fin de archivo), 102
- Equivalencia lógica, 80
- Equivalencia, clase de, 145
- Equivalencia, relación de, 145
- Equivalentes, circuitos, 179
- Error, promedio de, 60
- Errores, 65
  - absoluto, 66
  - conversión, de, 67
  - de aproximación, 60
  - promedio de, 60
  - relativo, 66
- Escalares, 209
- Espacio equiprobable, 277
  - de probabilidad, 277
  - muestra, 276
- Especiales sucesiones, 75, 179, 183
- Especiales, caracteres, 38
- Esperanza, 302
- Estadística, 293
- Estado de aceptación, 333
  - inicial, 330, 333
  - interno, 330, 333
- Estado, diagrama de, 331, 333
- Estados, tabla de, 331
- Estándar, desviación, 296, 303
- Estructuras DO, 112
  - IF, 108, 109, 110
- Estructurado, programa, 113
- Euler, L, 322
- Evento, 276
  - independiente, 280
- Evento, nodo, 319
- Examinado, dígito, 60
- Excuyente, disyunción, 26
- Exito, 281
- Exponente, 61
- Expresión booleana, 173
- Extensión, Principio de, 132

- Factorial, 257
- Falacia, 82
- Falla, 2
- Fibonacci, sucesión de, 228
- Fin de archivo, 102
- Finito:
  - autómata, 333
  - conjunto, 138
  - espacio de probabilidad, 277
  - grafo, 318
  - máquina de estado, 330
- Forma exponencial, 61, 62
  - binaria, 62
- Frecuencia relativa, 276
- Frecuencia, distribución de, 293
- Fuente, 328
- Fuertemente conexo, 329
- Fuerzas de operaciones, 114
- Función, 146
  - composición de la, 163
  - de salida, 330
  - de una variable aleatoria, 302
  - gráfica de la, 147
  - identidad, 147
  - polinomial, 148
  - próximo estado, 330, 333
- Fundamental, producto, 173
- Gauss, eliminación de, 242
- Generación de un nodo, 325
- Grado de llegada, 328
- Grado de un nodo, 319
- Gráfico de una función, 147
- Gráfico de una relación, 143
- Grafo, 143, 318
  - árbol, 323
  - bipartita, 322
  - completo, 320
  - conexo, 320
  - dirigido, 327
  - libre de ciclos, 323
  - plano, 322
  - regular, 320
  - rotulado, 323
- Grupo de datos, 326
- Hacia atrás, substitución, 240
- Hex, 33
- Hexadecimal, sistema, 33
  - aritmética, 36
  - conversión, 34, 35
  - dígitos, 34
- Histograma, 293
- Hojas en un árbol, 325
- Horner, Método de, 20
- IFTHEN, 108
- IFTHENELSE, 109
- Idempotencia, Leyes de, 81, 138, 171
- Identidad, función, 146
- Identidad, Leyes de, 81, 138, 169
- Identidad, relación de, 143
- Imagen, 146
- Impar, nodo, 319
- Implicación lógica, 84
- Implicante primo, 193
- Imposible, evento, 276
- Incidente, segmento, 319
- Inconsistentes, ecuaciones, 244
- Incremento, 112
- Independientes:
  - eventos, 280
  - pruebas, 281
  - variables, 148
- Indice de una iteracción, 106, 112
- Infinito, conjunto, 138
- Inicial:
  - estado, 330, 333
  - valor, 112
- Inicialización, 104
- Inmediato, sucesor, 172
- Instrucción compuesta, 76
- Interno, producto, 221
- Internos:
  - estados, 330, 334
  - representaciones, 62
- Interruptor, complemento, 177
- Intersección de conjuntos, 136
- Inversa, 82
  - matriz, 216
  - relación, 143
- Inversor, 177
- Invertible, Matriz, 216
- Involución, Ley de, 81, 138, 171
- Iteracción, 102
  - lógica, 112
- Juego, justo, 304
- $K_{m,n}$  (grafo bipartita), 322
- $K_n$  (grafo completo), 321
- Karnaugh, mapas de, 194
- Lazo, o ciclo, 102, 318
  - cuerpo de, 106
  - DO, 106
- Lenguaje de alto nivel, 96
  - de máquina, 96
  - de programación, 96
- Ley de independencia, 82
- Leyes asociativas, 81, 138, 171
- Lineal:
  - arreglo, 218
  - ecuación, 236, 244
- Linealmente ordenado, 171
- Líneas de flujo o diagramas, 95

Literales, 96, 173  
 Lógica de iteración, 108  
   de sucesión, 108  
 Lógica, compuerta, 174  
 Lógica:  
   equivalencia, 80  
   implicación, 84  
 Lógico, circuito 174, 177  
 Longitud de un segmento, 322  
   de un camino, 319  
   de un vector, 221  
   de una palabra, 62  
 Lukasiewicz, J., 326  
  
 Macroinstrucción, 99  
 Mantis, 61  
 Mapa, 322  
   de Karnaugh, 194  
 Máquina de estado finito, 330  
   secuencial, 330  
 Máquina, lenguaje de, 96  
 Más significativo, dígito, 59  
 Matriz aumentada, 239  
 Matriz (ces), 211  
   aumentada, 239  
   cero, 211  
   cuadrada, 215  
   de coeficientes, 239  
   de un digrafo, 328  
   de una relación, 144  
   determinante de, 216  
   diagonal de, 215  
   inverso de, 216  
   invertible, 216  
   multiplicación de, 212  
   polinomio de, 215  
   suma de, 212  
   tamaño de, 211  
   transpuesta de, 224  
   unidad, 215  
 Maximal, árbol, 324  
   minimal, 324  
 Máximo, rectángulo básico, 196  
 Media, 295  
   de una variable aleatoria, 302  
 Mediana, 299  
 Menos significativo, dígito, 59  
 Mensaje, 97  
 Minimal:  
   árbol maximal, 324  
   circuito AND-OR, 198  
   forma de suma de producto, 193  
   recubrimiento, 196  
 Moda, 300  
 Muestra, 276  
 Muestra, espacio, 276  
 Multigrafo, 318  
 Múltiples, segmentos (bordes) (ejes), 318

Multiplicación binaria, 9  
   decimal, 2  
   de matrices, 212  
 Multiplicación, teorema de (probabilidad), 279  
 Mutuamente excluyentes, eventos, 276  
  
 N (enteros positivos), 134  
 n-tupla (enésimo), 210  
 NAND, compuerta, 186  
 Negación, 77  
 Negativa de una matriz, 212  
 Nivel de un árbol, 325  
 No (vea Negación)  
 No ordenadas, particiones, 262  
 No ponderada, suma, 38  
 No subindizada, variable, 218  
 Nodo, 318  
   grado de, 319  
 Nodos, 318  
 NOR, compuerta, 186  
 Norma de un vector, 221  
 Normal, salida, 122  
 Normalizada, forma exponencial, 61  
 NOT, compuerta, 177  
 Notación expandida, 1, 3, 28  
 Nueve, complemento a, 14  
 Nulo, conjunto, 133  
 Numérico, sistema, 28  
   binario, 1, 3  
   decimal, 1  
   hexadecimal (hex), 28, 33  
   octal, 28, 31  
 Numéricos:  
   bits, 39, 40  
   constantes, 97  
 Números aproximados, 59  
   binarios, 3  
   decimales, 1  
   en punto fijo, 63  
   en punto flotante, 63  
   reales, 63  
  
 O (véase: Disyunción)  
 Objeto elemental, 326  
   grupo, 326  
 Objeto, programa, 96  
 Operación, fuerza de, 114  
 OR, compuerta, 174  
 Oración o enunciado, 76  
   compuesta, 76  
   de asignación, 99  
   de escritura, 98  
   de lectura, 98  
 Orden de un determinante, 216  
   de una matriz cuadrada, 215  
 Ordenación, lineal, 171  
   parcial, 171

- Ordenada:
  - árbol con raíz, 325
  - conjunto, 171
  - pareja, 141
  - partición, 141, 261
- Ordenamiento, 232
- $P(n, r)$  (símbolo de permutación), 260
- Palabras, 62
  - longitud de, 62
  - reservadas, 96
- Paralelo:
  - circuito, 175
  - segmentos, 327
- Parcial, orden, 171
- Pareja ordenada, 141
- Paridad, bit de, 39
- Partición, 140
  - no ordenada, 262
  - ordenada, 141, 261
- Pascal, triángulo de, 260
- Permutación, 260
  - circular, 266
  - con repetición, 261
- Peso de un nodo, 322
- Planar, grafo, 322
- Plano cartesiano, 141
- Polaca, notación, 326
  - en forma postfija, 326
  - en forma prefija, 326
- Polinomial, función, 147
  - de una matriz, 215
- Ponderado, código BCD, 37
- Posición, valor de, 1
- Posicional, sistema de numeración, 1
- Potencia, conjunto, 140
- Potencias, 4
- Precede (relación), 171, 325
- Precisión de una computadora, 60
- Premisas, 82
- Preparación, símbolo de, 102
- Prestar (para la substracción), 11
- Primo, implicante, 193
- Probabilidad, 276
  - axiomas, 278
  - condicional, 279
  - espacio de, 277
- Procesamientos, símbolo de, 99
- Producto cartesiano, 141
  - de conjuntos, 141
  - fundamental, 173
  - interno, 221
- Producto punto, 221
- Profundidad de un nodo, 325
- Programa de computadora, 96
  - estructurado, 113
  - fuentes, 96
  - objeto, 96
  - Programa fuente, 96
- Proposiciones, 78
  - álgebra de, 80
- Próximo estado, función de, 330, 333
- Pruebas independientes, 281
  - repetidos, 281
- Prueba, valor de, 112
- Puente de un árbol, 343
- Punto binario, 3
  - decimal, 1
- Punto-fijo, números en, 63
- Punto-flotante, números en, 63
  - aritmética de, 64, 65
- Q (números racionales), 134
- Q (estado inicial), 330, 333
- Quintal, sistema numérico, 28
- R (números reales), 134
- Rama de un árbol, 325
- Real:
  - aritmética, 65
  - número, 63
- Recíproca, 82
- Reconoce (autómata), 333
- Recorrido (en un grafo), 319, 329
  - cerrado, 319
  - longitud del, 319
- Recorrido, 142
- Registro, 326
- Regular, grafo, 320
- Relación, 142
  - binaria, 142
  - de equivalencia, 145
  - gráfico de, 143
  - gráfico dirigido de, 144
  - identidad, 143
  - inversa, 143
  - matriz de, 144
  - simétrica, 145
  - transitiva, 145
- Relativo:
  - error, 66
  - frecuencia, 276
- Repetidas, pruebas, 281
- Representación interna, 62
- Reservadas, palabras, 96
- Rotulado, grafo, 323
  - dirigido, 328,
- Salida (Entrada/Salida), símbolo de, 98
- Salida anormal, 123
  - normal, 122
- Salida, conector de, 102
- Salida, grado de, 327
- Salida:
  - función de, 330
  - símbolos de, 330



- Secuencial, lógica, 108
- Secuencial, máquina, 330
- Segmentos, 318
  - paralelos, 327
  - peso de, 322
- Selección:
  - lógica 108
  - por sorteo, 232
- Semirrecorrido, 329
- Sendero, 319
- Serie, circuito en, 176
- Seudocódigo, 107, 114
- Siete, complemento a, 33
- Sifón, (sumidero) 328
- Significativos, dígitos, 59
- Silogismo, Ley de, 83
- Simplificado, circuito, 193
- Simultáneas, ecuaciones, 237
- Sistema numérico binario, 3
  - adición, 7
  - complemento, 16
  - división, 12
  - entero, 3
  - forma exponencial, 62
  - multiplicación, 9
  - punto, 3
  - substracción, 10
- Solución de ecuaciones, 236, 239
- Subclase, 140
- Subconjunto, 133
- Subgrafo, 319
- Subindizada, variable, 218
- Substitución, Principio de, 80
- Substracción, binaria, 10
  - decimal, 2
  - hexadecimal, 36
  - octal, 33
- Substractiva, cancelación, 67
- Suma de productos, forma de, 173
  - completa, 174
  - mínima, 193
- Sumatoria, símbolo de, 212
- Sume si impar, regla, 60
  
- Tamaño de una matriz, 211
- Tautología, 79
- Terminal, punto, 327
- Terminal, símbolo, 97
- Terminales, 318
- Término máximo, 188
- Término mínimo o minterm, 173
- Toro, 197
- Transitiva, relación, 145
- Transpuesta de una matriz, 224
- Trayectoria, 322
- Triangular, sistema de ecuaciones, 240
- Truncamiento, 60
  
- Unidad:
  - elemento, 169
  - matriz, 215
- Unilateralmente conexo, 329
- Unión, 136
- Universal, conjunto, 133
- Uno, complemento a, 16
  
- Válido, argumento, 82
- Valor absoluto, 61
  - de la clase, 295
  - de prueba, 112
  - de verdad, 76
  - final, 112
  - inicial, 112
- Valor esperado, 302
- Valor final, 112
- Variable aleatoria discreta, 300
- Variable, 96, 146
  - aleatoria, 300
  - dependiente, 148
  - independiente, 148
  - no subindizada, 218
  - subindizada, 218
- Varianza, 296, 302
- Vector, 210
  - longitud de, 221
  - norma, 221
  - producto punto, 221
- Venn, diagrama de, 134
- Ventaja, 279
- Verdad, tabla de, 78, 175
- Verdad, valor de, 76
  
- XS-3, código, 38
  
- Y (véase: Conjunción)
  
- Z (enteros), 134
- Zona, bits de, 39, 40
- Zonificado, formato decimal, 42







