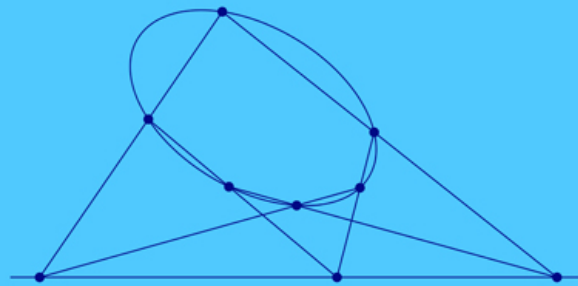


E. OUTERELO DOMÍNGUEZ

J. M. SÁNCHEZ ABRIL

Nociones de Geometría Proyectiva



NOCIONES
DE
GEOMETRÍA PROYECTIVA

ENRIQUE GUTIÉRREZ DOMÍNGUEZ
JOSE M. LANCHETA ABIL



SAEZ Y TORRES

Presentación

En la época del Renacimiento, las exigencias de las artes como la pintura y la arquitectura plantearon la necesidad de disponer de una técnica que permitiera plasmar con realismo un objeto tridimensional sobre una superficie plana. Así surgió la teoría de la Perspectiva geométrica, basada en la noción de proyección central o cónica, de cuyas primeras referencias destaca el tratado *Della pittura*, escrito por Leone Battista Alberti en 1435. El problema planteado por Alberti, de determinar las propiedades comunes a las secciones planas de dos proyecciones distintas de una misma figura, marca el punto de partida de lo que sería en el futuro la Geometría proyectiva.

A mediados del siglo XVII, Gérard Desargues y Blaise Pascal, que habían continuado los trabajos de Apolonio sobre las cónicas, aplican los métodos de proyección y sección de la teoría de la perspectiva, y descubren los famosos teoremas que llevan sus nombres.

Sin embargo, el inicio propiamente dicho de la Geometría proyectiva se produce con la presentación del tratado de Jean Victor Poncelet (*Traité des propriétés projectives des figures*) en 1822. Las aportaciones de Poncelet y de los continuadores que trabajaron en los mismos años en Francia y Alemania determinan el gran periodo clásico de la Geometría proyectiva. Durante el mismo se introducen y clarifican los conceptos fundamentales de transformación proyectiva (proyectividad), dualidad, razón doble, polaridad y correlación. (La razón doble fue utilizada anteriormente por Desargues, y al parecer era conocida en la Antigüedad).

Este periodo culmina con las decisivas contribuciones de Karl G. C. von Staudt, recogidas principalmente en su segundo tratado de 1856. (*Beiträge zur Geometrie der Lage*)

Staudt fue el primero en exponer la Geometría proyectiva sin aplicar nociones de carácter no proyectivo, como las de distancia y ángulo, convirtiendo así esa "Geometría de la posición" en una rama de la Matemática totalmente independiente de la Geometría euclídea.

Las ideas de A. Cayley y F. Klein pondrían de manifiesto algo después que las geometrías métricas euclídea y no euclídeas pueden presentarse como submodelos (subgeometrías) de la nueva geometría. Pues, según el criterio de Klein, una geometría consiste en el estudio de las propiedades de un espacio que se conservan por un grupo de transformaciones específico. Ahora bien, el grupo de las transformaciones proyectivas contiene como subgrupos a los correspondientes a las otras geometrías citadas, por lo que todas éstas son subgeometrías de la proyectiva. En esa época, en palabras de Cayley, "la Geometría proyectiva es toda la Geometría".

En la actualidad, la Geometría proyectiva ha encontrado aplicaciones en diversos dominios, como la visión y el diseño por ordenador, la criptografía (en el caso de cuerpos finitos) e incluso la biología (análisis del movimiento). Esto proporciona un buen ejemplo de cómo una rama de la Matemática pura puede encontrar en el futuro aplicaciones insospechadas.

Este texto presenta esencialmente el contenido de las lecciones de geometría proyectiva de las asignaturas impartidas por el segundo autor en el Departamento de Geometría y Topología de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, desde el curso 1979-1980. La predilección por esta materia llevó hace bastante tiempo a la idea de preparar el libro. Finalmente hemos conseguido los medios informáticos y el dominio de los mismos necesarios para poder realizar el proyecto.

El enfoque seguido responde a los planteamientos sobre el contenido de Geometría en los primeros cursos de la Licenciatura; esto es, presentar los elementos esenciales de la geometría clásica (afín, euclídea y proyectiva) de manera unificada a partir del Álgebra vectorial.

El libro se dirige de manera preferente a los alumnos de las facultades de matemáticas que abordan por primera vez el estudio de esta materia,

y está escrito con la claridad y el detalle logrados con la repetida exposición en clase. Asimismo, se ha procurado que resulte lo más autocontenido posible, presentando ciertos requisitos de Álgebra lineal y Geometría afín necesarios para el desarrollo de algunas secciones.

En el estudio de las cónicas y cuádricas, hemos efectuado alguna aportación personal, para integrar en el esquema del libro ciertos contenidos importantes (cuádricas tangenciales, haces de cónicas proyectivas, estudio afín de las cuádricas), que no son, sin embargo, demasiado accesibles.

El texto se completa con una colección de problemas propuestos suficientemente extensa, que puede dividirse en dos grupos. Uno de ellos está formado por los ejercicios preparados para las clases prácticas, en su mayor parte de carácter analítico. El otro contiene complementos de teoría (propiedades o teoremas clásicos), que el estudiante debería conocer. Como la inclusión de estos resultados en la parte teórica habría alterado bastante la línea expositiva, hemos optado por proponerlos como problemas. Además el alumno puede así comprobar que los conocimientos adquiridos le permiten demostrar con facilidad estos resultados clásicos.

LOS AUTORES

Índice general

Presentación	III
Índice general	VII
Introducción (Motivación)	IX
1. Espacios proyectivos	1
1.1. Espacio proyectivo. Variedades proyectivas	1
1.2. Aplicaciones proyectivas	6
1.3. Referencias y coordenadas	12
1.4. Ecuaciones de subespacios y aplicaciones	17
2. Relación entre el espacio afín y el proyectivo	21
2.1. Espacio proyectivo asociado a un espacio afín	21
2.2. Completación proyectiva de una aplicación afín	24
2.3. Relación entre las representaciones analíticas	28
2.4. Espacios con una completación prefijada	31
3. Dualidad y razón doble	39
3.1. Dualidad proyectiva	39
3.2. Razón doble de cuatro puntos	44
3.3. Razón doble de cuatro hiperplanos	49
4. Correspondencias proyectivas particulares	53
4.1. Homografías de la recta	53
4.2. Homografías del plano	56
4.3. Colineaciones y correlaciones	60

5. Cuádricas proyectivas	67
5.1. Cuádricas proyectivas. Variedades tangentes	67
5.2. Polaridad asociada a una cuádrica	71
5.3. Ecuaciones canónicas y clasificación proyectiva	76
5.4. Relación con las cuádricas afines	80
6. Complementos y haces de cónicas	93
6.1. Algunas propiedades de las cónicas proyectivas	93
6.2. Generalidades sobre haces de cuádricas	101
6.3. Haces de cónicas en el plano complejo	105
A. Requisitos afines del capítulo 2	111
A.1. Primeras definiciones	111
A.2. Completación vectorial de un espacio afín	112
B. Cuádricas afines	117
B.1. Formas biafines	117
B.2. Cuádricas afines. Hiperplanos tangentes	121
B.3. Centros y subespacios diametrales	123
B.4. Ecuaciones canónicas	125
B.5. Clasificación afín	128
C. Problemas propuestos	131
C.1. Problemas propuestos	131
Bibliografía	155
Índice alfabético	157

Introducción (Motivación)

El contenido de estas lecciones se desarrolla siguiendo dos interpretaciones o modelos diferentes de la noción de espacio proyectivo. En primer lugar, el “modelo vectorial” que se presenta en el capítulo 1; por otro lado, la interpretación del espacio proyectivo como extensión o completación del espacio afín, tal como se describe en el capítulo 2. Para los estudiantes a quienes va dirigido este texto, entender bien estas dos interpretaciones del espacio proyectivo y la relación existente entre ambas resulta esencial. Y para eso parece necesario tener presente ciertas ideas o motivaciones intuitivas, que ocuparán el resto de este comentario.

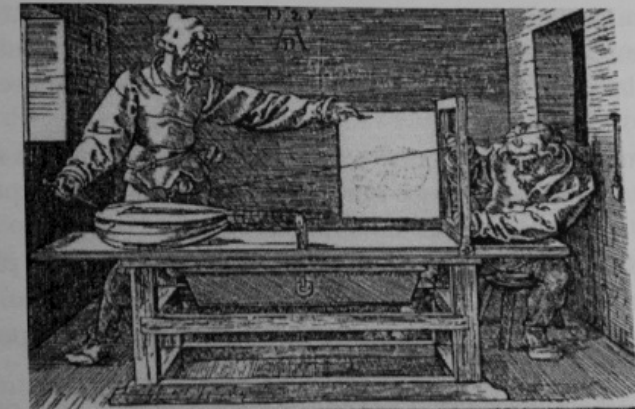


Figura 1: Perspectiva: Máquina de dibujar de Durero

Antecedentes. Las primeras ideas referentes a la Geometría Proyectiva surgieron del estudio de la perspectiva geométrica aplicada a problemas prácticos de la pintura, la arquitectura, etcétera, en la época del Renacimiento.

La ilustración de la figura 1 permite evocar estos orígenes.

La figura 2 ilustra igualmente la forma de obtener en perspectiva desde un punto determinado la imagen de un objeto tridimensional sobre una superficie plana. Primero, los puntos del objeto original son reemplazados por los rayos (rectas) que los proyectan desde el punto de observación. Los puntos de la imagen se obtienen entonces al efectuar las intersecciones de esos rayos con el plano del dibujo.

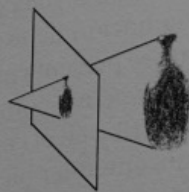


Figura 2: Perspectiva (proyección y sección)

Lógicamente resultaba importante el estudio del comportamiento de las figuras en esos procesos de proyección y sección; y, particularmente, el análisis de las propiedades que en dichos procesos permanecen invariantes.

Por ejemplo, las figuras que pueden corresponder a una recta o una cónica son también una recta o una cónica, respectivamente, pero pueden presentarse algunas irregularidades o anomalías.

Así, en la situación mostrada en la figura 3, a la cónica del plano afín X le corresponde en el plano afín X' una cónica de tipo distinto. Asimismo, a dos rectas del plano X concurrentes en el punto p le corresponden en el plano X' dos rectas paralelas.

La causa de esas anomalías es intuitivamente clara: faltan puntos en el plano X' para representar fielmente una figura del plano X que contenga al punto p , puesto que el rayo que proyecta p desde O no corta al plano X' . De ahí surge la idea de modificar el plano (espacio) afín, añadiéndole una colección adecuada de puntos, y considerar una nueva clase de geometría en la que las propiedades de las figuras permanezcan invariantes mediante los procesos de proyección y sección.

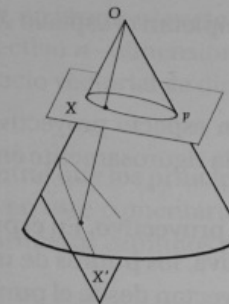


Figura 3: Proyección y sección de figuras afines

Completación del espacio afín: espacio proyectivo. Como acabamos de indicar, a partir de un espacio afín podemos obtener un nuevo espacio, añadiendo al primero una colección adecuada de puntos adicionales. Trataremos de motivar los requisitos del proceso de completación, considerando de nuevo los elementos de la figura 3, especialmente el plano X' .

En la figura, el plano que pasa por O paralelo a X' corta a X en una recta t que contiene al punto p . Los puntos de t son los puntos de X que no pueden ser proyectados sobre X' desde el punto O . Por tanto, si una recta afín r de X es incidente con la recta t y r' es la proyección de r sobre X' , resulta natural completar r' con un único punto adicional.

Además, si las rectas r y s de X concurren en un punto de t , entonces las proyecciones de r y s sobre X' son rectas paralelas. Por tanto, es también natural completar estas proyecciones con el mismo punto adicional, ya que la situación de incidencia de las rectas completadas sería así análoga a la de las rectas de partida r y s .

Los requisitos anteriores se aplican a un espacio afín arbitrario.

En efecto, a partir de cualquier espacio afín Z , podemos obtener un espacio proyectivo \tilde{Z} , completando Z con un conjunto de puntos adicionales, de forma que:

- Cada recta afín de Z se completa con un punto único.
- Dos rectas (afines) de Z se completan con el mismo punto si, y sólo si, son paralelas.

Los puntos de \tilde{Z} que completan el espacio Z reciben la denominación de puntos del infinito de Z .

Esta interpretación de un espacio proyectivo como completación de un espacio afín será estudiada rigurosamente en el capítulo 2.

Modelo vectorial del espacio proyectivo. En el proceso de proyección asociado a la noción de perspectiva, los puntos de un objeto son "reemplazados" por los rayos que los proyectan desde el punto de observación. La terminología sugiere que dichos rayos pueden representar adecuadamente a los puntos del objeto original, lo que constituye la idea básica del argumento que sigue.

En la situación mostrada en la figura 4, cualquier punto del plano afín Z puede ser representado intuitivamente por el rayo que lo proyecta desde el origen O . Por tanto, la colección de los puntos de la recta afín A queda representada por la colección de los rayos (coplanarios) que pasan por O y cortan a A . Además, es coherente con esta interpretación aceptar que el único rayo del plano de los anteriores que pasa por O y no corta a A representa el punto del infinito de la recta A .

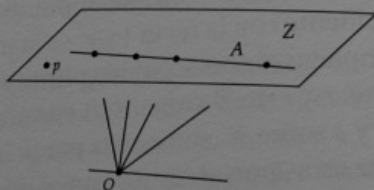


Figura 4: (Ver texto)

De esta forma, la colección de los puntos de la recta proyectiva \tilde{A} vendría representada por la colección completa de los rayos del plano citado que pasan por O . (Dibujo inferior de la figura 4)

Una interpretación análoga es válida para el plano proyectivo \tilde{Z} ; y, en general, para el espacio proyectivo correspondiente a un espacio afín cualquiera. Además, la interpretación obtenida se transforma fácilmente en

una definición satisfactoria, en términos vectoriales simples. En efecto, definiremos un espacio proyectivo n -dimensional como el conjunto formado por las rectas de un espacio vectorial de dimensión $n+1$ que contienen al origen del espacio.

Señalamos el papel central que los principios de proyección y completación han desempeñado en este comentario. Su propósito es lograr que el formalismo de los dos primeros capítulos resulte más motivado y transparente.

Capítulo 1

Espacios proyectivos

1.1. Espacio proyectivo. Variedades proyectivas

En este capítulo estudiaremos los conceptos más básicos de la Geometría Proyectiva, adoptando el enfoque vectorial mencionado en la introducción. Allí dimos algunas ideas sobre la motivación de la noción de espacio proyectivo y el contenido intuitivo de la misma. Ahora nos centraremos en la definición formal.

Definición 1.1.1. *Llamamos espacio proyectivo asociado a un espacio vectorial (E, K) al conjunto $P(E)$, cuyos elementos son las rectas vectoriales de E .*

Si $\dim_K E = n$, decimos que $P(E)$ es un espacio proyectivo de dimensión $n - 1$ sobre el cuerpo K .

Por ejemplo, si $\dim E = 1$, entonces $P(E)$ es un conjunto con un solo elemento y $\dim P(E) = 0$. Si $E = \{0\}$, entonces $P(E)$ es el conjunto vacío y $\dim P(E) = -1$.

Aunque el cuerpo base K puede ser en principio arbitrario, es adecuado limitarse al cuerpo real \mathbb{R} . (En particular esta restricción va implícita para las figuras y los comentarios intuitivos)

Observación. Si $v \in E$ es un vector no nulo, la recta vectorial engendrada por v es un elemento de $P(E)$, que designamos por $[v]$. Es conveniente

considerar la aplicación

$$\pi: E - \{0\} \rightarrow P(E), v \mapsto [v]$$

Claramente, π es suprayectiva, y $\pi(u) = \pi(v)$ si y sólo si u y v son proporcionales.

Ejemplo (Espacios proyectivos canónicos). El espacio $P(K^{n+1})$, asociado al espacio vectorial canónico K^{n+1} , es el espacio proyectivo canónico de dimensión n sobre el cuerpo K .

En este caso, adoptamos la notación $\pi(x_0, \dots, x_n) = (x_0 : \dots : x_n)$, indicando así que las componentes del punto de $P(K^{n+1})$ están determinadas salvo proporcionalidad.

Subespacios o variedades proyectivas

Claramente, si L es un subespacio vectorial de E , entonces $P(L)$ es un subconjunto de $P(E)$ que coincide con $\pi(L - \{0\})$. Esto se tendrá en cuenta en lo que sigue.

Definición 1.1.2. Decimos que un subconjunto M de un espacio $P(E)$ es un subespacio proyectivo o variedad proyectiva de $P(E)$ cuando existe un subespacio vectorial L de E tal que $M = P(L)$.

Como es habitual, los términos punto, recta proyectiva o plano proyectivo se aplican a los (sub)espacios proyectivos de dimensiones 0, 1 ó 2, respectivamente. Un hiperplano proyectivo de un espacio proyectivo n -dimensional es un subespacio de dimensión $n - 1$.

Proposición 1.1.3. Existe una biyección entre el conjunto de los subespacios vectoriales de E y el conjunto de los subespacios proyectivos de $P(E)$, dada por la aplicación $L \mapsto P(L)$. La biyección inversa es la aplicación $M \mapsto \pi^{-1}(M) \cup \{0\}$.

Dem. Por la definición de subespacio proyectivo, la primera aplicación está bien definida (entre los conjuntos mencionados) y es suprayectiva. Además, si dos subespacios vectoriales L_1 y L_2 tienen las mismas rectas

vectoriales, es decir, si $P(L_1) = P(L_2)$, entonces $L_1 = L_2$. Por tanto, la aplicación considerada es inyectiva.

Para la segunda afirmación basta ver que, si $P(L) = M$, entonces $L = \pi^{-1}(M) \cup \{0\}$. Y esto resulta de las igualdades siguientes, donde cada una se obtiene claramente de la anterior

$$M = P(L), M = \pi(L - \{0\}), \pi^{-1}(M) = \pi^{-1}(\pi(L - \{0\})) = L - \{0\}, \pi^{-1}(M) \cup \{0\} = L$$

□

Podemos definir variedades proyectivas mediante ciertos procedimientos usuales, que exponemos en las proposiciones siguientes.

Proposición 1.1.4 (Intersección de variedades proyectivas). Supongamos que $(M_i)_{i \in I}$ es una familia de subespacios proyectivos de $P(E)$, donde $M_i = P(L_i)$, para todo $i \in I$. Entonces, la intersección de la familia considerada es un subespacio proyectivo, y se verifica $\bigcap_{i \in I} M_i = P(\bigcap_{i \in I} L_i)$.

Dem. Los puntos de M_i son las rectas vectoriales de L_i . Por tanto, los puntos de $\bigcap_{i \in I} M_i$ son las rectas vectoriales de E contenidas en $\bigcap_{i \in I} L_i$. Es decir, $\bigcap_{i \in I} M_i = P(\bigcap_{i \in I} L_i)$. □

En la proposición siguiente y en lo sucesivo, designaremos por $V_I(T)$ el subespacio vectorial engendrado por un subconjunto T .

Proposición 1.1.5 (Variedad engendrada por un subconjunto). Un subconjunto cualquiera S de $P(E)$ determina una variedad proyectiva $V_p(S)$, que es la más pequeña de todas las que contienen al conjunto S . Además, $V_p(S) = P(V_I(S'))$, donde $S' = \pi^{-1}(S) = \{v \in E - \{0\} : [v] \in S\}$.

Dem. Las condiciones del enunciado significan que

- S está contenido en $P(V_I(S'))$
- Todo subespacio M que contiene a S contiene a $P(V_I(S'))$

La primera de estas condiciones es clara:

$$[v] \in S \Rightarrow v \in S' \Rightarrow v \in V_I(S') \Rightarrow [v] \in P(V_I(S'))$$

Por otro lado, si $S \subset M$, $M = P(L)$, entonces

$$S' = \pi^{-1}(S) \subset \pi^{-1}(M) \subset \pi^{-1}(M) \cup \{0\} = L$$

donde la última igualdad resulta de la proposición 1.3.

De esta forma, L contiene a $V_I(S')$, con lo que $M = P(L)$ contiene a $P(V_I(S'))$. \square

Definición 1.1.6. Con los datos de la proposición anterior, decimos que $V_p(S)$ es el subespacio proyectivo de $P(E)$ engendrado por el subconjunto S .

Proposición 1.1.7 (Suma de variedades proyectivas). Supongamos que en un espacio proyectivo $(M_i)_{i \in I}$ es una familia de variedades proyectivas tal que $M_i = P(L_i)$, para todo $i \in I$. Entonces, $V_p(\bigcup_{i \in I} M_i) = P(\sum_{i \in I} L_i)$.

Dem. Por la proposición anterior, el subespacio vectorial correspondiente a $V_p(\bigcup_{i \in I} M_i)$ es $V_I(\pi^{-1}(\bigcup_{i \in I} M_i))$. Además, es claro que este subespacio es idéntico a cada uno de los siguientes:

$$V_I(\{0\} \cup \pi^{-1}(\bigcup_{i \in I} M_i)), \quad V_I(\bigcup_{i \in I} (\{0\} \cup \pi^{-1}(M_i))), \quad V_I(\bigcup_{i \in I} L_i), \quad \sum_{i \in I} L_i$$

\square

Definición 1.1.8. Decimos que el subespacio proyectivo $V_p(\bigcup_{i \in I} M_i)$ de la proposición anterior es el subespacio unión o suma de la familia considerada $(M_i)_{i \in I}$.

Cuando I es finito, $I = \{1, \dots, r\}$, la notación $V_p(M_1, \dots, M_r)$ sustituye usualmente a $V_p(\bigcup_{i \in I} M_i)$.

Teorema de incidencia. Variedades suplementarias

Las posiciones relativas de dos variedades proyectivas están sometidas a la relación de incidencia dada en el teorema siguiente. Este teorema es el principal resultado de la presente sección.

Teorema 1.1.9 (Teorema de incidencia). Si M_1 y M_2 son subespacios proyectivos de un espacio $P(E)$, entonces

$$\dim M_1 + \dim M_2 = \dim(M_1 \cap M_2) + \dim V_p(M_1, M_2)$$

Dem. Sean $M_1 = P(L_1)$, $M_2 = P(L_2)$. Entonces, por las proposiciones anteriores,

$$M_1 \cap M_2 = P(L_1 \cap L_2), \quad V_p(M_1, M_2) = P(L_1 + L_2)$$

lo que convierte la relación a demostrar en

$$\dim P(L_1) + \dim P(L_2) = \dim P(L_1 \cap L_2) + \dim P(L_1 + L_2)$$

Por tanto, el teorema resulta de la relación de incidencia para los subespacios vectoriales L_1 y L_2 . \square

Corolario 1.1.10. Si un hiperplano proyectivo M_1 no contiene a un subespacio proyectivo M_2 , entonces $M_1 \cap M_2$ es un hiperplano proyectivo de M_2 .

Dem. En efecto, supongamos $\dim P(E) = n$, $\dim M_1 = n - 1$, $M_1 \not\supset M_2$.

Con estas condiciones, es claro que $\dim V_p(M_1, M_2) = n$. Por tanto, la relación de incidencia

$$\dim M_1 + \dim M_2 = \dim(M_1 \cap M_2) + \dim V_p(M_1, M_2)$$

asegura que $\dim(M_1 \cap M_2) = \dim M_2 - 1$. \square

En particular, como las rectas son los hiperplanos de un plano, tenemos el resultado siguiente:

Corolario 1.1.11. Dos rectas proyectivas distintas y coplanarias se cortan siempre en un punto único.

De acuerdo con el teorema 1.9, las propiedades de incidencia de las variedades proyectivas resultan más sencillas que las de las variedades afines. En particular, el corolario precedente muestra que, a diferencia de lo que sucede en geometría afín, en geometría proyectiva no existe la noción de paralelismo.

Definición 1.1.12 (Variedades proyectivas suplementarias). En un espacio $P(E)$, decimos que dos subespacios proyectivos M_1 y M_2 son suplementarios cuando $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ y $V_p(M_1, M_2) = P(E)$.

Proposición 1.1.13. Dos subespacios proyectivos $P(L_1)$ y $P(L_2)$ de un espacio $P(E)$ son suplementarios en $P(E)$ si y sólo si los subespacios vectoriales L_1 y L_2 son suplementarios en E .

Dem. En efecto, basta comprobar que las condiciones $P(L_1) \cap P(L_2) = \emptyset$ y $V_p(P(L_1), P(L_2)) = P(E)$ son equivalentes a $L_1 \cap L_2 = \{0\}$ y $L_1 + L_2 = E$.

Ahora, esto es inmediato, puesto que los subespacios vectoriales de las dos últimas igualdades son los correspondientes a los que figuran en las igualdades escritas en primer lugar. \square

Finalmente observamos que, si M_1 y M_2 son subespacios proyectivos suplementarios en un espacio de dimensión n , entonces $\dim M_1 + \dim M_2 = n - 1$.

Nota sobre las figuras. Aunque la interpretación de un espacio proyectivo como completación de un espacio afín no será estudiada hasta el capítulo siguiente, en las figuras seguiremos siempre esta interpretación. Así, representaremos los puntos, rectas y planos proyectivos de la misma forma que las variedades correspondientes del espacio afín. (Los puntos que completan estas variedades no se incluyen en los dibujos)

1.2. Aplicaciones proyectivas

Por la definición del espacio proyectivo, toda aplicación entre dos de estos espacios, o entre subconjuntos de los mismos, es una correspondencia entre rectas vectoriales. En particular, una aplicación proyectiva es la correspondencia entre rectas vectoriales definida por una aplicación lineal. La definición rigurosa es la siguiente.

Definición 1.2.1. Consideramos espacios proyectivos $P(E)$ y $P(E')$ sobre un mismo cuerpo K y un subespacio $P(N) \subsetneq P(E)$. Llamamos aplicación proyectiva de $P(E)$ en $P(E')$ de centro $P(N)$ a toda aplicación $\tilde{f} : P(E) - P(N) \rightarrow P(E')$, determinada por una aplicación lineal $f : E \rightarrow E'$, de modo que $N = \ker f$ y $\tilde{f}([u]) = [f(u)]$, para todo $[u] \in P(E) - P(N)$.

Decimos entonces que \tilde{f} es la aplicación proyectiva inducida por la aplicación lineal f .

En general, el dominio de la aplicación proyectiva no es el espacio $P(E)$, sino $P(E) - P(N)$. El subespacio $P(N)$ debe ser excluido, porque las rectas vectoriales de N no se transforman en rectas vectoriales mediante la aplicación lineal. Por otro lado, esta aplicación es no nula, ya que $P(N) \neq P(E)$.

Ejemplo (Proyecciones cónicas o centrales). Sean $B = P(L)$ y $C = P(N)$ subespacios suplementarios propios de un espacio $P(E)$. Entonces, existe una aplicación $P(E) - P(N) \rightarrow P(E)$, llamada proyección cónica de base B y centro C , que transforma $\alpha \in P(E) - P(N)$ en el punto único de $B \cap V_p(\alpha, C)$.

Además, esta función es una aplicación proyectiva, inducida por la proyección vectorial $g : (v + w) \mapsto v$, para todo $v \in L, w \in N$.

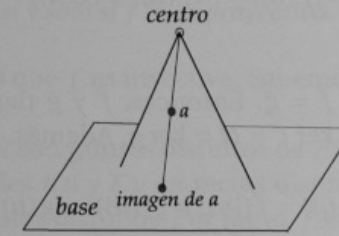


Figura 1.1: Proyección cónica

Dem. Por la hipótesis y la proposición 1.13, $E = L \oplus N$, lo que asegura la existencia de la proyección vectorial g . Como su núcleo es N , g induce una aplicación proyectiva $\tilde{g} : P(E) - P(N) \rightarrow P(E)$.

Por tanto, basta comprobar que, si $\alpha = [u]$ y $\alpha \notin C$, entonces

$$B \cap V_p(\alpha, C) = \{\tilde{g}(\alpha)\}$$

En efecto, en la relación de incidencia

$$\dim B \cap V_p(\alpha, C) + \dim V_p(B, V_p(\alpha, C)) = \dim B + \dim V_p(\alpha, C)$$

la variedad $V_p(B, V_p(\alpha, C))$ es $P(E)$ y la suma de la derecha es la dimensión de $P(E)$. En consecuencia, $B \cap V_p(\alpha, C)$ consta de un punto único.

Por otro lado, como $u = v + w$, donde $v \in L, w \in N$, se tiene $g(u) = v = u - w$, por lo que $g(u) \in L \cap (Ku + N)$. Es decir, cambiando L y $Ku + N$ por los subespacios proyectivos correspondientes, $\tilde{g}(\alpha) \in B \cap V_p(\alpha, C)$.

Con esto queda demostrado. \square

El resultado siguiente precisa la definición 2.1.

Proposición 1.2.2. *Dos aplicaciones lineales no nulas $f, g: E \rightarrow E'$ inducen la misma aplicación proyectiva de $P(E)$ en $P(E')$ si, y sólo si, son proporcionales.*

Dem. Supongamos primero que f y g son proporcionales, $g = \lambda f$.

Entonces, f y g tienen un mismo núcleo N , por lo que \tilde{f} y \tilde{g} tienen el mismo centro $P(N)$. Además, para todo $[u] \in P(E) - P(N)$,

$$\tilde{f}([u]) = [f(u)] = [\lambda f(u)] = [g(u)] = \tilde{g}([u])$$

Por tanto, $\tilde{f} = \tilde{g}$.

Ahora supongamos $\tilde{f} = \tilde{g}$. Entonces, \tilde{f} y \tilde{g} tienen un mismo centro $P(N)$, lo que indica que $\ker f = N = \ker g$. Además, para todo $[u] \in P(E) - P(N)$,

$$[f(u)] = \tilde{f}([u]) = \tilde{g}([u]) = [g(u)] \quad (1)$$

Elegimos un subespacio vectorial L tal que $L \oplus N = E$.

Para todo $u \in L$, no nulo, el punto $[u]$ pertenece a $P(E) - P(N)$, y así, teniendo en cuenta (1), existe un escalar $\lambda_u \neq 0$ tal que $g(u) = \lambda_u f(u)$.

Probaremos que $\lambda_u = \lambda_v$, para todo u, v en $L - \{0\}$:

- Primero supongamos u y v linealmente independientes. Entonces,

$$0 = g(u) + g(v) - g(u+v) = \lambda_u f(u) + \lambda_v f(v) - \lambda_{u+v} f(u+v) = (\lambda_u - \lambda_{u+v}) f(u) + (\lambda_v - \lambda_{u+v}) f(v).$$

Además, $f(u)$ y $f(v)$ son linealmente independientes, como u y v , ya que la restricción de f a L es inyectiva. (Porque L es suplementario de $\ker f$)

Por tanto, $\lambda_u - \lambda_{u+v} = 0$, $\lambda_v - \lambda_{u+v} = 0$ y $\lambda_u = \lambda_{u+v} = \lambda_v$.

- Ahora sean u y v linealmente dependientes; es decir, $v = ku$, $k \neq 0$. Entonces,

$$0 = kg(u) - g(v) = k\lambda_u f(u) - \lambda_v f(v) = (\lambda_u - \lambda_v)kf(u).$$

Además, $f(u) \neq 0$, ya que $u \in L - \{0\}$ y f es inyectiva sobre L .

Por tanto, $\lambda_u = \lambda_v$.

Con esto hemos demostrado que existe un escalar no nulo λ tal que g y λf coinciden sobre $L - \{0\}$. Como g y λf tienen el mismo núcleo N , las dos aplicaciones coinciden sobre los subespacios L y N . Esto implica que $g = \lambda f$, puesto que $E = L \oplus N$. \square

Propiedades de las aplicaciones proyectivas

Proposición 1.2.3. *Sea \tilde{f} una aplicación proyectiva de $P(E)$ en $P(E')$ de centro $P(N)$, inducida por una aplicación lineal f . Entonces:*

- \tilde{f} es inyectiva si y sólo si f es inyectiva. Además, estas condiciones se cumplen si y sólo si $P(N)$ es vacío.

- \tilde{f} es suprayectiva si y sólo si f es suprayectiva.

Dem. Supongamos que f es inyectiva. Sabemos que $\ker f = \{0\}$, por lo que $P(N) = \emptyset$.

Además, si $[u]$ y $[v]$ son puntos distintos de $P(E)$, entonces f transforma las rectas vectoriales Ku y Kv en rectas distintas, lo que significa que $\tilde{f}([u])$ y $\tilde{f}([v])$ son puntos distintos. Por tanto, \tilde{f} es inyectiva.

Supongamos ahora que f no es inyectiva. Entonces, $\ker f \neq \{0\}$, por lo que $P(N) \neq \emptyset$.

Además, podemos elegir vectores $u, v, w \in E$ tales que $u \in N - \{0\}$, $v \in E - N$, $w = u + v$. De esta forma, v y w son linealmente independientes, $v, w \in E - N$ y $f(v) = f(w)$. En consecuencia, \tilde{f} transforma los puntos distintos $[v]$ y $[w]$ de $P(E) - P(N)$ en el mismo punto $[f(v)] = [f(w)]$. Por tanto, \tilde{f} no es inyectiva.

Esto completa la prueba del primer apartado. El resto de la demostración se deja como ejercicio. \square

Corolario 1.2.4. \tilde{f} es biyectiva si y sólo si f es un isomorfismo vectorial.

Definición 1.2.5. *Decimos que una aplicación proyectiva es una homografía o isomorfismo proyectivo cuando dicha aplicación es biyectiva.*

Así, por el resultado anterior, las homografías son las aplicaciones proyectivas inducidas por los isomorfismos vectoriales.

Ejemplo (Perspectividades en el plano). Consideramos dos rectas distintas $A = P(L_1)$ y $B = P(L)$ de un plano proyectivo y un punto α_0 del plano no perteneciente a $A \cup B$.

Sea $\tilde{f} : A \rightarrow B$ la aplicación obtenida por restricción de la proyección cónica \tilde{g} de centro $\{\alpha_0\}$ sobre la recta B .
Por la definición de la proyección cónica, es claro que \tilde{f} es una biyección que deja fijo el punto de intersección de A y B . Además, \tilde{f} es una homografía, que recibe el nombre de perspectividad de centro α_0 .

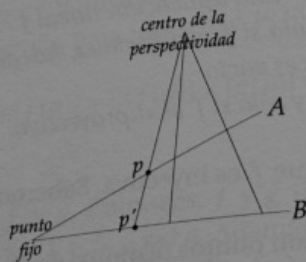


Figura 1.2: Perspectividad entre rectas A y B

Dem. En efecto, como $\{\alpha_0\}$ es el centro de \tilde{g} , la recta vectorial correspondiente a $\{\alpha_0\}$ es el núcleo de la proyección vectorial g que induce la proyección cónica. Luego, como $\{\alpha_0\}$ y A son subespacios suplementarios, también lo son los subespacios vectoriales $\ker g$ y L_1 , con lo que $g|_{L_1} : L_1 \rightarrow L$ es una aplicación inyectiva. Obviamente, $\tilde{f}([u]) = [(g|_{L_1})(u)]$, para todo $[u] \in A$, y, por tanto, \tilde{f} es la homografía inducida por $g|_{L_1}$. \square

Proposición 1.2.6. Sea \tilde{f} una aplicación proyectiva de $P(E)$ en $P(E')$ de centro $P(N)$, inducida por una aplicación lineal f . Si $P(L)$ y $P(L')$ son subespacios proyectivos de $P(E)$ y $P(E')$, entonces,

$$\tilde{f}(P(L) - P(N)) = P(f(L)) \text{ y } \tilde{f}^{-1}(P(L') - P(N)) = P(f^{-1}(L'))$$

Dem. La primera propiedad se puede deducir de las expresiones

$$\tilde{f}(P(L) - P(N)) = \{[f(u)] : u \in L - N\}$$

$$P(f(L)) = \{[u'] : u' \in f(L) - \{0\}\}$$

observando que para f se cumple la igualdad $f(L - N) = f(L) - \{0\}$.

El resto de la demostración se deja como ejercicio. \square

Definición 1.2.7. En la situación de la proposición anterior, llamamos subespacio imagen de $P(L)$ a $\tilde{f}(P(L) - P(N))$ y subespacio imagen inversa de $P(L')$ a $\tilde{f}^{-1}(P(L') - P(N))$.

Corolario 1.2.8. Si $P(E) = P(E')$ y \tilde{f} es una homografía, entonces un subespacio $P(L)$ es invariante por \tilde{f} si, y sólo si, L es invariante por f .

(Por definición, $P(L)$ es invariante por \tilde{f} cuando $\tilde{f}(P(L)) \subset P(L)$. Análogamente para f y L)

Dem. En efecto, $\tilde{f}(P(L)) = P(f(L))$, ya que $P(N) = \emptyset$.

Por tanto, basta tener en cuenta que las inclusiones $P(f(L)) \subset P(L)$ y $f(L) \subset L$ son equivalentes. \square

Proposición 1.2.9. Supongamos que las homografías \tilde{f} de $P(E)$ en $P(E')$ y \tilde{g} de $P(E')$ en $P(E'')$ están inducidas por isomorfismos f y g , respectivamente. Entonces:

- $\tilde{g} \circ \tilde{f}$ es una homografía de $P(E)$ en $P(E'')$, inducida por el isomorfismo $g \circ f$.

- \tilde{f}^{-1} es una homografía de $P(E')$ en $P(E)$, inducida por el isomorfismo f^{-1} .

Dem. Basta comprobar que, para todo $[u] \in P(E)$ y todo $[u'] \in P(E')$, se verifica

$$(\tilde{g} \circ \tilde{f})([u]) = [(g \circ f)(u)] \text{ y } \tilde{f}^{-1}([u']) = [f^{-1}(u')]$$

Ahora,

$$(\tilde{g} \circ \tilde{f})([u]) = \tilde{g}(\tilde{f}([u])) = \tilde{g}([f(u)]) = [g(f(u))] = [(g \circ f)(u)],$$

$$\tilde{f}([f^{-1}(u')]) = [f(f^{-1}(u'))] = [u']. \text{ Es decir, } [f^{-1}(u')] = \tilde{f}^{-1}([u']). \quad \square$$

Grupo proyectivo. En particular, para todo espacio proyectivo, existe un grupo de transformaciones, llamado grupo proyectivo, formado por las homografías del espacio en sí mismo, con la operación de composición de aplicaciones.

Desde el punto de vista clásico de Klein, el contenido de una geometría consiste en el estudio de los conceptos y propiedades de una cierta clase de espacios, que se conservan por las transformaciones de un grupo

de biyecciones específico asociado a dichos espacios. En particular, podemos considerar que el contenido propio de la geometría proyectiva es el estudio de las propiedades de los espacios proyectivos que se conservan por las transformaciones del grupo proyectivo. Dicho de otra forma, las propiedades de carácter proyectivo son aquellas que se conservan por las homografías.

1.3. Referencias y coordenadas

Como sucede en los espacios vectoriales y afines, los elementos (puntos) de un espacio proyectivo pueden representarse por medio de coordenadas asociadas a referencias características. Sin embargo, en estos espacios no es posible expresar un punto directamente en función de otros, y lo que se hace es expresar un representante del punto en función de los representantes de puntos de la referencia que forman una base apropiada. Por esto, la noción de referencia proyectiva debe permitir una relación natural con la noción vectorial de base.

Definición 1.3.1. Cuando S es un subconjunto de un espacio proyectivo y $P(L)$ es la variedad engendrada por S , decimos que S es un conjunto de generadores del subespacio $P(L)$.

Decimos que un subconjunto S de un espacio proyectivo es proyectivamente dependiente cuando algún punto α de S pertenece a la variedad $V_p(S - \{\alpha\})$. Decir que S es proyectivamente independiente tiene el significado obvio.

Proposición 1.3.2. Supongamos que $S \subset P(E)$ y cada $\alpha \in S$ tiene asignado un representante v_α . Sea $S' = \{v_\alpha : \alpha \in S\}$. Entonces:

S es un conjunto de generadores de $P(E)$ si y sólo si S' es un conjunto de generadores de E .

S es proyectivamente dependiente si y sólo si S' es linealmente dependiente.

Dem. Para todo $\alpha \in S$, es $\{\alpha\} = P(Kv_\alpha)$, ya que α está representado por v_α . Entonces,

$$V_p(S) = V_p(\bigcup_{\alpha \in S} \{\alpha\}) = P(\sum_{\alpha \in S} Kv_\alpha); \text{ es decir, } V_p(S) = P(V_l(S')).$$

En particular, $V_p(S) = P(E)$ equivale a $V_l(S') = E$, lo que demuestra el primer apartado.

Por otro lado, cambiando S por $S - \{\alpha\}$ arriba, tenemos la igualdad $V_p(S - \{\alpha\}) = P(V_l(S' - \{v_\alpha\}))$. Esto hace clara la equivalencia de las condiciones

- Algún α de S pertenece a $V_p(S - \{\alpha\})$ (Condición de dependencia para S)

- Algún v_α de S' pertenece a $V_l(S' - \{v_\alpha\})$ (Condición de dependencia para S') \square

Referencias proyectivas

Definición 1.3.3. Supongamos $\dim P(E) = n$, donde $n \geq 1$. Una referencia proyectiva de $P(E)$ es un conjunto ordenado $\mathcal{P} = \{\alpha_0, \dots, \alpha_n; \alpha_{n+1}\}$ con $n+2$ puntos, cuyos subconjuntos de $n+1$ puntos son proyectivamente independientes.

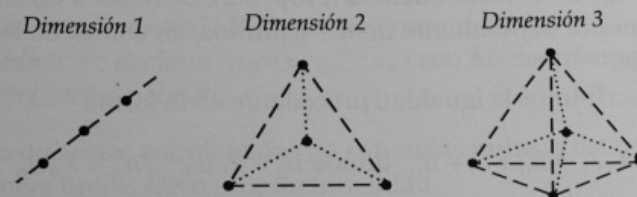


Figura 1.3: Referencias proyectivas

(El punto α_{n+1} , llamado punto unidad de la referencia, desempeña un papel distinto de los restantes, como veremos enseguida)

La relación entre referencias y bases se precisa en los lemas siguientes.

Lema 1.3.4. Podemos asociar una referencia de $P(E)$ a cualquier base de E . De modo explícito, una base $\mathcal{B} = \{u_0, \dots, u_n\}$ tiene asociada la referencia proyectiva

$$\mathcal{P} = \{[u_0], \dots, [u_n]; [u_0 + \dots + u_n]\}$$

Dem. En efecto, es inmediato comprobar que todos los subconjuntos formados por $n+1$ de los vectores $u_0, \dots, u_n, u_0 + \dots + u_n$ son linealmente independientes. Por tanto, por la proposición anterior, todos los subconjuntos formados por $n+1$ de los puntos de \mathcal{P} son proyectivamente independientes, como requiere la definición de referencia. \square

Lema 1.3.5. *Toda referencia \mathcal{P} de $P(E)$ está asociada a una base de E .*

Dem. Supongamos $\mathcal{P} = \{\alpha_0, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}\}$, donde $\alpha_i = [u_i]$, para todo $i = 0, \dots, n+1$.

Puesto que $\{\alpha_0, \dots, \alpha_n\}$ es proyectivamente independiente, tenemos que $\{u_0, \dots, u_n\}$ es linealmente independiente. Como $\dim E = n+1$, resulta que $\{u_0, \dots, u_n\}$ es una base de E . En consecuencia

$$u_{n+1} = \lambda_0 u_0 + \dots + \lambda_n u_n, \quad \lambda_0, \dots, \lambda_n \in K$$

Veamos que ningún λ_i es 0. En efecto, si alguno de ellos fuera 0, la relación anterior sería una relación de dependencia entre $n+1$ de los vectores u_{n+1}, u_0, \dots, u_n . Y, en consecuencia (Prop. 3.2), \mathcal{P} tendría un subconjunto proyectivamente dependiente de $n+1$ puntos, en contra de la definición de referencia.

Ahora escribimos la igualdad precedente en la forma

$$u_{n+1} = u'_0 + \dots + u'_n, \quad \text{donde } u'_0 = \lambda_0 u_0, \dots, u'_n = \lambda_n u_n$$

De este modo, $\mathcal{B}' = \{u'_0, \dots, u'_n\}$ es una base de E , y además

$$\alpha_0 = [u'_0], \dots, \alpha_n = [u'_n]; \alpha_{n+1} = [u'_0 + \dots + u'_n]$$

Por tanto, \mathcal{P} es la referencia proyectiva asociada a la base \mathcal{B}' . \square

Lema 1.3.6. *Dos bases \mathcal{B} y \mathcal{B}' tienen la misma referencia asociada si y sólo si son proporcionales.*

Dem. Primero supongamos que $\mathcal{B} = \{u_0, \dots, u_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{u'_0, \dots, u'_n\}$ tienen la misma referencia asociada. Esto significa que existen escalares $\lambda_0, \dots, \lambda_n, \lambda$, tales que

$$u'_0 = \lambda_0 u_0, \dots, u'_n = \lambda_n u_n, u'_0 + \dots + u'_n = \lambda(u_0 + \dots + u_n)$$

Entonces, $\lambda_0 u_0 + \dots + \lambda_n u_n = \lambda u_0 + \dots + \lambda u_n$ y, como \mathcal{B} es base, debe ser $\lambda_0 = \lambda, \dots, \lambda_n = \lambda$. En consecuencia, $u'_0 = \lambda u_0, \dots, u'_n = \lambda u_n$; es decir, \mathcal{B} y \mathcal{B}' son proporcionales.

El recíproco es claro. \square

Observación. Los lemas precedentes muestran que el concepto proyectivo de referencia corresponde al vectorial de base. Ambas nociones están asociadas, verificándose que la base asociada a una referencia es única salvo proporcionalidad. Las bases se obtienen a partir de las referencias siguiendo el proceso de la demostración de 3.5.

Ejemplo (Referencia proyectiva canónica). El espacio $P(K^{n+1})$ tiene una referencia proyectiva canónica \mathcal{P}_c , asociada a la base canónica \mathcal{C} de K^{n+1} . Es decir,

$$\mathcal{P}_c = \{(1:0:\dots:0), \dots, (0:0:\dots:1); (1:1:\dots:1)\}$$

Coordenadas homogéneas

Definición 1.3.7. *Sea $P(E)$ un espacio proyectivo con una referencia dada \mathcal{P} . Si $\alpha = [u]$ es un punto de $P(E)$ y u tiene coordenadas (x_0, \dots, x_n) en una base asociada a \mathcal{P} , decimos que $(x_0 : \dots : x_n)$ son las coordenadas homogéneas de α en la referencia \mathcal{P} .*

Es claro que estas coordenadas no son todas nulas, y están determinadas de manera única, salvo proporcionalidad.

Ejemplo. En $P(K^{n+1})$, el punto designado por $(x_0 : \dots : x_n)$ tiene coordenadas homogéneas $(x_0 : \dots : x_n)$, en la referencia proyectiva canónica.

Ejemplo. Si $\mathcal{P} = \{\alpha_0, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}\}$ es una referencia proyectiva de un espacio cualquiera $P(E)$, entonces las coordenadas de $\alpha_0, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ en dicha referencia son $(1:0:\dots:0), \dots, (0:0:\dots:1), (1:1:\dots:1)$, respectivamente.

(Ya que son las coordenadas de vectores $u_0, \dots, u_n, u_0 + \dots + u_n$, en una base asociada a \mathcal{P} , formada por los propios u_0, \dots, u_n)

Cambio de coordenadas. Recordamos que si \mathcal{B} y \mathcal{B}' son bases de un espacio vectorial, se tiene la expresión

$$x' = M(\mathcal{B}; \mathcal{B}')x$$

donde x y x' son las matrices (columnas) de las coordenadas de un vector en \mathcal{B} y \mathcal{B}' , y $M(\mathcal{B}; \mathcal{B}')$ es la matriz cuyas columnas sucesivas están formadas por las coordenadas de los vectores de la base \mathcal{B} respecto de la base \mathcal{B}' .

Ahora supongamos que \mathcal{B} y \mathcal{B}' son bases asociadas a referencias proyectivas \mathcal{P} y \mathcal{P}' . De esta forma, por la definición de las coordenadas homogéneas, resulta la expresión

$$\rho x' = M(\mathcal{P}; \mathcal{P}')x, \rho \neq 0$$

donde x y x' son las matrices de las coordenadas de un punto en \mathcal{P} y \mathcal{P}' , y $M(\mathcal{P}; \mathcal{P}')$ designa cualquier matriz proporcional a $M(\mathcal{B}; \mathcal{B}')$.

Determinación de una homografía

El teorema siguiente establece una propiedad fundamental de las aplicaciones proyectivas.

Teorema 1.3.8. Sean $P(E)$ y $P(E')$ espacios n -dimensionales sobre K , con referencias \mathcal{P} y \mathcal{P}' , respectivamente. Entonces, existe una aplicación proyectiva única \tilde{f} de $P(E)$ en $P(E')$ que transforma los puntos $\alpha_0, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ de \mathcal{P} en los puntos $\alpha'_0, \dots, \alpha'_n, \alpha'_{n+1}$ de \mathcal{P}' . Además, \tilde{f} es una homografía.

Dem. Existencia:

Sean $\mathcal{B} = \{u_0, \dots, u_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{u'_0, \dots, u'_n\}$ bases asociadas a \mathcal{P} y \mathcal{P}' .

Sabemos que existe un isomorfismo vectorial $f: E \rightarrow E'$ que transforma \mathcal{B} en \mathcal{B}' . Y, en consecuencia, f transforma $u_{n+1} = u_0 + \dots + u_n$ en $u'_{n+1} = u'_0 + \dots + u'_n$.

Por tanto, la homografía \tilde{f} inducida por f transforma $\alpha_i = [u_i]$ en $\alpha'_i = [u'_i]$, para todo $i = 0, \dots, n+1$.

Unicidad: (Mantenemos las notaciones anteriores)

Sea \tilde{g} cualquier aplicación proyectiva de $P(E)$ en $P(E')$ que transforma \mathcal{P} en \mathcal{P}' .

Supongamos que \tilde{g} está inducida por g . Entonces, $\tilde{g}(\alpha_i) = \alpha'_i = [u'_i]$ y $\tilde{g}(\alpha_i) = \tilde{g}([u_i]) = [g(u_i)]$, para todo i , lo que asegura que existen escalares $\lambda_0, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1} \in K$ tales que $g(u_i) = \lambda_i u'_i$.

Deducimos que $\lambda_0 = \lambda_{n+1}, \dots, \lambda_n = \lambda_{n+1}$, comparando las expresiones

$$-g(u_0) + \dots + g(u_n) = \lambda_0 u'_0 + \dots + \lambda_n u'_n$$

$$-g(u_0) + \dots + g(u_n) = g(u_{n+1}) = \lambda_{n+1} u'_{n+1} = \lambda_{n+1} u'_0 + \dots + \lambda_{n+1} u'_n$$

Entonces, para $i = 0, \dots, n$,

$$g(u_i) = \lambda_{n+1} u'_i = \lambda_{n+1} f(u_i)$$

Esto prueba que $g = \lambda_{n+1} f$. Por consiguiente, $\tilde{g} = \tilde{f}$. \square

Corolario 1.3.9. Si una homografía \tilde{f} de un espacio en sí mismo deja fijos los puntos de una referencia proyectiva, entonces \tilde{f} es la identidad.

1.4. Ecuaciones de subespacios y aplicaciones

Consideramos espacios $P(E)$ y $P(E')$, con referencias dadas \mathcal{P} y \mathcal{P}' .

Veremos que un subespacio proyectivo está representado por las mismas ecuaciones que el subespacio vectorial correspondiente. De modo análogo, una aplicación proyectiva está representada por la matriz de cualquiera de las aplicaciones lineales que la inducen.

Proposición 1.4.1. Sea $P(L)$ un subespacio proyectivo de $P(E)$, y supongamos que L está definido por las ecuaciones

$$(S) \begin{cases} a_{i0}x_0 + \dots + a_{in}x_n = 0 \\ i = 1, \dots, m \end{cases}$$

respecto de una base asociada a \mathcal{P} .

Entonces, $P(L)$ está formado por los puntos de $P(E)$ cuyas coordenadas en \mathcal{P} son soluciones no nulas de (S). Además, $\dim P(L) = \dim P(E) - \text{rg}((a_{ij}))$.

Dem. Sea $\alpha = [u]$ un punto de $P(E)$, de coordenadas $(x_0 : \dots : x_n)$.

Podemos suponer que (x_0, \dots, x_n) son las coordenadas de u en la base en que está expresado L . De esta forma,

$$\alpha \in P(L) \Leftrightarrow u \in L - \{0\} \Leftrightarrow (x_0, \dots, x_n) \text{ es solución no nula de (S)}$$

Además, $\dim P(L) = \dim L - 1 = \dim E - \text{rg}((a_{ij})) - 1 = \dim P(E) - \text{rg}((a_{ij}))$. \square

Proposición 1.4.2. Sea \tilde{f} una aplicación proyectiva de $P(E)$ en $P(E')$. Y supongamos $T = M(\tilde{f}; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$, donde f induce \tilde{f} y $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ están asociadas a $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$. Si un punto α y su imagen $\tilde{f}(\alpha)$ tienen coordenadas $(x_0 : \dots : x_n)$ y $(x'_0 : \dots : x'_n)$, entonces,

$$\rho x' = Tx, \quad \rho \in K - \{0\} \quad (1)$$

donde x designa la matriz transpuesta de $(x_0 \dots x_n)$; y análogamente x' .

Dem. Podemos suponer que α y $\tilde{f}(\alpha)$ están representados por vectores u y u' , de coordenadas (x_0, \dots, x_n) y (x'_0, \dots, x'_n) , respectivamente.

Entonces, como $\tilde{f}(\alpha) = [u']$, $\tilde{f}(\alpha) = \tilde{f}([u]) = [f(u)]$, existe un escalar $\rho \in K - \{0\}$ tal que $\rho u' = f(u)$. Es decir, en coordenadas, $\rho x' = Tx$. \square

Observación (Matriz de una aplicación proyectiva). Como todas las matrices $M(\tilde{f}; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ son proporcionales entre sí (puesto que f, \mathcal{B} y \mathcal{B}' son únicas salvo proporcionalidad), resulta coherente designar cualquiera de esas matrices por $M(\tilde{f}; \mathcal{P}, \mathcal{P}')$.

La expresión (1) indica cómo una aplicación proyectiva actúa sobre los puntos, y así determina la aplicación. Sin embargo, es útil expresar explícitamente cómo las homografías actúan sobre los hiperplanos.

Proposición 1.4.3. Con las hipótesis de la proposición anterior, supongamos que \tilde{f} es una homografía. Si un hiperplano M y su transformado $M' = \tilde{f}(M)$ tienen ecuaciones $\xi_0 x_0 + \dots + \xi_n x_n = 0$ y $\xi'_0 x'_0 + \dots + \xi'_n x'_n = 0$, entonces,

$$\rho(\xi'_0 \dots \xi'_n) = (\xi_0 \dots \xi_n) M(\tilde{f}; \mathcal{P}, \mathcal{P}')^{-1} \quad (2)$$

Dem. Sea α un punto arbitrario, de coordenadas $(x_0 : \dots : x_n)$. Sea x la matriz transpuesta de $(x_0 \dots x_n)$. Entonces, el conjunto M' se expresa en las formas

$$M' = \{\alpha : \tilde{f}^{-1}(\alpha) \in M\},$$

$$M' = \{\alpha : \text{Las coordenadas } T^{-1}x \text{ verifican la ecuación de } M\},$$

$$M' = \{\alpha : \xi^t T^{-1}x = 0\}.$$

Así, la ecuación de la línea anterior debe ser proporcional a la del enunciado, $\xi'^t x = 0$, lo que prueba la igualdad (2). \square

Puntos fijos e hiperplanos invariantes de una homografía. Sea \tilde{f} una homografía de un espacio $P(E)$, representada por la matriz A en una referencia dada \mathcal{P} .

Resulta claramente de la proposición 4.2 que un punto queda fijo por \tilde{f} si, y sólo si, para algún valor propio λ de la matriz A , sus coordenadas son solución no nula del sistema

$$(A - \lambda I)(x_0 \dots x_n)^t = 0$$

Análogamente, de 4.3 resulta que un hiperplano proyectivo es invariante por \tilde{f} si, y sólo si, para algún valor propio λ de la matriz A , los coeficientes de su ecuación son solución no nula del sistema

$$(\xi_0 \dots \xi_n)(A - \lambda I) = 0$$

Capítulo 2

Relación entre el espacio afín y el proyectivo

2.1. Espacio proyectivo asociado a un espacio afín

Las principales nociones de geometría afín que intervienen en este capítulo se presentan en el Apéndice A. Las notaciones correspondientes se mantienen para todo el texto.

En esta sección estudiaremos el proceso de asignar a todo espacio afín X un espacio proyectivo \hat{X} , siguiendo las ideas expuestas en la introducción. Para llevar a cabo este proceso es esencial disponer de un espacio vectorial apropiado que contenga a X como hiperplano afín no vectorial. Este espacio vectorial se introduce en el Apéndice A, con el nombre de completación vectorial de X , designado por \hat{X} .

Conviene destacar las propiedades siguientes de \hat{X} :

1. Existe una inmersión afín i de X en \hat{X} , que permite identificar X con el hiperplano afín $i(X)$ de \hat{X} . Además, la inmersión vectorial \bar{i} de \bar{X} en \hat{X} , asociada a i , permite identificar \bar{X} con el hiperplano vectorial $\bar{i}(\bar{X})$ de \hat{X} .

Usualmente efectuaremos las identificaciones $X \equiv i(X)$, $\bar{X} \equiv \bar{i}(\bar{X})$. Por tanto, en lugar de $i(X)$, $i(p)$, $\bar{i}(v)$, ..., escribiremos simplemente X , p , v , ..., omitiendo las inmersiones i e \bar{i} . Hacemos esto a continuación.

2. $\hat{X} = Kp \oplus \bar{X}$, para todo $p \in X$.

3. \hat{X} está engendrado vectorialmente por X .

Teorema 2.1.1. Consideramos un espacio afín X y el espacio proyectivo $\tilde{X} = P(\hat{X})$, asociado a la completación vectorial de X . Claramente, $\dim X = \dim \tilde{X}$. Además:

- La aplicación $\pi : \hat{X} - \{0\} \rightarrow \tilde{X}$ es inyectiva sobre X , lo que permite identificar X con el subconjunto $\pi(X)$ de \tilde{X} .
- Con la identificación citada, el subconjunto complementario de $X \equiv \pi(X)$ en \tilde{X} es el hiperplano proyectivo $P(\tilde{X})$.

Dem. Supongamos $p, p' \in X$ con $\pi(p) = \pi(p')$. Como esta igualdad expresa que $Kp = Kp'$, y las rectas Kp y Kp' cortan a X únicamente en p y p' , respectivamente (por el teorema de incidencia para variedades afines), resulta que $p = p'$. Por consiguiente, π es inyectiva sobre X .

Por otro lado, $\pi(X)$ y $P(\tilde{X})$ son subconjuntos disjuntos de \tilde{X} , debido a que X y \tilde{X} son disjuntos en \hat{X} . Tenemos, por tanto, $\pi(X) \subset \tilde{X} - P(\tilde{X})$.

Para establecer la inclusión inversa, sea $\alpha \in \tilde{X} - P(\tilde{X})$, donde $\alpha = [w]$.

Como $\hat{X} = Kp_0 \oplus \tilde{X}$ y $w \notin \tilde{X}$, debe ser $w = kp_0 + u$, con $k \neq 0$, $u \in \tilde{X}$. Es decir, $w = k(p_0 + \frac{1}{k}u) = kp$, $p \in X$. Por tanto, $\alpha = [w]$ es el punto $\pi(p)$, perteneciente a $\pi(X)$. □

Esto completa la demostración.

Definición 2.1.2. Con los datos del teorema anterior, decimos que \tilde{X} es la completación proyectiva del espacio afín X (o el espacio proyectivo asociado al espacio afín X). Los puntos del hiperplano proyectivo $X_\infty = P(\tilde{X})$, complementario de X en \tilde{X} , reciben la denominación de puntos del infinito del espacio afín X .

Por ejemplo, si X es una recta afín, entonces X_∞ consta solamente de un punto; si X es un plano afín, entonces X_∞ es una recta proyectiva; etcétera.

Es oportuno destacar que los resultados de esta sección se adaptan rigurosamente a las ideas expuestas en la introducción. En efecto:

\tilde{X} está formado por los elementos de $\pi(X)$ —es decir, las rectas vectoriales de \hat{X} que cortan a X — y los puntos del infinito. La identificación $X \equiv$

$\pi(X)$ formaliza que los puntos de X están representados adecuadamente por los rayos que los proyectan desde O . Hemos visto que una recta afín se completa con un punto único; y finalmente probaremos en la proposición 1.4 que dos rectas afines se completan con el mismo punto si, y sólo si, son paralelas.

Caso particular. El espacio afín canónico K^n tiene como completación vectorial K^{n+1} . Además, las inmersiones i e \bar{i} son las aplicaciones

$$i : K^n \rightarrow K^{n+1}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto (1, x_1, \dots, x_n)$$

$$\bar{i} : K^n \rightarrow K^{n+1}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto (0, x_1, \dots, x_n)$$

Por tanto, un punto (x_1, \dots, x_n) de K^n se convierte en la completación proyectiva $P(K^{n+1})$ en el punto $(1 : x_1 : \dots : x_n)$, mientras que un vector no nulo (x_1, \dots, x_n) de K^n representa el punto del infinito $(0 : x_1 : \dots : x_n)$.

— **Proposición 2.1.3** (Completación proyectiva de un subespacio afín). Sea A un subespacio afín de un espacio afín X . Entonces, A tiene como completación proyectiva el subespacio $\tilde{A} = V_p(A)$ de \tilde{X} . Además, $A_\infty = \tilde{A} \cap X_\infty$.

Dem. Teniendo en cuenta que \hat{A} es un subespacio vectorial de \hat{X} y \hat{A} está engendrado vectorialmente por A , es $\hat{A} = V_l(A) = \sum_{p \in A} Kp$, considerando la suma como subespacio vectorial de \hat{X} . Entonces,

$$\tilde{A} = P(\hat{A}) = P\left(\sum_{p \in A} Kp\right) = V_p\left(\bigcup_{p \in A} \{p\}\right) = V_p(A)$$

Además, es fácil comprobar que $\tilde{A} = \hat{A} \cap \tilde{X}$. En consecuencia,

$$A_\infty = P(\tilde{A}) = P(\hat{A}) \cap P(\tilde{X}) = \tilde{A} \cap X_\infty$$

Esto completa la demostración. □

La noción afín de paralelismo (inexistente en geometría proyectiva) puede ser caracterizada en términos proyectivos.

— **Proposición 2.1.4.** Sean A y B subespacios afines de un espacio afín X , tales que $\dim A \leq \dim B$. Entonces, A y B son paralelos ($A \parallel B$) si y sólo si $A_\infty \subset B_\infty$. (En particular, cuando $\dim A = \dim B$, entonces $A \parallel B$ si y sólo si $A_\infty = B_\infty$)

Dem. En efecto, la condición $A \parallel B$ significa que $\bar{A} \subset \bar{B}$. Por tanto, basta sustituir esta inclusión por la inclusión equivalente $A_\infty = P(\bar{A}) \subset P(\bar{B}) = B_\infty$. \square

En Geometría representamos una recta proyectiva como una recta afín, omitiendo un punto de la primera. El carácter peculiar de la recta proyectiva real se pone de manifiesto con el resultado que sigue.

Interpretación de la recta proyectiva real como una circunferencia. En \mathbb{R}^2 sea S la circunferencia de centro $(1, 0)$ y radio 1. (Es decir, $S = \{(x_0, x_1) : (x_0 - 1)^2 + x_1^2 = 1\}$). Se tiene la aplicación $f : \mathbb{R} \rightarrow S - \{(0, 0)\}$, llamada proyección estereográfica, tal que $f(x)$ es el punto de S alineado con $(0, 0)$ y $(1, x)$.

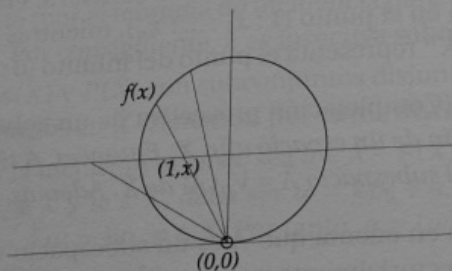


Figura 2.1: Proyección estereográfica

Así, f está definida por la expresión $f(x) = \frac{2}{1+x^2}(1, x)$, y es una aplicación biyectiva. Además, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = (0, 0)$. Por tanto, resulta una biyección natural F entre la recta proyectiva $P(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R} \cup \mathbb{R}_\infty$ y la circunferencia S tal que $F(x) = f(x)$, si $x \in \mathbb{R}$ y $F(x) = (0, 0)$, si x es el punto de \mathbb{R}_∞ .

2.2. Completación proyectiva de una aplicación afín

Para un espacio afín X , los espacios \hat{X} y $\tilde{X} = P(\hat{X})$ conservan el significado de la sección anterior. Estudiaremos la relación entre las aplicaciones afines de X en X' y las aplicaciones proyectivas de \tilde{X} en \tilde{X}' .

• **Proposición 2.2.1.** Para toda aplicación afín $f : X \rightarrow X'$, existe una aplicación proyectiva \tilde{f} de \tilde{X} en \tilde{X}' tal que \tilde{f} es extensión de f y el subespacio imagen de X_∞ está contenido en X'_∞ .

Decimos que \tilde{f} es una completación proyectiva de la aplicación afín f . (Posteriormente veremos que f tiene una completación proyectiva única)

Dem. Elegimos un punto $p_0 \in X$ y definimos una aplicación \hat{f} de $\hat{X} = Kp_0 \oplus \tilde{X}$ en $\hat{X}' = Kf(p_0) \oplus \tilde{X}'$, de modo que

$$\hat{f}(kp_0 + u) = kf(p_0) + \tilde{f}(u), \quad k \in K, u \in \tilde{X}$$

Así, \hat{f} está bien definida y es una aplicación lineal no nula.

Designamos por \tilde{f} la aplicación proyectiva inducida por \hat{f} . Veremos que \tilde{f} verifica las dos condiciones del enunciado.

- Para todo $p \in X$,

$$\hat{f}(p) = \hat{f}(p_0 + p_0 p) = f(p_0) + \tilde{f}(p_0 p) = f(p) \quad (1)$$

donde $f(p) \in X'$. En particular, $\hat{f}(p) \neq 0$.

Por tanto, \tilde{f} está definida en $p \equiv [p]$ y

$$\tilde{f}(p) \equiv \tilde{f}([p]) = [\hat{f}(p)] = [f(p)] \equiv f(p)$$

Es decir, \tilde{f} es extensión de f .

- Para todo $[u]$ perteneciente a X'_∞ ,

$$\hat{f}(u) = \hat{f}(0p_0 + u) = 0f(p_0) + \tilde{f}(u) = \tilde{f}(u) \quad (2)$$

donde $\tilde{f}(u) \in \tilde{X}'$

Por tanto, si $[u]$ está en el dominio de \tilde{f} , entonces $\tilde{f}([u])$ es el punto $[\tilde{f}(u)]$, perteneciente a X'_∞ . \square

Esto completa la demostración.

Observaciones. (a) Por (1) y (2), \tilde{f} es extensión de f y \tilde{f} . Además, como \hat{X} está engendrado vectorialmente por X , los valores de \hat{f} en los elementos de X determinan esta aplicación. Así, \tilde{f} está determinada de manera única por la aplicación afín f .

(b) Si f es un isomorfismo afín, entonces \tilde{f} es una homografía, ya que \hat{f} es un isomorfismo vectorial. (Pues si g es inversa de f , entonces \hat{g} es inversa de \hat{f} , como se comprueba fácilmente)

La recíproca de la proposición anterior también es válida.

— **Proposición 2.2.2.** Sea \tilde{g} una aplicación proyectiva de \tilde{X} en \tilde{X}' tal que $\tilde{g}(X)$ está contenido en X' y el subespacio imagen de X_∞ está contenido en X'_∞ . Entonces:

- (a) \tilde{g} está inducida por una aplicación \hat{g} , que coincide con \tilde{g} sobre X .
- (b) $\tilde{g}|X : X \rightarrow X'$ es una aplicación afín.

Dem. (a) Supongamos que \tilde{g} está inducida por $\hat{g} : \hat{X} \rightarrow \hat{X}'$. Sean p_0 un punto elegido en X y $p \in X$ un punto arbitrario.

Como $\tilde{g}(p_0) = [\hat{g}(p_0)]$ y $\tilde{g}(p_0) \in X'$, es $\tilde{g}(p_0) = k\hat{g}(p_0)$, para algún escalar k . Cambiando entonces \hat{g} por $k\hat{g}$ (que también induce \tilde{g}), podemos suponer $\tilde{g}(p_0) = \hat{g}(p_0)$. En particular, $\hat{g}(p_0) \in X'$.

Por otro lado, como el subespacio imagen de X_∞ mediante \tilde{g} es $P(\hat{g}(\tilde{X}))$, la hipótesis sobre este subespacio asegura que $\hat{g}(p_0 p) \in \tilde{X}'$.

Así, como

$$\hat{g}(p) = \hat{g}(p_0 + p_0 p) = \hat{g}(p_0) + \hat{g}(p_0 p)$$

con $\hat{g}(p_0) \in X'$ y $\hat{g}(p_0 p) \in \tilde{X}'$, se tiene $\hat{g}(p) \in X'$. Y, en consecuencia, $\tilde{g}(p) = [\hat{g}(p)] \equiv \hat{g}(p)$, como se trataba de probar.

(b) Utilizando el resultado de (a), $\tilde{g}|X : X \rightarrow X'$ coincide con $\hat{g}|X : X \rightarrow X'$. Como \hat{g} es una aplicación lineal, \hat{g} y $\hat{g}|X$ son aplicaciones afines, y esto completa la demostración. \square

Proposición 2.2.3. La completación proyectiva de una aplicación afín es única.

Dem. Supongamos que \tilde{f} y \tilde{g} son completaciones proyectivas de la misma aplicación f . Por el apartado (a) de la proposición anterior, \tilde{f} y \tilde{g} están inducidas por aplicaciones lineales \hat{f} y \hat{g} tales que $\hat{f}|X = \tilde{f}|X$ y $\hat{g}|X = \tilde{g}|X$, considerando estas restricciones como aplicaciones de X en X' . Es decir, $\hat{f}|X = f$ y $\hat{g}|X = f$.

Como X es un conjunto de generadores de \hat{X} , esto implica que $\hat{f} = \hat{g}$. Por tanto, $\tilde{f} = \tilde{g}$. \square

Ahora consideramos el grupo afín $GA(X)$ —formado por los isomorfismos afines del espacio X en sí mismo— y el grupo proyectivo de \tilde{X} , definido

a continuación de 1.2.9, que designamos por $GP(\tilde{X})$. La operación correspondiente a ambos grupos es la composición de aplicaciones.

Veremos que $GA(X)$ puede ser considerado como un subgrupo de $GP(\tilde{X})$.

Teorema 2.2.4. Asignando a cada isomorfismo afín $f : X \rightarrow X$ su completación proyectiva \tilde{f} , se obtiene una biyección entre el grupo afín de X y el subgrupo de las homografías de \tilde{X} que dejan invariante el hiperplano X_∞ .

Dem. Por la observación que sigue a la proposición 2.1, sabemos que, si f es un isomorfismo afín, entonces \tilde{f} es una homografía. Por tanto, tenemos una aplicación bien definida

$$GA(X) \rightarrow GP(\tilde{X}), \quad f \mapsto \tilde{f}$$

que claramente es inyectiva.

Además, toda homografía correspondiente a un isomorfismo afín de X deja invariante el hiperplano X_∞ . Supongamos ahora, para la propiedad recíproca, que una homografía $h : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ deja invariante X_∞ .

Como h es biyectiva, se cumple que $h(X_\infty) = X_\infty$ y $h(\tilde{X} - X_\infty) = \tilde{X} - X_\infty$. Entonces, por la proposición 2.2, la biyección $h|X : X \rightarrow X$ es un isomorfismo afín, y, por la unicidad de la completación proyectiva, h es la completación proyectiva de dicho isomorfismo.

Esto termina la demostración. \square

Observación. La biyección del teorema es un isomorfismo de grupos entre $GA(X)$ y el subgrupo mencionado de $GP(\tilde{X})$. Por tanto, si denotamos este isomorfismo por $GA(X) \cong G'(X)$ y utilizamos la identificación correspondiente $GA(X) \equiv G'(X)$, podemos considerar el grupo afín como un subgrupo del grupo proyectivo.

Según la relación establecida por Klein entre geometrías y grupos de transformaciones, las nociones y propiedades afines y proyectivas son, respectivamente, aquellas que se conservan por las transformaciones de los grupos afín y proyectivo. Por la observación última, las nociones afines quedan determinadas por un subgrupo particular del grupo proyectivo, lo que convierte la geometría afín en una subgeometría de la proyectiva.

También son subgeometrías de la geometría proyectiva las otras geometrías clásicas, como la euclídea y la hiperbólica (no euclídea) de Lobachevski y Bolyai.

Este carácter general es uno de los rasgos más relevantes de la geometría proyectiva.

Teorema 2.2.5. Sea $HT(X)$ el subgrupo del grupo afín de X formado por las homotecias y las traslaciones. Entonces, restringiendo la biyección del teorema anterior, se obtiene una biyección entre $HT(X)$ y el subgrupo de las homografías de \tilde{X} que dejan invariante cada punto de X_∞ .

Dem. Sean $f \in GA(X)$ y \tilde{f} su completación proyectiva.

Es suficiente demostrar que $f \in HT(X)$ si y sólo si \tilde{f} deja fijos todos los puntos de X_∞ .

Ahora, es conocido de geometría afín que

$$HT(X) = \{g \in GA(X) : \tilde{g} \text{ es proporcional a } id_{\tilde{X}}\}$$

Recordamos también de la demostración de 2.1 que

$$(\tilde{f}|X_\infty)([u]) = [\hat{f}(u)] = [\tilde{f}(u)]$$

lo que indica que \tilde{f} induce la homografía $\tilde{f}|X_\infty : X_\infty \rightarrow X_\infty$.

Teniendo en cuenta estas observaciones y la proposición 1.2.2, resultan las equivalencias

$f \in HT(X) \Leftrightarrow \tilde{f}$ es proporcional a $id_{\tilde{X}} \Leftrightarrow$ La homografía $\tilde{f}|X_\infty$, inducida por \tilde{f} , es la identidad.

Y esto es justamente lo que se trataba de probar. \square

2.3. Relación entre las representaciones analíticas

Recordamos que una referencia cartesiana de un espacio afín X es un conjunto ordenado $\mathcal{E} = \{p_0; u_1, \dots, u_n\}$, donde p_0 es un punto perteneciente a X y $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ es una base de \tilde{X} .

Además, como $\hat{X} = Kp_0 \oplus \tilde{X}$, podemos interpretar \mathcal{E} como una base de la completación vectorial \hat{X} .

Definición 2.3.1. Sea \mathcal{E} una referencia cartesiana de un espacio afín X , donde $\mathcal{E} = \{p_0; u_1, \dots, u_n\}$. Sea $\tilde{\mathcal{E}}$ la referencia proyectiva asociada a la base \mathcal{E} de \hat{X} . Es decir,

$$\tilde{\mathcal{E}} = \{[p_0], [u_1], \dots, [u_n]; [p_0 + u_1 + \dots + u_n]\}$$

Decimos entonces que $\tilde{\mathcal{E}}$ es la referencia proyectiva asociada a la referencia cartesiana \mathcal{E} .

Ejemplo. Sea \mathcal{E}_c la referencia cartesiana canónica de K^n . Entonces, $\tilde{\mathcal{E}}_c$ es la referencia canónica de $P(K^{n+1})$.

Dem. Para simplificar la notación, supongamos $n = 2$. Entonces,

$$\mathcal{E}_c = \{(0,0); (1,0), (0,1)\}$$

Como en el resultado siguiente a la definición 1.2, \mathcal{E}_c se convierte en la base de K^3 formada por

$$i(0,0) = (1,0,0), \tilde{i}(1,0) = (0,1,0), \tilde{i}(0,1) = (0,0,1)$$

La base que resulta es la base canónica de K^3 . Por tanto, $\tilde{\mathcal{E}}_c$ es la referencia canónica de $P(K^3)$. \square

Proposición 2.3.2. Supongamos que un espacio afín X y su completación proyectiva \tilde{X} tienen asignadas referencias asociadas \mathcal{E} y $\tilde{\mathcal{E}}$. Entonces:

- Un punto de \tilde{X} de coordenadas $(x_0 : \dots : x_n)$ está en X_∞ si y sólo si $x_0 = 0$.
- Un punto dado de X está representado por las coordenadas (x_1, \dots, x_n) y $(1 : x_1 : \dots : x_n)$. O bien, escritas en orden inverso, $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ y $(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0})$.

Dem. En efecto, sea $\mathcal{E} = \{p_0; u_1, \dots, u_n\}$.

Por las definiciones, el punto α de coordenadas $(x_0 : \dots : x_n)$ está representado por el vector $w = x_0 p_0 + x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$, donde $x_1 u_1 + \dots + x_n u_n \in \tilde{X}$.

Como $X_\infty = P(\tilde{X})$, la condición $\alpha \in X_\infty$ equivale a $w \in \tilde{X}$ y, por tanto, a $x_0 p_0 \in \tilde{X}$. Pero esto es equivalente a $x_0 = 0$.

Supongamos ahora que α , con las coordenadas anteriores, es un elemento p de X . En este caso, $x_0 \neq 0$. Entonces, p está representado por $\frac{1}{x_0}(x_0 p_0 + x_1 u_1 + \dots + x_n u_n)$; es decir, $p = p_0 + \frac{x_1}{x_0} u_1 + \dots + \frac{x_n}{x_0} u_n$.

Por tanto, $(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0})$ son las coordenadas de p en \mathcal{E} . \square

Proposición 2.3.3. Sea A un subespacio afín de X , definido por las ecuaciones

$$(1) \begin{cases} a_{i0} + a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = 0 \\ i = 1, \dots, m \end{cases}$$

en una referencia dada \mathcal{E} .

Entonces, el subespacio \tilde{A} de \tilde{X} está definido por las ecuaciones

$$(2) \begin{cases} a_{i0}x_0 + a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = 0 \\ i = 1, \dots, m \end{cases}$$

en la referencia $\tilde{\mathcal{E}}$.

Dem. El sistema (2) representa un subespacio proyectivo M de \tilde{X} .

Claramente, si (x_1, \dots, x_n) es solución de (1), entonces $(1 : x_1 : \dots : x_n)$ es solución de (2); y, como esas coordenadas representan el mismo punto, esto indica que $A \subset M$. Además, dado que $A \subset M$ y $\tilde{A} = V_p(A)$, se cumple que $\tilde{A} \subset M$. Por último, como $\dim \tilde{A} = \dim A = n - \text{rg}((a_{ij})) = \dim M$, tenemos $M = \tilde{A}$. \square

De esta forma, las ecuaciones de la completación proyectiva de un subespacio afín se obtienen homogeneizando las de dicho subespacio. Para terminar, probaremos un resultado análogo para aplicaciones.

Proposición 2.3.4. Sea $f : X \rightarrow X'$ una aplicación afín, definida por las ecuaciones

$$(1) \begin{cases} x'_i = a_{i0} + a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \\ i = 1, \dots, m \end{cases}$$

en las referencias \mathcal{E} y \mathcal{E}' .

Entonces, la completación proyectiva de f está definida por las ecuaciones

$$(2) \begin{cases} \rho x'_0 = x_0 \\ \rho x'_i = a_{i0}x_0 + a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \\ i = 1, \dots, m \end{cases}$$

en las referencias $\tilde{\mathcal{E}}$ y $\tilde{\mathcal{E}}'$

Dem. Las expresiones (2) representan una aplicación proyectiva F de \tilde{X} en \tilde{X}' .

Claramente, si las coordenadas cartesianas de dos puntos cumplen las condiciones (1), entonces sus coordenadas homogéneas cumplen las condiciones (2). Esto indica que f y F actúan de igual forma sobre los puntos de X , es decir, F es extensión de f .

Además, F transforma puntos de $X_\infty : x_0 = 0$ en puntos de $X'_\infty : x'_0 = 0$. Por tanto, F es la completación proyectiva de f . \square

Observación. Es conocido que la matriz de f en las referencias consideradas es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m0} & a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

La proposición establece que toda matriz de \tilde{f} es proporcional a la de f .

2.4. Espacios con una completación prefijada

Hemos visto que todo espacio afín se incluye en un espacio proyectivo, como subconjunto complementario de un hiperplano proyectivo. Un resultado esencial asegura que también resulta satisfactorio seguir el proceso inverso. Es decir, suprimiendo a un espacio proyectivo un hiperplano proyectivo, se obtiene un espacio afín. Además, el espacio de partida se convierte en la completación proyectiva de ese espacio afín.

Teorema 2.4.1. Si $P(E)$ es un espacio proyectivo y $P(L)$ es un hiperplano proyectivo de $P(E)$, entonces el conjunto $X = P(E) - P(L)$ admite una estructura natural de espacio afín. Además, el espacio \tilde{X} y su hiperplano X_∞ pueden ser identificados con $P(E)$ y $P(L)$, respectivamente. — Claramente, $\dim X = \dim P(E)$.

(La demostración de este teorema puede verse en el libro de J. Frenkel)

Motivación. Los elementos de X son las rectas vectoriales de E no contenidas en L . Ahora, todo $u_0 \in E - L$ determina un espacio afín $T = u_0 + L$ y tenemos una aplicación biyectiva $T \rightarrow X$, $u \mapsto [u]$.

Esto sugiere que X puede ser también un espacio afín, isomorfo a T .

Además, $\tilde{T} = L$, $\tilde{T} = E$, lo que sugiere las identificaciones $X_\infty \equiv T_\infty = P(L)$, $\tilde{X} \equiv \tilde{T} = P(E)$.

La satisfactoria relación existente entre espacios afines y proyectivos hace que ciertos resultados de geometría afín puedan ser interpretados en geometría proyectiva, y recíprocamente. Ilustraremos esto con las versiones afines y proyectivas de dos teoremas clásicos de la geometría del plano.

Teorema de Pappus. Sean r y r' dos rectas diferentes de un plano proyectivo P y $a, b, c \in r$, $a', b', c' \in r'$ seis puntos distintos. Entonces, los puntos a^*, b^*, c^* , que determinan las intersecciones $V_p(b, c') \cap V_p(b', c)$, $V_p(a, c') \cap V_p(a', c)$, $V_p(a, b') \cap V_p(a', b)$, respectivamente, están alineados.

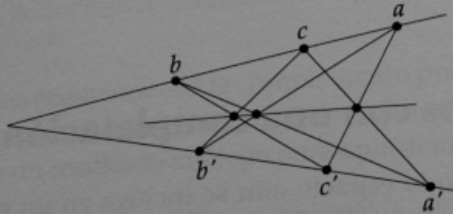


Figura 2.2: Teorema de Pappus

Dem. Sea o el punto de intersección de r y r' . Si alguno de los puntos del enunciado coincide con o , el resultado es trivial. Además de excluir estos casos triviales, podemos suponer que a^*, b^*, c^* no están alineados con el punto o . Por ejemplo, supongamos $o \notin V_p(a^*, b^*)$.

Por el teorema anterior, tenemos el plano afín $X = P - V_p(a^*, b^*)$, con \tilde{X} y X_∞ identificados a P y $V_p(a^*, b^*)$, respectivamente.

De esta forma, las rectas afines $V(b, c')$ y $V(b', c)$ de X son paralelas; y lo mismo sucede para las rectas $V(a, c')$ y $V(a', c)$.

Entonces, por la versión afín del teorema, las rectas $V(a, b')$ y $V(a', b)$ son también paralelas. (Después probaremos esta propiedad afín)

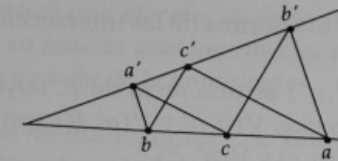


Figura 2.3: Puntos y rectas en X

Por tanto, expresando esta condición en P , el punto de intersección de $V_p(a, b')$ y $V_p(a', b)$ debe estar en la recta X_∞ . Es decir, $c^* \in V_p(a^*, b^*)$, como se trataba de probar.

Demostración de la propiedad afín. Sean h_1 y h_2 las homotecias de X de centro o tales que $h_1(a) = c$ y $h_2(c) = b$.

Como una homotecia transforma cualquier recta en una recta paralela, (dejando invariantes las que contienen al centro), resulta que $h_1(c') = a'$ y $h_2(b') = c'$. En consecuencia, la homotecia $h_2 \circ h_1 = h_1 \circ h_2$ transforma a en b y b' en a' , por lo que $V(a, b')$ es paralela a $V(a', b)$. \square

Teorema de Desargues. En un plano proyectivo P consideramos dos triángulos sin vértices ni lados comunes. Designamos sus vértices por a, b, c y a', b', c' y los respectivos lados opuestos por r, s, t y r', s', t' .

Entonces, si las rectas $V_p(a, a')$, $V_p(b, b')$, $V_p(c, c')$ son concurrentes, los puntos $r \cap r'$, $s \cap s'$, $t \cap t'$ están alineados. Y recíprocamente.

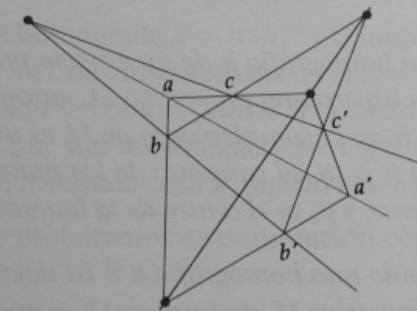


Figura 2.4: Teorema de Desargues

Dem. Sean a^*, b^*, c^* los puntos de las intersecciones $r \cap r', s \cap s', t \cap t'$, respectivamente.

El subespacio $V_p(b^*, c^*)$ es una recta de P , cuyo complemento es un plano afín X . En X las rectas $V(a, b)$ y $V(a', b')$ son paralelas, y lo mismo sucede para las rectas $V(a, c)$ y $V(a', c')$.

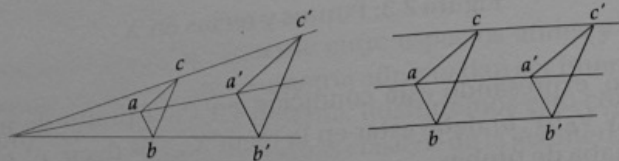


Figura 2.5: Puntos y rectas en X

Entonces, por la versión afín del teorema, las rectas $V(b, c)$ y $V(b', c')$ son también paralelas. (Esto se cumple porque existe una homotecia o una traslación de X que transforma $V(b, c)$ en $V(b', c')$. Dejamos los detalles como ejercicio).

Expresando la condición anterior en P tenemos que las rectas $V_p(b, c)$ y $V_p(b', c')$ se cortan en un punto de X_∞ , lo que proporciona el resultado deseado, $a^* \in V_p(b^*, c^*)$.

El recíproco resulta inmediatamente por dualidad, como veremos en el capítulo siguiente. \square

En el contexto de esta sección, podemos adaptar el enunciado de 2.5, como sigue.

Teorema 2.4.2. Si una homografía h de un espacio proyectivo P deja fijos todos los puntos de un hiperplano proyectivo M , entonces la aplicación $f: X \rightarrow X$, inducida por h en el complemento de M es una traslación o una homotecia. Además, si $h \neq id$, el conjunto de los puntos fijos de h es M ó $M \cup \{p_0\}$, respectivamente, y p_0 es el centro de la homotecia.

Definición 2.4.3. Cuando una homografía $h \neq id$ deja fijos todos los puntos de un hiperplano proyectivo M , decimos que h es una homología de base M . Una homología especial o elación es aquella cuya base incluye a todos los puntos fijos.

Si una homología no es una elación, es decir, si la aplicación inducida en el complemento de su base es una homotecia, decimos que la razón de ésta es la característica o razón de la homología.

Las homologías son las homografías más simples de un espacio, si exceptuamos la aplicación identidad. Por eso es relevante el resultado que sigue.

Teorema 2.4.4. Toda homografía de un espacio proyectivo P de dimensión $n \geq 2$ se obtiene como composición de homologías. Además, el número de homologías requeridas es como máximo n .

Dem. Sea h una homografía de P . Como el resultado es obvio si $h = id$, descartaremos este caso.

Consideramos los subespacios M tales que $h|M = id|M$, y designamos por $m(h)$ el máximo de las dimensiones de dichos subespacios.

Probaremos, por inducción sobre $n - m(h)$, que h puede ser expresada como composición de r homologías h_1, \dots, h_r , donde $r \leq n - m(h)$.

Cuando $m(h) = n - 1$, la homografía h es una homología, luego el resultado se cumple para $n - m(h) = 1$.

Supongamos ahora que el resultado se cumple para las homografías h' tales que $n - m(h') < r$, y sea h una homografía con $n - m(h) = r$.

Consideramos un subespacio $M = P(L)$ de dimensión $m(h)$ tal que $h|M = id|M$. Además, elegimos un punto a distinto de su transformado $h(a) = a_1$. Entonces, como veremos en el lema siguiente, existe una homología h_1 que coincide con h sobre $V_p(a, M)$.

De esta forma, la homografía $h' = h \circ h_1^{-1}$ y la identidad coinciden sobre el subespacio $V_p(a_1, M)$, de dimensión mayor que $m(h)$. Por la hipótesis de inducción, el resultado se cumple para h' . Por tanto, $h = h' \circ h_1 = (h_r \circ \dots \circ h_2) \circ h_1$, donde h_1, \dots, h_r son homologías y $r - 1 \leq n - m(h')$.

Esto establece el resultado para h , puesto que $r \leq n - m(h)$. \square

El requisito que probaremos a continuación completará la demostración del teorema.

Lema 2.4.5. Como en la demostración precedente, consideramos una homografía $h \neq id$ de un espacio $P(E)$ y un subespacio $M = P(L)$ tal que $h|M =$

Capítulo 3

Dualidad y razón doble

3.1. Dualidad proyectiva

Daremos primero una idea (imprecisa) del significado de esta noción, utilizando un ejemplo.

Para el ejemplo elegido, sean \mathbf{P} y \mathbf{P}^* las propiedades siguientes.

- \mathbf{P} : En un plano proyectivo, existe una recta única que contiene a dos puntos distintos.
- \mathbf{P}^* : En un plano proyectivo, existe un punto único que está contenido en dos rectas distintas.

En los enunciados de estas propiedades aparecen intercambiados los conceptos de punto y recta en el plano. Además, la relación de contenido en \mathbf{P}^* es la inversa de la que interviene en \mathbf{P} . En términos imprecisos, el principio de dualidad establece que dos propiedades cuyos enunciados tienen una relación del tipo ejemplificado por \mathbf{P} y \mathbf{P}^* son equiparables en geometría proyectiva. Por tanto, la validez de una de ellas permite asegurar la validez de la otra.

Esta dualidad es una característica sobresaliente de la geometría proyectiva, que no comparte con la geometría afín. (La propiedad análoga a \mathbf{P} es válida en el espacio afín, pero no lo es la análoga a \mathbf{P}^*)

Veremos que dicha dualidad geométrica se justifica fácilmente a partir de la dualidad vectorial. Los requisitos necesarios se resumen a continuación.

Requisitos de dualidad vectorial. Sean E y E^* un espacio vectorial y su dual.

- Si V es un subconjunto de E , el anulador de V es el subespacio vectorial

$$V^0 = \{\alpha \in E^* : \alpha(v) = 0, \text{ para todo } v \in V\}$$

del espacio E^* .

- Si W es un subconjunto de E^* , el anulador de W es el subespacio vectorial

$${}^0W = \{v \in E : \alpha(v) = 0, \text{ para todo } \alpha \in W\}$$

del espacio E .

Los dos tipos de anuladores tienen las mismas propiedades. Las dos primeras que figuran a continuación, se enuncian únicamente para los anuladores de subconjuntos de E :

D1. Si $V_1 \supset V_2$ en E , entonces, $V_1^0 \subset V_2^0$. Además, $S^0 = V_l(S)^0$, para todo subconjunto S de E .

D2. Si L es un subespacio vectorial de E , entonces $\dim L^0 = \dim E - \dim L$.

D3. Si L y N son subespacios vectoriales de E y E^* , respectivamente, entonces

$${}^0(L^0) = L \text{ y } ({}^0N)^0 = N$$

Las propiedades D2 y D3 muestran que los subespacios de dimensión k de E , E^* determinan los de codimensión k de E^* , E , respectivamente.

Demostraciones de D1, D2, D3:

El apartado D1 y las inclusiones $L \subset {}^0(L^0)$ y $N \subset ({}^0N)^0$ resultan inmediatamente de las definiciones.

Para D2, consideramos en E y E^* bases duales $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ y $\mathcal{B}^* = \{u_1^*, \dots, u_n^*\}$, donde \mathcal{B} resulta de ampliar cualquier base $\{u_1, \dots, u_l\}$ del subespacio L .

Claramente, basta demostrar que el conjunto linealmente independiente $\{u_{l+1}^*, \dots, u_n^*\}$ es base de L^0 .

En efecto, todo $u^* \in E^*$ se expresa en la forma $u^* = x_1 u_1^* + \dots + x_n u_n^*$, donde $x_1 = u^*(u_1), \dots, x_n = u^*(u_n)$.

Ahora, como $L^0 = \{u_1, \dots, u_l\}^0$, los elementos $u^* \in L^0$ están caracterizados por las condiciones

$$u^*(u_1) = 0, \dots, u^*(u_l) = 0, \text{ es decir, } u^* = x_{l+1} u_{l+1}^* + \dots + x_n u_n^*$$

Por tanto, L^0 está engendrado por el subconjunto $\{u_{l+1}^*, \dots, u_n^*\}$, como se trataba de probar.

Por último, por D2 y la propiedad análoga para el otro tipo de anuladores,

$$\dim {}^0(L^0) = \dim L \text{ y } \dim ({}^0N)^0 = \dim N$$

lo que completa la demostración de D3.

Ahora trasladaremos lo que precede al espacio proyectivo.

Proposición y definición. Sean $P(E)$ y $P(E^*)$ espacios asociados a un espacio vectorial y su dual. Entonces, los subespacios de $P(E)$ y $P(E^*)$ se determinan mutuamente, mediante las biyecciones Δ y Δ^{-1} , definidas por $\Delta(P(L)) = P(L^0)$, $\Delta^{-1}(P(N)) = P({}^0N)$. (Esto es consecuencia inmediata de la propiedad D3)

En esta situación, decimos que $P(E^*)$ es el espacio dual de $P(E)$, y llamamos dualidad canónica a cualquiera de las biyecciones Δ ó Δ^{-1} .

Proposición 3.1.1. Si $P(L_1) \supset P(L_2)$ en $P(E)$, entonces $\Delta(P(L_1)) \subset \Delta(P(L_2))$. Análogamente, para Δ^{-1} .

Dem. Esto es aplicación evidente de la propiedad D1, o la análoga para el otro tipo de anuladores. \square

Proposición 3.1.2. Si $P(L)$ es un subespacio de dimensión m de $P(E)$, entonces, $\dim \Delta(P(L)) = \dim P(E) - m - 1$. En particular, Δ transforma puntos en hiperplanos e hiperplanos en puntos.

Análogamente, para Δ^{-1} .

Dem. Basta aplicar la propiedad D2, o la análoga para el otro tipo de anuladores. \square

El espacio de hiperplanos. Si \mathcal{H} es el conjunto de los hiperplanos de $P(E)$, entonces $P(E^*)$ puede ser identificado con \mathcal{H} , mediante la biyección que

transforma $\eta \in P(E^*)$ en $\Delta^{-1}(\{\eta\})$. Por tanto, podemos considerar que \mathcal{H} es un espacio proyectivo. Tenemos así un espacio de puntos $P(E)$ y un espacio de hiperplanos $P(E^*)$ ó \mathcal{H} . Como además podemos pasar de uno a otro por medio de Δ , resulta que las nociones de punto e hiperplano son formalmente equiparables en geometría proyectiva.

Proposición 3.1.3. *Supongamos que $(M_i)_{i \in I}$ es una familia de subespacios proyectivos de $P(E)$. Entonces:*

$$\begin{aligned} - \Delta(V_p(\bigcup_{i \in I} M_i)) &= \bigcap_{i \in I} \Delta(M_i) \\ - \Delta(\bigcap_{i \in I} M_i) &= V_p(\bigcup_{i \in I} \Delta(M_i)). \end{aligned}$$

Dem. Claramente,

$$\begin{aligned} V_p(\bigcup_{i \in I} M_i) &\supset M_i, \\ \Delta(V_p(\bigcup_{i \in I} M_i)) &\subset \Delta(M_i), \Delta(V_p(\bigcup_{i \in I} M_i)) \subset \bigcap_{i \in I} \Delta(M_i). \end{aligned}$$

Para establecer la inversa de la última inclusión, sea $M = \bigcap_{i \in I} \Delta(M_i)$. Tenemos entonces,

$$\begin{aligned} \Delta(M_i) &\supset M, \\ M_i &= \Delta^{-1}(\Delta(M_i)) \subset \Delta^{-1}(M), V_p(\bigcup_{i \in I} M_i) \subset \Delta^{-1}(M), \\ \Delta(V_p(\bigcup_{i \in I} M_i)) &\supset \Delta(\Delta^{-1}(M)) = M. \text{ Es decir, } \Delta(V_p(\bigcup_{i \in I} M_i)) \supset \bigcap_{i \in I} \Delta(M_i). \end{aligned}$$

Con esto queda probada la primera igualdad. La otra tiene una demostración similar. \square

Conceptos duales y propiedades duales. Llamamos conceptos duales a los que se corresponden mediante la dualidad canónica. Por ejemplo, son duales los conceptos de punto e hiperplano y las nociones de variedad unión y variedad intersección.

Supongamos ahora que \mathbf{P} es una propiedad proyectiva, que puede ser expresada en términos de dimensiones, inclusiones, intersecciones y uniones de subespacios.

Entonces, \mathbf{P} tiene una propiedad dual \mathbf{P}^* , de forma que \mathbf{P} y \mathbf{P}^* se corresponden mediante Δ . El enunciado de \mathbf{P}^* se obtiene sustituyendo cada uno de los conceptos que intervienen en el enunciado de \mathbf{P} por el concepto dual correspondiente; es decir, cambiando el sentido de las relaciones de inclusión, puntos por hiperplanos, uniones por intersecciones, ...

Si \mathbf{P} es cierta, también es cierta \mathbf{P}^* , puesto que ambas son equivalentes mediante Δ .

Por ejemplo, son duales las propiedades \mathbf{P} y \mathbf{P}^* consideradas al comienzo de esta sección.

Ejemplo (Dual del teorema de Pappus). Sean o y o' dos puntos diferentes de un plano proyectivo y $r, s, t \ni o$, $r', s', t' \ni o'$ seis rectas distintas. Entonces, las rectas r^*, s^*, t^* que determinan las uniones $(s \cap t') \cup (s' \cap t)$, $(r \cap t') \cup (r' \cap t)$, $(r \cap s') \cup (r' \cap s)$, respectivamente, son concurrentes.

Ejemplo (Dual del teorema de Desargues). En un plano proyectivo consideramos dos triángulos sin vértices ni lados comunes. (Esta parte del enunciado es la misma para ambos teoremas, porque el concepto de triángulo es autodual). Entonces, con la notación del teorema de partida:

Si los puntos $r \cap r'$, $s \cap s'$, $t \cap t'$ están alineados, las rectas $V_p(a, a')$, $V_p(b, b')$, $V_p(c, c')$ son concurrentes. Y recíprocamente.

Así, la primera afirmación de este teorema y la del teorema de partida son propiedades recíprocas. Por consiguiente, la prueba del teorema de Desargues queda ahora completa, y resulta que el teorema es equivalente a su dual: el teorema de Desargues es autodual.

Para terminar, veremos que la expresión analítica de la dualidad canónica es particularmente sencilla.

Para esto utilizaremos referencias duales (es decir, asociadas a bases duales), en los espacios $P(E)$ y $P(E^*)$.

Proposición 3.1.4. *Supongamos que los espacios duales $P(E)$ y $P(E^*)$ tienen asignadas referencias duales. Entonces, Δ transforma el punto de coordenadas $(a_0 : \dots : a_n)$ en el hiperplano de ecuación $a_0 x_0 + \dots + a_n x_n = 0$.*

Dem. Sea α el punto de $P(E)$ de coordenadas $(a_0 : \dots : a_n)$. Además, sean $\mathcal{B} = \{u_0, \dots, u_n\}$ y $\mathcal{B}^* = \{u_0^*, \dots, u_n^*\}$ bases duales asociadas a las referencias consideradas, con lo que α está representado por el vector $u = \sum_{i=0}^n a_i u_i$.

Debemos determinar el hiperplano $\Delta(\{\alpha\}) = P(\{u\}^0)$.

Ahora, para todo $u^* \in E^*$,

$$\begin{aligned} u^*(u) &= (x_0 u_0^* + \dots + x_n u_n^*)(a_0 u_0 + \dots + a_n u_n) \\ &= a_0 x_0 u_0^*(u_0) + \dots + a_n x_n u_n^*(u_n) \\ &= a_0 x_0 + \dots + a_n x_n \end{aligned}$$

Como $\{u\}^0 = \{u^* \in E^* : u^*(u) = 0\}$, la ecuación de este hiperplano es $a_0x_0 + \dots + a_nx_n = 0$. Por tanto, $a_0x_0 + \dots + a_nx_n = 0$ es también la ecuación de $P(\{u\}^0) = \Delta(\{\alpha\})$. \square

3.2. Razón doble de cuatro puntos

Definición 3.2.1. Sean a, b, c, d puntos distintos de una recta proyectiva P . La razón doble de dichos puntos en el orden dado, denotada por $[a, b, c, d]$, es el escalar $\frac{d_1}{d_0}$, donde $(d_0 : d_1)$ son las coordenadas de d en la referencia $\{a, b; c\}$ de la recta P .

Observaciones. Como d es distinto de a, b, c , se verifica que $\rho(d_0 : d_1) \neq (1 : 0), (0 : 1), (1 : 1)$. Por tanto, $[a, b, c, d]$ está bien definida y es distinta de 0 y 1.

Por otro lado, si a, b, c son puntos distintos de P y $k \neq 0, 1$, existe un punto único d tal que $[a, b, c, d] = k$.

Veremos que la razón doble es un invariante proyectivo (es decir, se conserva por las homografías) y también que este invariante permite caracterizar las homografías entre rectas.

Proposición 3.2.2. Sean P y P' rectas proyectivas sobre un mismo cuerpo K , a, b, c, d y a', b', c', d' puntos distintos de P y P' , respectivamente. Entonces, existe una homografía h de P en P' que transforma a, b, c, d en a', b', c', d' si y sólo si $[a, b, c, d] = [a', b', c', d']$.

Dem. Primero enunciamos dos resultados básicos:

a) Existe una homografía única $h : P \rightarrow P'$, que transforma a, b, c en a', b', c' .

b) Además, h viene dada por las ecuaciones $\rho(x'_0 : x'_1) = (x_0 : x_1)$ en las referencias $\{a, b; c\}$ y $\{a', b'; c'\}$.

Supongamos ahora que d, d' tienen coordenadas $(d_0 : d_1), (d'_0 : d'_1)$ en $\{a, b; c\}, \{a', b'; c'\}$, respectivamente.

Por a), existe una homografía que transforma a, b, c, d en a', b', c', d' si, y sólo si, h transforma d en d' . Además, por b) y la definición de la razón

doble, $h(d) = d'$ equivale a las condiciones

$$\rho(d'_0 : d'_1) = (d_0 : d_1), \frac{d_1}{d_0} = \frac{d'_1}{d'_0}, [a, b, c, d] = [a', b', c', d'].$$

Con esto queda demostrado. \square

Proposición 3.2.3. Como antes, sean P y P' rectas proyectivas sobre un mismo cuerpo K . Entonces, las homografías de P en P' son las aplicaciones biyectivas que conservan la razón doble.

Dem. Por la proposición anterior, las homografías de P en P' conservan la razón doble.

Para el recíproco, supongamos que $h : P \rightarrow P'$ es una biyección que conserva la razón doble.

Sean a, b, c puntos distintos de P y a', b', c' sus transformados mediante h . Sea $h_1 : P \rightarrow P'$ la homografía que transforma a, b, c en a', b', c' . Entonces, como h y h_1 conservan la razón doble,

$$[a, b, c, p] = [a', b', c', h(p)] \text{ y } [a, b, c, p] = [a', b', c', h_1(p)]$$

para todo $p \neq a, b, c$.

Así vemos que $h(p) = h_1(p)$, para todo $p \in P$, con lo que h es la homografía h_1 . \square

➤ **Proposición 3.2.4** (Cálculo de la razón doble). Supongamos que a, b, c, d son puntos distintos de una recta proyectiva $P = P(E)$, cuyas coordenadas en una referencia de P son $(a_0 : a_1), (b_0 : b_1), (c_0 : c_1), (d_0 : d_1)$, respectivamente. Entonces,

$$[a, b, c, d] = \frac{\begin{vmatrix} a_0 & d_0 \\ a_1 & d_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0 & c_0 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} b_0 & d_0 \\ b_1 & d_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_0 & c_0 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}}$$

Dem. Por la hipótesis, los puntos a, b, c, d están representados por vectores $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}$, de coordenadas $(a_0, a_1), (b_0, b_1), (c_0, c_1), (d_0, d_1)$, respectivamente.

Como $a \neq b$, los vectores \hat{a} y \hat{b} son linealmente independientes y, por tanto, forman una base del espacio E . Así,

$$\hat{c} = \lambda \hat{a} + \mu \hat{b}, \quad \hat{d} = \nu \hat{a} + \rho \hat{b}$$

donde los escalares λ, μ, ν, ρ son distintos de 0.

Con estas expresiones calculamos los determinantes del enunciado:

$$\det(\hat{a}, \hat{d}) = \det(\hat{a}, \nu \hat{a} + \rho \hat{b}) = \nu \det(\hat{a}, \hat{a}) + \rho \det(\hat{a}, \hat{b}) = \rho \det(\hat{a}, \hat{b})$$

Y análogamente,

$$\det(\hat{a}, \hat{c}) = \mu \det(\hat{a}, \hat{b}), \quad \det(\hat{b}, \hat{d}) = \nu \det(\hat{b}, \hat{a}), \quad \det(\hat{b}, \hat{c}) = \lambda \det(\hat{b}, \hat{a})$$

Por tanto,

$$\frac{\det(\hat{a}, \hat{d})}{\det(\hat{a}, \hat{c})} : \frac{\det(\hat{b}, \hat{d})}{\det(\hat{b}, \hat{c})} = \frac{\rho}{\mu} : \frac{\nu}{\lambda} \quad (1)$$

Por otro lado, $\{\lambda \hat{a}, \mu \hat{b}\}$ es una base asociada a la referencia $\{a, b; c\}$ de P , y la expresión $\hat{d} = \frac{\nu}{\lambda} \lambda \hat{a} + \frac{\rho}{\mu} \mu \hat{b}$ muestra que las coordenadas de d en $\{a, b; c\}$ son $(\frac{\nu}{\lambda} : \frac{\rho}{\mu})$. Luego, por la definición de la razón doble,

$$[a, b, c, d] = \frac{\rho}{\mu} : \frac{\nu}{\lambda} \quad (2)$$

Las igualdades (1) y (2) demuestran la proposición. \square

En geometría afín la noción de razón simple tiene un significado parecido al de la razón doble. A continuación precisamos la relación entre ambos conceptos.

Para tres puntos distintos a, b, c de una recta afín X , podemos definir la razón simple $[a, b, c]$ como la coordenada cartesiana de c en la referencia $\{a; ab\}$ de X . Es decir, $[a, b, c] = \frac{\overline{ac}}{\overline{ab}}$. De esta forma, $[a, b, c]$ es también la razón de la homotecia de centro a , que transforma b en c .

Proposición 3.2.5. (a) Sean a, b, c, d puntos distintos de una recta afín X . Entonces,

$$[a, b, c, d] = \frac{[a, c, d]}{[b, c, d]}$$

donde $[-, -, -]$ designa la razón simple en X y $[a, b, c, d]$ es la razón doble en \tilde{X} .

(b) Si a, c, d son puntos distintos de X , entonces la razón simple $[a, c, d]$ en X coincide con la razón doble $[a, b_\infty, c, d]$ en la recta proyectiva $\tilde{X} = X \cup \{b_\infty\}$.

Dem. (a) Asignamos a a, b, c, d sus coordenadas cartesianas a_1, b_1, c_1, d_1 , respectivamente, en una referencia \mathcal{E} de X . Entonces, las coordenadas de a, b, c, d en $\tilde{\mathcal{E}}$ son $(1 : a_1), (1 : b_1), (1 : c_1), (1 : d_1)$.

Por tanto, por 2.4,

$$[a, b, c, d] = \frac{d_1 - a_1}{c_1 - a_1} : \frac{d_1 - b_1}{c_1 - b_1} = \frac{ad}{ac} : \frac{bd}{bc} = \frac{[a, c, d]}{[b, c, d]}$$

(b) Como antes, asignamos a a, c, d sus coordenadas cartesianas a_1, c_1, d_1 , respectivamente, en una referencia \mathcal{E} . Las coordenadas de a, b_∞, c, d en $\tilde{\mathcal{E}}$ son entonces $(1 : a_1), (0 : 1), (1 : c_1), (1 : d_1)$.

Por tanto, por 2.4,

$$[a, b_\infty, c, d] = \frac{d_1 - a_1}{c_1 - a_1} = \frac{ad}{ac} = [a, c, d]$$

(Una demostración más conceptual de este apartado resulta de las definiciones, teniendo en cuenta la proposición 2.3.2) \square

En la proposición siguiente se señalan las variaciones que ciertas transposiciones de los puntos a, b, c, d producen sobre el valor de la razón doble. Los resultados se extienden a todas las permutaciones, puesto que éstas se obtienen aplicando sucesivamente algunas de las transposiciones consideradas.

Proposición 3.2.6. Sean a, b, c, d puntos distintos de una recta proyectiva P . Supongamos $[a, b, c, d] = k$. Entonces:

$$[b, a, c, d] = [a, b, d, c] = \frac{1}{k},$$

$$[c, b, a, d] = [a, d, c, b] = 1 - k,$$

$$[d, b, c, a] = [a, c, b, d] = \frac{k}{k-1}.$$

Dem. Los valores de $[b, a, c, d]$ y $[a, b, d, c]$ resultan de la simple observación de la fórmula de 2.4.

Por otro lado, podemos considerar la referencia $\{a, b; c\}$, en la que a, b, c, d tienen coordenadas $(1:0)$, $(0:1)$, $(1:1)$, $(1:k)$, respectivamente. Aplicando 2.4 con estas coordenadas se obtienen los valores deseados.

Por ejemplo,

$$[c, b, a, d] = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}} = 1 - k$$

$$[d, b, c, a] = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k & 1 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{k}{k-1}$$

□

Cuaternas armónicas

Definición 3.2.7. Sean a, b, c, d puntos distintos de una recta proyectiva. Decimos que a y b están separados armónicamente por c y d , o que a, b, c, d forman una cuaterna armónica, cuando $[a, b, c, d] = -1$.

Observamos que $[a, b, c, d] = 1 - [c, b, a, d] = [c, d, a, b]$, de acuerdo con la proposición precedente. Por tanto, la propiedad de separación armónica tiene carácter simétrico: si a y b están separados armónicamente por c y d , entonces c y d están separados armónicamente por a y b .

Ejemplo. Dos puntos distintos a y b de una recta afín D están separados armónicamente por el punto medio de los mismos y el punto del infinito de D .

En efecto, si designamos los dos últimos puntos por c y d_∞ , entonces, por la proposición 2.5, $[c, d_\infty, a, b] = [c, a, b] = -1$.

Observación (Construcción armónica). Sean a, b, c puntos alineados distintos de un espacio de dimensión mayor o igual que 2. Entonces, el punto

d de la cuaterna armónica a, b, c, d se construye geométricamente como indica la figura 3.1, una vez elegida una referencia $\{a, b, e; o\}$ de un plano que contenga a a, b, c .

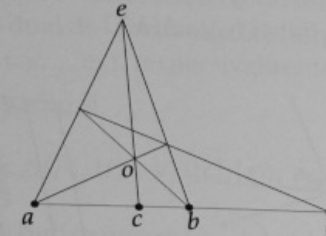


Figura 3.1: Cuaterna armónica a, b, c, d

En efecto, se comprueba que las coordenadas de c y d en la referencia señalada son $(1:1:0)$ y $(1:-1:0)$. Las coordenadas de d en la referencia $\{a, b; c\}$ son entonces $(1:-1)$, con lo que $[a, b, c, d] = -1$.

El siguiente teorema de Staudt justifica el interés del concepto de separación armónica. La demostración será omitida.

Teorema 3.2.8. Las homografías entre rectas proyectivas reales son las aplicaciones biyectivas que conservan las cuaternas armónicas.

3.3. Razón doble de cuatro hiperplanos

Definición 3.3.1. En un espacio proyectivo n -dimensional un haz de hiperplanos es la colección formada por los hiperplanos que contienen a un subespacio dado F , cuya dimensión es $n-2$. Llamamos base del haz al subespacio F .

La figura 3.2 ilustra la definición.

Observación. Sea \mathcal{F} un haz de hiperplanos de base F en un espacio $P(E)$. Entonces, $\Delta(F)$ es una recta proyectiva de $P(E^*)$. Además, $\Delta(F)$ coincide con $\bigcup_{M \in \mathcal{F}} \Delta(M)$.

Dem. En efecto, $\dim \Delta(F) = \dim P(E) - \dim F - 1 = 1$.

Además, si $\eta \in P(E^*)$ y $\Delta(M) = \{\eta\}$, entonces

$$\eta \in \Delta(F) \Leftrightarrow M \supset F \Leftrightarrow M \in \mathcal{F}$$

□

de donde $\Delta(F) = \bigcup_{\eta \in \Delta(F)} \{\eta\} = \bigcup_{M \in \mathcal{F}} \Delta(M)$.

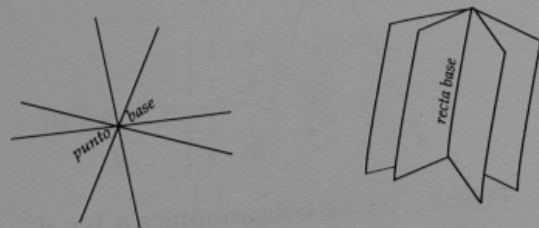


Figura 3.2: Hiperplanos de un haz en dimensiones 2 y 3

Observación adicional. En la observación siguiente a 1.2 mencionamos la identificación $P(E^*) \equiv \mathcal{H}$, en la que un punto $\eta \in P(E^*)$ corresponde al hiperplano $\Delta^{-1}(\{\eta\})$. Además, acabamos de ver que $\eta \in \Delta(F)$ si y sólo si $\Delta^{-1}(\{\eta\}) \in \mathcal{F}$.

Por tanto, si consideramos $P(E^*)$ y \mathcal{H} como espacios de hiperplanos, entonces un haz de hiperplanos \mathcal{F} de base F en $P(E)$ es una recta proyectiva de \mathcal{H} , que corresponde a la recta $\Delta(F)$ de $P(E^*)$ en la identificación $P(E^*) \equiv \mathcal{H}$.

La observación da sentido a la definición siguiente.

Definición 3.3.2. Si M_1, M_2, M_3, M_4 son hiperplanos distintos de un haz de base F , la razón doble de los mismos, denotada por $[M_1, M_2, M_3, M_4]$, es la razón doble de los puntos $\Delta(M_1), \Delta(M_2), \Delta(M_3), \Delta(M_4)$, en la recta $\Delta(F)$.

Lema 3.3.3. Sea \mathcal{F} un haz de hiperplanos de base F en un espacio $P(E)$, donde

$$F: \begin{cases} c_0 x_0 + \dots + c_n x_n = 0 \\ e_0 x_0 + \dots + e_n x_n = 0 \end{cases}$$

Entonces, todo hiperplano de \mathcal{F} tiene una ecuación de la forma

$$\lambda(c_0 x_0 + \dots + c_n x_n) + \mu(e_0 x_0 + \dots + e_n x_n) = 0$$

en la referencia en la que está expresada F .

Dem. Utilizaremos la referencia del enunciado y su dual. Así, cualquier hiperplano $M: t_0 x_0 + \dots + t_n x_n = 0$ es dual del punto $[t]$, donde t tiene coordenadas (t_0, \dots, t_n) .

En consecuencia, como F viene dada como intersección de dos hiperplanos, resulta que F es dual de la recta $V_p([c], [e])$, donde las coordenadas de c y e son (c_0, \dots, c_n) y (e_0, \dots, e_n) , respectivamente.

Por tanto, $M \in \mathcal{F}$ si y sólo si

$$\Delta(M) \subset \Delta(F), [t] \in V_p([c], [e]), t = \lambda c + \mu e$$

La condición última indica que $\rho(t_0 \dots t_n) = \lambda(c_0 \dots c_n) + \mu(e_0 \dots e_n)$, como se trataba de probar. □

Observación (Coordenadas en un haz de hiperplanos). Conservamos los datos del enunciado y la demostración del lema. Como $\Delta(F) = V_p([c], [e])$, existe una referencia de $\Delta(F)$ asociada a la base $\{c, e\}$. Además, las condiciones $\Delta(M) = \{[t]\}$ y $t = \lambda c + \mu e$, indican que $(\lambda : \mu)$ son las coordenadas de $\Delta(M)$ en esa referencia.

Por tanto, podemos utilizar estas coordenadas para calcular la razón doble de cuatro hiperplanos del haz.

Corolario 3.3.4. Sea \mathcal{F} como en el lema precedente. Sean A, B, R, S hiperplanos distintos de \mathcal{F} cuyas ecuaciones se obtienen de la ecuación general

$$\xi_0(c_0 x_0 + \dots + c_n x_n) + \xi_1(e_0 x_0 + \dots + e_n x_n) = 0$$

asignando a $(\xi_0 : \xi_1)$ los valores $(a_0 : a_1), (b_0 : b_1), (r_0 : r_1), (s_0 : s_1)$.

Entonces,

$$[A, B, R, S] = \frac{\begin{vmatrix} a_0 & s_0 \\ a_1 & s_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0 & r_0 \\ a_1 & r_1 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} b_0 & s_0 \\ b_1 & s_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_0 & r_0 \\ b_1 & r_1 \end{vmatrix}}$$

Otra manera de calcular la razón doble se basa en el resultado siguiente.

Proposición 3.3.5. Sea \mathcal{F} un haz de hiperplanos de base F en un espacio $P(E)$. Sea D una recta de $P(E)$ que no corta a F . Entonces, existe una homografía $h : \Delta(F) \rightarrow D$, $h : \Delta(M) \mapsto D \cap M$. Su inversa es la homografía $h' : \alpha \mapsto \Delta(V_p(\alpha, F))$.

Dem. Como D no corta a F , resulta de 1.1.10 que ningún hiperplano M de \mathcal{F} contiene a D . (Pues, en caso contrario, D cortaría al hiperplano F de M). Por el mismo resultado, todo hiperplano M de \mathcal{F} corta a D en un punto único, lo que prueba que h está bien definida. Utilizando las propiedades de Δ es fácil comprobar que h y h' son aplicaciones inversas.

Veamos que h es una homografía:

Para esto utilizaremos referencias asociadas a bases apropiadas en los espacios $P(E)$ y $P(E^*)$ y en los subespacios $D = P(L)$, $F = P(N)$ y $\Delta(F) = P(N^0)$.

Las bases de E y E^* serán $\{u_0, \dots, u_n\}$ y su dual $\{u_0^*, \dots, u_n^*\}$, donde $\{u_0, u_1\}$ y $\{u_2, \dots, u_n\}$ son bases elegidas en los subespacios suplementarios L y N . En N^0 consideramos la base $\{u_0^*, u_1^*\}$.

De esta forma, F y D están definidas por las ecuaciones

$$F : x_0 = 0, x_1 = 0 \quad D : x_2 = 0, \dots, x_n = 0$$

Además, todo hiperplano M de \mathcal{F} tiene una ecuación del tipo $\xi_0 x_0 + \xi_1 x_1 = 0$, y las coordenadas del punto $D \cap M$ son $(\xi_1 : -\xi_0)$.

Esto prueba que las ecuaciones

$$\begin{cases} \rho x_0 = -\xi_1 \\ \rho x_1 = \xi_0 \end{cases}$$

definen h , con lo que h es una homografía. \square

Corolario 3.3.6. Sea \mathcal{F} un haz de hiperplanos cuya base no es incidente con una recta D . Entonces, la razón doble en \mathcal{F} de cuatro hiperplanos del haz coincide con la razón doble en la recta D de los puntos de intersección de dicha recta con los hiperplanos considerados.

Dem. Basta observar que la aplicación h de la proposición anterior conserva la razón doble, por ser una homografía entre rectas proyectivas.

\square

Capítulo 4

Correspondencias proyectivas particulares

En las dos primeras secciones de este capítulo analizaremos con detalle los diferentes tipos de homografías de la recta y el plano proyectivo sobre el cuerpo real.

En general, como una homografía está determinada por una matriz, resulta apropiado considerar que dos homografías de un espacio son del mismo tipo cuando existen referencias en las que sus matrices son iguales. (Es decir, cuando tienen matrices semejantes en una misma referencia). Por tanto, utilizando las matrices canónicas de Jordan, los distintos tipos de homografías quedan caracterizados algebraicamente por las correspondientes matrices canónicas. Además, veremos que, para la recta y el plano proyectivos, quedan también caracterizados geoméricamente por las configuraciones de sus subespacios invariantes, esto es, por las colecciones de dichos subespacios y las relaciones de incidencia entre los mismos.

4.1. Homografías de la recta

En el caso de las homografías de una recta, los subespacios invariantes a considerar son los puntos fijos, y una homografía que tiene tres puntos fijos distintos es la identidad. Las peculiaridades de los demás tipos se ex-

ponen en las proposiciones siguientes.

Proposición 4.1.1. *Supongamos que una homografía h de una recta proyectiva real P tiene dos puntos fijos distintos a y b . Entonces, en una referencia $\{a, b, c\}$, la homografía tiene la matriz canónica $\begin{pmatrix} 1 & \\ & k \end{pmatrix}$, donde $k \neq 0, 1$.*

Además, para todo punto $p \in P$ distinto de a y b , es $[a, b, p, h(p)] = k$.

Dem. Por el teorema 2.4.2, la aplicación $f : X \rightarrow X$, inducida por h en la recta afín $X = P - \{b\}$ es una homotecia de centro a . Sea entonces k la razón de la homotecia. Considerando una referencia cartesiana de origen a , la condición $f(p) = a + k\overrightarrow{ap}$ se expresa en coordenadas en la forma

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \quad (1)$$

lo que significa que la matriz 2×2 de (1) es la matriz de f en la referencia elegida \mathcal{E} . Por tanto, h tiene esa misma matriz en la referencia $\tilde{\mathcal{E}}$.

Además, si $\mathcal{E} = \{a; u\}$, entonces $\tilde{\mathcal{E}} = \{a, [u]; a + u\} = \{a, b, c\}$, como se trataba de probar.

Por otro lado, para todo $p \in P$ distinto de a y b :

$$k = \frac{\overrightarrow{af(p)}}{\overrightarrow{ap}} = [a, p, f(p)] = [a, b, p, f(p)]$$

teniendo en cuenta 3.2.5. □

Proposición 4.1.2. *Sea h una homografía de una recta proyectiva real P con un único punto fijo b . Entonces, en una referencia $\{a, b; h(a)\}$, la homografía tiene la matriz canónica $\begin{pmatrix} 1 & \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.*

Dem. Por el teorema 2.4.2, la aplicación $f : X \rightarrow X$, inducida por h en la recta afín $X = P - \{b\}$ es una traslación. El vector de la traslación es $u = \overrightarrow{af(a)}$, para cualquier punto elegido a . Considerando la referencia cartesiana $\{a; u\}$, la condición $f(p) = p + u$ se expresa en coordenadas en la forma

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \quad (2)$$

lo que significa que la matriz 2×2 de (2) es la matriz de f en la referencia elegida \mathcal{E} . Por tanto, h tiene esa misma matriz en la referencia $\tilde{\mathcal{E}}$.

Como $\tilde{\mathcal{E}} = \{a, [u]; a + \overrightarrow{af(a)}\} = \{a, b; h(a)\}$, la proposición queda demostrada. □

Proposición 4.1.3. *Supongamos que una homografía h de una recta proyectiva real $P = P(E)$ no deja ningún punto fijo. Entonces, en una referencia apropiada la homografía tiene la matriz $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, donde $\beta > 0$.*

La matriz canónica se obtiene multiplicando la anterior por el inverso de β .

Dem. Como la homografía no tiene puntos fijos, está inducida por un isomorfismo vectorial $g : E \rightarrow E$ que carece de rectas invariantes y, por tanto, de valores propios. Así, el polinomio característico de g es del tipo

$$(t - \alpha)^2 + \beta^2 = t^2 - 2\alpha t + \alpha^2 + \beta^2, \beta > 0$$

donde 2α y $\alpha^2 + \beta^2$ son la traza y el determinante de g , respectivamente.

Sean entonces $u, v \in E$ tales que $u \neq 0$ y $v = \frac{1}{\beta}(g - \alpha \text{id})(u)$.

De esta forma, $g(u) = \alpha u + \beta v$; y además u y v son linealmente independientes, porque si fuesen proporcionales u sería un vector propio de g .

Esto muestra que $\{u, v\}$ es una base de E , y los elementos α y β forman la primera columna de la matriz de g en dicha base. Entonces, como conocemos la traza y el determinante de dicha matriz, ésta es necesariamente $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$. Con esto queda demostrado. □

Homografías involutivas

Proposición 4.1.4. *Sea h una homografía de una recta proyectiva P , y supongamos que existen dos puntos distintos a y b tales que $h(a) = b$ y $h(b) = a$. (Esto se expresa diciendo que a y b están en involución). Entonces, h es involutiva; es decir, $h = h^{-1}$.*

Dem. En efecto, en una referencia $\{a, b; c\}$ la matriz de h es del tipo $\begin{pmatrix} 0 & v \\ \mu & 0 \end{pmatrix}$, como se comprueba de inmediato. Esta matriz es proporcional a su inversa, lo que demuestra el resultado. \square

Proposición 4.1.5. Sea h una homografía de una recta proyectiva real P , distinta de la identidad. Entonces, h es involutiva si y sólo si tiene una matriz cuya traza es 0.

Dem. En efecto, hemos visto en la demostración anterior que, si h es involutiva, está representada por una matriz de traza 0. Por otro lado, las (únicas) matrices canónicas de las homografías de P que tienen traza 0 son $\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, que corresponden a homografías involutivas. \square

4.2. Homografías del plano

Matrices canónicas. Consideramos una homografía h de un plano proyectivo real $P = P(E)$, inducida por un isomorfismo vectorial g .

Las matrices elementales de Jordan (bloques elementales) que pueden formar parte de la matriz de Jordan de g son de la forma

$$J_1(\lambda) = (\lambda), \quad J_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad J_3(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ 1 & \lambda & \\ & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$J(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

las tres primeras asociadas a un valor propio λ , y la última correspondiente a un factor irreducible $(t - \alpha)^2 + \beta^2$, $\beta > 0$, del polinomio característico.

Además, g tiene algún valor propio λ , ya que su polinomio característico es de grado impar. Y, como podemos sustituir g por $\frac{1}{\lambda}g$, no hay inconveniente en suponer que g tiene el valor propio 1.

De esta forma, la homografía h tiene una matriz canónica de uno de los tipos siguientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \alpha & -\beta \\ & \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \mu & \\ & & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & 1 \\ & & \mu \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \mu & \\ & & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Puntos fijos y rectas invariantes. Recordamos de la sección 1.4 que una homografía de matriz A deja fijo un punto α si y sólo si, para algún valor propio λ de la matriz A , sus coordenadas $(x_0 : x_1 : x_2)$ son solución no nula del sistema

$$(A - \lambda I)(x_0 \ x_1 \ x_2)^t = 0 \quad (1)$$

De modo similar, la misma homografía deja invariante una recta S de ecuación $\xi_0 x_0 + \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 = 0$ si y sólo si, para algún valor propio λ de la matriz A , los coeficientes $(\xi_0 \ \xi_1 \ \xi_2)$ son solución no nula del sistema

$$(\xi_0 \ \xi_1 \ \xi_2)(A - \lambda I) = 0 \quad (2)$$

Supongamos ahora $M(h; \mathcal{P}) = J$, donde J es la matriz canónica y $\mathcal{P} = \{p_0, p_1, p_2; p_3\}$.

Calculando con estas matrices canónicas, en el orden de la lista precedente, resultan los puntos fijos y las rectas invariantes representados en la figura 4.1.

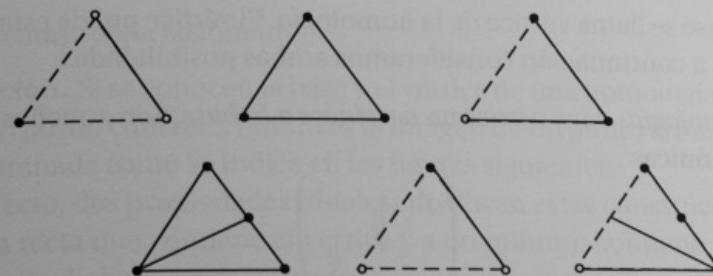


Figura 4.1: Puntos fijos (en negro) y rectas invariantes (trazo continuo)

Algunas aclaraciones:

Los vértices de los triángulos dibujados son los puntos p_0, p_1, p_2 de la referencia considerada.

Tres puntos fijos alineados indican una recta de puntos fijos.

Tres rectas invariantes concurrentes indican un haz de rectas invariantes.

Se ha excluido la homografía identidad.

Para cualquier valor propio λ de la matriz de h se obtiene una variedad de puntos fijos, definida por el sistema (1), y una colección de hiperplanos (rectas) invariantes, determinada por el sistema (2). Esta última se puede considerar como una variedad del espacio de hiperplanos y entonces las dimensiones de ambas variedades son iguales.

Por tanto, como se observa en la figura 4.1, un punto fijo está siempre asociado a una recta invariante y una recta de puntos fijos a un haz de rectas invariantes.

Homologías del plano. Entre los tipos de homografías descritos existen dos clases de homologías, que están representadas por las matrices de Jordan

$$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \mu & \\ & & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & & \\ 1 & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix}$$

Recordamos que una homología del plano es una homografía $h \neq id$, que tiene una recta de puntos fijos (llamada base o eje de la homología). Por dualidad, toda homología tiene también un haz de rectas invariantes, a cuya base se llama vértice de la homología. El vértice puede estar o no en la base, y a continuación consideramos ambas posibilidades.

• *Homologías cuyo vértice no pertenece a la base.* Son aquellas con matrices canónicas

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \frac{\mu}{\lambda} & \\ & & \frac{\mu}{\lambda} \end{pmatrix}$$

Si h tiene esta matriz en una referencia $\mathcal{P} = \{p_0, p_1, p_2; p_3\}$, entonces la base y el vértice son la recta $V_p(p_1, p_2)$ y el punto p_0 . Por el teorema 2.4.2,

la aplicación $f: X \rightarrow X$, inducida por h en el complemento de la base, es una homotecia de centro p_0 .

Además, por 2.4.6, \mathcal{P} está asociada a una referencia \mathcal{E} de X , luego la matriz anterior es también la matriz de f en \mathcal{E} . Por tanto, la razón de la homotecia es $k = \frac{\mu}{\lambda}$.

- *Propiedad:* Si $h(p) = p'$, $p \neq p'$ y la recta $V_p(p_0, p)$ corta a la base en p_* , entonces,

$$[p_0, p_*, p, p'] = [p_0, p, p']_X = \frac{p_0 p'}{p_0 p} = k$$

Recordamos que k es la característica o razón de la homología.

• *Homologías cuyo vértice pertenece a la base.* (Llamadas también homologías especiales o elaciones). Son aquellas con matrices de Jordan

$$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ 1 & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix}$$

Si h tiene esta matriz en una referencia $\mathcal{P} = \{p_0, p_1, p_2; p_3\}$, entonces la base y el vértice son la recta $V_p(p_1, p_2)$ y el punto p_1 . Por el teorema 2.4.2, la aplicación $f: X \rightarrow X$, inducida por h en el complemento de la base, es una traslación.

El vértice p_1 es el punto del infinito de la familia de rectas paralelas de X que tienen la dirección de la traslación.

- *Propiedad:* Si $h(p) = p'$, $p \neq p'$ y $h(p') = p''$, entonces

$$[p, p', p'', p_1] = \frac{1}{2}$$

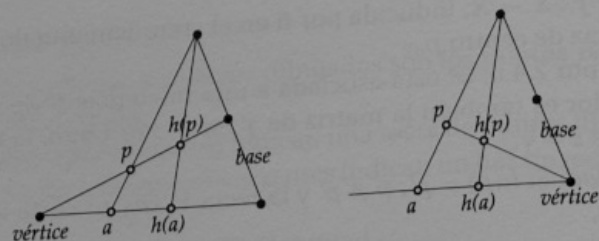
como se comprueba fácilmente.

Observación. Si se conocen la base y el vértice de una homología y la imagen de un punto concreto, entonces la imagen de un punto arbitrario queda determinada como se indica en las figuras siguientes.

En efecto, dos propiedades (duales) justifican estas construcciones:

- Una recta que contiene al vértice y a un punto p contiene también a $h(p)$, ya que dicha recta es invariante.

- Un punto contenido en la base y en una recta r también está contenido en $h(r)$, ya que dicho punto es invariante.

Figura 4.2: Construcción de la imagen de p

Proposición 4.2.1 (Homografías involutivas). *Las únicas homografías involutivas del plano son la identidad y las homologías de razón -1 , llamadas también homologías armónicas.*

Dem. En efecto, sea $h \neq id$ una homografía involutiva del plano P .

Si un punto a se transforma por h en $a' \neq a$, entonces, como a y a' están en involución, la recta $V_p(a, a')$ es invariante por h . Por tanto, podemos encontrar dos rectas invariantes distintas r y s , lo que asegura que el punto $p_0 \in r \cap s$ permanece fijo. Además, como $h|_r : r \rightarrow r$ es una homografía involutiva, r debe contener a un punto fijo $p_1 \neq p_0$ (Por los resultados de la sección anterior). Y, del mismo modo, s debe contener a un punto fijo $p_2 \neq p_0$.

Entonces, en una referencia $\mathcal{P} = \{p_0, p_1, p_2; p_3\}$, la homografía tiene una matriz diagonal,

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \mu & \\ & & \nu \end{pmatrix}$$

y las condiciones $h \neq id$, $h = h^{-1}$ dejan solamente las posibilidades $-1 = \mu = \nu$, $1 = -\mu = \nu$ y $1 = \mu = -\nu$.

Las matrices que se obtienen para estos valores de μ y ν corresponden a homologías armónicas, con lo que queda demostrado. \square

4.3. Colineaciones y correlaciones

En geometría proyectiva, además de las aplicaciones ordinarias entre espacios (aplicaciones proyectivas), existen otros tipos de aplicaciones de

interés, que a diferencia de las primeras no establecen correspondencias entre los puntos de dos espacios dados, sino entre los subespacios de los mismos. Un ejemplo notable es la dualidad canónica, que establece una biyección entre los subespacios proyectivos de dos espacios duales. En este tipo de correspondencias se sitúan las colineaciones y las correlaciones, con la dualidad canónica como correlación particular.

Definiciones y ejemplos

Definición 4.3.1. *Supongamos $\dim_K P(E) = \dim_K P(E')$ y sean \mathcal{S} y \mathcal{S}' los conjuntos formados por las variedades proyectivas de $P(E)$ y $P(E')$, respectivamente.*

Llamamos colineación de $P(E)$ en $P(E')$ a toda aplicación biyectiva $\Phi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ que conserva las relaciones de inclusión entre variedades. – Es decir, si $M_1, M_2 \in \mathcal{S}$, $M_1 \subset M_2$, entonces $\Phi(M_1) \subset \Phi(M_2)$.

Llamamos correlación de $P(E)$ en $P(E')$ a toda aplicación biyectiva $\Psi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ que invierte las relaciones de inclusión entre variedades. – Es decir, si $M_1, M_2 \in \mathcal{S}$, $M_1 \subset M_2$, entonces $\Psi(M_1) \supset \Psi(M_2)$.

Claramente, la composición de dos colineaciones o dos correlaciones es una colineación, mientras que la composición de una colineación y una correlación es una correlación.

En consecuencia, como la dualidad canónica es una correlación, cualquier correlación Ψ es de la forma $\Phi \circ \Delta$, donde $\Phi = \Psi \circ \Delta^{-1}$ es una colineación.

Ejemplo de colineaciones. Toda homografía $h : P(E) \rightarrow P(E')$ determina una colineación Φ_h de $P(E)$ en $P(E')$, tal que $\Phi_h(M) = h(M)$.

Además, para espacios proyectivos reales, se puede demostrar que las colineaciones de este tipo son las únicas posibles.

Ejemplos de correlaciones.

- La dualidad canónica Δ

- Las determinadas por formas bilineales regulares, que estudiaremos a continuación (Su importancia se debe al papel esencial que desempeñan en el estudio de las cuádricas)

Correlaciones asociadas a formas bilineales

La exposición de este apartado es similar a la de la sección de dualidad. Primero se resumen los requisitos necesarios sobre formas bilineales.

Requisitos sobre formas bilineales. Sea $\psi : E \times E \rightarrow K$ una forma bilineal sobre un espacio vectorial E .

Para todo subconjunto V de E , sean

$${}^{\#}V = \{u \in E : \psi(u, v) = 0, \text{ para todo } v \in V\}$$

$$V^{\#} = \{w \in E : \psi(v, w) = 0, \text{ para todo } v \in V\}$$

Entonces, $V^{\#}$ y ${}^{\#}V$ son subespacios vectoriales de E , llamados subespacios ortogonales de V con respecto a la forma bilineal ψ .

En particular, el subespacio $N = E^{\#}$ se llama núcleo de ψ .

$$(N = \{v \in E : \psi(u, v) = 0, \text{ para todo } u \in E\})$$

Cuando $N = \{0\}$, decimos que la forma ψ es regular.

Admitimos el resultado siguiente:

Para cualquier forma bilineal regular $\psi : E \times E \rightarrow K$, los subespacios $V^{\#}$ y ${}^{\#}V$ verifican las propiedades análogas a las indicadas en la sección de dualidad para los subespacios V^0 y 0W .

(Las demostraciones son análogas a las correspondientes para los anuladores, con una excepción: la analogía no se aplica a la relación $\dim^{\#}L = \dim E - \dim L$. Ésta se demostrará después de 3.6)

Ahora aplicaremos lo que precede al estudio de las correlaciones.

Proposición 4.3.2 (Correlaciones asociadas a una forma bilineal regular). Toda forma bilineal regular $\psi : E \times E \rightarrow K$ define correlaciones Ψ y Ψ' de $P(E)$ en $P(E)$ tales que $\Psi(P(L)) = P({}^{\#}L)$ y $\Psi'(P(L)) = P(L^{\#})$.

Además, Ψ' es la inversa de Ψ .

Dem. Es inmediato que Ψ y Ψ' invierten las relaciones de inclusión entre variedades. Además, $\Psi' \circ \Psi$ transforma $P(L)$ en $P(({}^{\#}L)^{\#}) = P(L)$; es decir, $\Psi' \circ \Psi = id$. Análogamente, $\Psi \circ \Psi' = id$, con lo que queda demostrado. \square

Proposición 4.3.3. Sea Ψ la correlación de $P(E)$ en $P(E)$ asociada a una forma bilineal regular. Si M es un subespacio de dimensión m de $P(E)$, entonces, $\dim \Psi(M) = \dim P(E) - m - 1$. En particular, Ψ transforma puntos en hiperplanos e hiperplanos en puntos.

Dem. Como la proposición análoga para Δ . (También se puede deducir de la proposición 3.5) \square

Proposición 4.3.4. Sea Ψ la correlación de $P(E)$ en $P(E)$ asociada a una forma bilineal regular. Si $(M_i)_{i \in I}$ es una familia de subespacios proyectivos de $P(E)$, entonces:

$$- \Psi(V_p(\bigcup_{i \in I} M_i)) = \bigcap_{i \in I} \Psi(M_i)$$

$$- \Psi(\bigcap_{i \in I} M_i) = V_p(\bigcup_{i \in I} \Psi(M_i)).$$

Dem. Como la proposición análoga para Δ . (También se puede deducir de la proposición 3.5) \square

Proposición 4.3.5. Sea Ψ la correlación de $P(E)$ en $P(E)$ asociada a una forma bilineal regular ψ . Entonces, existe una homografía única h de $P(E)$ en $P(E^*)$ tal que $\Psi = \Delta^{-1} \circ \Phi_h$.

Dem. Será dividida en tres apartados.

a) Definición de h .

La forma $\psi : E \times E \rightarrow K$ determina una aplicación

$$f : E \rightarrow E^*, \text{ tal que } f(v)(u) = \psi(u, v)$$

Es fácil comprobar que f está bien definida y es una aplicación lineal. Además, su núcleo, $\ker(f) = \{v \in E : f(v)(u) = 0, \text{ para todo } u \in E\}$ coincide con el núcleo $N = \{v \in E : \psi(u, v) = 0, \text{ para todo } u \in E\}$ de la forma ψ . Como éste es $\{0\}$, por la regularidad de ψ , resulta que f es un isomorfismo vectorial.

Sea entonces $h : P(E) \rightarrow P(E^*)$ la homografía inducida por f .

b) Veamos que $\Psi = \Delta^{-1} \circ \Phi_h$.

$$\Psi(P(L)) = P({}^{\#}L),$$

$$(\Delta^{-1} \circ \Phi_h)(P(L)) = \Delta^{-1}(h(P(L))) = \Delta^{-1}(P(f(L))) = P({}^0f(L)).$$

Como

$${}^{\#}L = \{u \in E : \psi(u, v) = 0, \text{ para todo } v \in L\}$$

$${}^0f(L) = \{u \in E : \alpha(u) = 0, \text{ para todo } \alpha \in f(L)\}$$

cambiando la condición $\alpha \in f(L)$ por la condición equivalente $\alpha = f(v)$, $v \in L$, vemos que ${}^{\#}L = {}^0f(L)$. Esto prueba el apartado b).

c) Unicidad de h .

Como $\Phi_h(M) = h(M)$, tenemos que h está determinada por Φ_h . Por tanto, la homografía es única, ya que $\Phi_h = \Delta \circ \Psi$. \square

Corolario 4.3.6. *Dos formas bilineales regulares determinan la misma correlación si, y sólo si, son proporcionales.*

Dem. Supongamos que Ψ, Ψ' son las correlaciones determinadas por las formas ψ, ψ' .

Como en la demostración de la proposición, $\Psi = \Delta^{-1} \circ \Phi_h$, $\Psi' = \Delta^{-1} \circ \Phi_{h'}$, donde h, h' están inducidas por los isomorfismos f, f' definidos por ψ, ψ' .

Por la proposición, si $\Psi = \Psi'$, entonces $h = h'$. Así, f y f' son proporcionales, y lo mismo sucede para ψ y ψ' . \square

Y recíprocamente.

Observación. La relación $\dim {}^{\#}L = \dim E - \dim L$ (necesaria para la validez de 3.2 y 3.3) se sigue claramente de la igualdad ${}^{\#}L = {}^0f(L)$, establecida en la prueba de 3.5.

Observación. Como en la demostración de 3.5, toda forma bilineal (no necesariamente regular) $\psi : E \times E \rightarrow K$ determina una aplicación lineal $f : E \rightarrow E^*$, tal que $f(v)(u) = \psi(u, v)$. Se comprueba fácilmente que, si \mathcal{B} y \mathcal{B}^* son bases duales, entonces

$$M(\psi; \mathcal{B}) = M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}^*)$$

(Recordamos que $M(\psi; \mathcal{B}) = ((\psi(u_i, u_j)))$, donde u_0, \dots, u_n son los elementos de \mathcal{B})

Además, de la igualdad anterior, resulta de inmediato que

$$M(\psi; \mathcal{B}_1) = M(\mathcal{B}_1; \mathcal{B})^t M(\psi; \mathcal{B}) M(\mathcal{B}_1; \mathcal{B})$$

donde \mathcal{B} y \mathcal{B}_1 son bases del espacio E .

Por último, estudiaremos las expresiones analíticas de las correlaciones consideradas en esta sección. Primero veremos cómo actúan estas correlaciones sobre los puntos y después indicaremos cómo actúan sobre los hiperplanos.

Proposición 4.3.7. *Sea Ψ la correlación asociada a una forma bilineal regular $\psi : E \times E \rightarrow K$. En $P(E)$ consideramos la referencia asociada a una base \mathcal{B} . Si Ψ transforma el punto de coordenadas $(z_0 : \dots : z_n)$ en el hiperplano de ecuación $\xi'_0 x_0 + \dots + \xi'_n x_n = 0$, entonces*

$$\rho \xi' = M(\psi; \mathcal{B}) z$$

donde z designa la matriz transpuesta de $(z_0 \dots z_n)$; y análogamente ξ' .

Dem. Sea $\alpha = [v]$ el punto de coordenadas $(z_0 : \dots : z_n)$.

Por las definiciones, $\Psi(\{\alpha\}) = P({}^{\#}\{v\})$, donde ${}^{\#}\{v\} = \{u \in E : \psi(u, v) = 0\}$.

En esta situación, los hiperplanos $\Psi(\{\alpha\})$ y ${}^{\#}\{v\}$ están definidos por la ecuación

$$x^t M(\psi; \mathcal{B}) z = 0$$

Como esta ecuación debe ser proporcional a la del enunciado, $x^t \xi' = 0$, se tiene la expresión deseada. \square

Proposición 4.3.8. *Supongamos las hipótesis de la proposición anterior. Si Ψ transforma el hiperplano de ecuación $\xi_0 x_0 + \dots + \xi_n x_n = 0$ en el punto de coordenadas $(z'_0 : \dots : z'_n)$, entonces*

$$\rho(z'_0 \dots z'_n) = (\xi_0 \dots \xi_n) M(\psi; \mathcal{B})^{-1}$$

La demostración es similar a la de la proposición anterior y será omitida.

Capítulo 5

Cuádricas proyectivas

5.1. Cuádricas proyectivas. Variedades tangentes

(En los capítulos dedicados al estudio de las cuádricas, suponemos que en el cuerpo base K es $k \neq -k$ siempre que $k \neq 0$)

Definición 5.1.1. Una cuádrica $C, [\phi]$ en un espacio proyectivo $P(E)$ es la colección, denotada por $[\phi]$, de las formas no nulas proporcionales a una forma bilineal simétrica $\phi : E \times E \rightarrow K$. Llamamos imagen de la cuádrica al conjunto $C = \{[u] \in P(E) : \phi(u, u) = 0\}$.

Aunque formalmente la cuádrica es la colección $[\phi]$, la notación $C, [\phi]$ trata de sugerir que el interés se centra en las propiedades geométricas, cuyos enunciados hacen referencia al conjunto C . Por la misma razón, en vez de definir la cuádrica por medio de una forma particular ϕ , lo hacemos mediante la colección $[\phi]$, puesto que dos formas proporcionales reflejan igualmente esas propiedades geométricas.

El término cuádrica se sustituye muchas veces por el de hipercuádrica, reservando el primero para las hipercuádricas de los espacios de dimensión 3. Las cuádricas del plano reciben el nombre usual de cónicas.

Definición 5.1.2. Decimos que una cuádrica proyectiva $C, [\phi]$ es regular cuando la forma ϕ es regular. Cuando ϕ no es regular, decimos que la cuádrica es singular o degenerada.

Expresión analítica. Sea $C, [\phi]$ una cuádrica proyectiva de $P(E)$. Consideramos la referencia asociada a una base \mathcal{B} , y designamos por x^t la matriz de coordenadas $(x_0 \dots x_n)$.

Entonces, los puntos de C están determinados por la ecuación

$$x^t M(\phi; \mathcal{B}) x = 0$$

cuyo primer miembro es un polinomio homogéneo simétrico de grado 2 en las coordenadas $(x_0 : \dots : x_n)$.

Decimos que la ecuación anterior es la ecuación de la cuádrica en la referencia considerada.

Subespacios tangentes

La noción de espacio tangente en un punto está asociada a una amplia clase de objetos matemáticos. Por ejemplo, si los objetos son curvas o superficies del espacio euclídeo, tenemos las nociones de recta tangente o plano tangente en un punto, respectivamente. Estas rectas y planos tangentes pueden ser interpretados intuitivamente como aproximaciones lineales del objeto correspondiente cerca del punto de tangencia.

La noción de hiperplano tangente a una cuádrica, que definiremos a continuación, responde también a esa idea intuitiva, para los espacios proyectivos reales.

Definición 5.1.3. Sean $C, [\phi]$ una cuádrica en un espacio $P(E)$ y $\alpha = [u]$ un punto de C .

Decimos que α es un punto regular de $C, [\phi]$ cuando la forma lineal $\phi(u, -)$ es no nula. Cuando $\phi(u, -)$ es nula, decimos que α es un punto singular.

Si α es un punto regular, llamamos hiperplano tangente a la cuádrica en el punto α al hiperplano proyectivo T_α , correspondiente al hiperplano vectorial $\ker \phi(u, -)$. Es decir, $T_\alpha = \{[v] \in P(E) : \phi(u, v) = 0\}$.

Observamos que $\alpha \in T_\alpha$; pues $\alpha \in C$ y, por tanto, $\phi(u, u) = 0$.

Observación. En la referencia asociada a una base \mathcal{B} , las coordenadas de los puntos singulares son las soluciones no nulas del sistema

$$x^t M(\phi; \mathcal{B}) x = 0$$

El hiperplano tangente en un punto de coordenadas $(a_0 : \dots : a_n)$ está definido en la misma referencia por la ecuación

$$a^t M(\phi; \mathcal{B}) x = 0$$

Proposición 5.1.4. Supongamos que $C, [\phi]$ es una cuádrica con un punto regular α y S es una recta que contiene a α . Entonces, $S \subset T_\alpha$ si y sólo si $S \subset C$ ó $C \cap S = \{\alpha\}$.

Dem. Sea $S = V_p(\alpha, \beta)$, donde $\alpha = [u_0]$, $\beta = [u_1]$. Para todo $[u] \in S$ se tiene $u = x_0 u_0 + x_1 u_1$, y la condición para que $[u] \in C$ es

$$\begin{aligned} 0 = \phi(u, u) &= x_0^2 \phi(u_0, u_0) + 2x_0 x_1 \phi(u_0, u_1) + x_1^2 \phi(u_1, u_1) \\ &= 2x_0 x_1 \phi(u_0, u_1) + x_1^2 \phi(u_1, u_1) \end{aligned}$$

Así, las condiciones $S \subset C$, $C \cap S = \{\alpha\}$ indican que la relación precedente es idénticamente nula, o bien se cumple únicamente cuando $x_1 = 0$; es decir, la primera condición equivale a $\phi(u_0, u_1) = 0$ y $\phi(u_1, u_1) = 0$, y la segunda a $\phi(u_0, u_1) = 0$ y $\phi(u_1, u_1) \neq 0$.

En consecuencia, $\phi(u_0, u_1) = 0$ es condición necesaria y suficiente para que $S \subset C$ ó $C \cap S = \{\alpha\}$.

Por otro lado, utilizando la definición de T_α , las condiciones $\phi(u_0, u_1) = 0$, $\beta \in T_\alpha$ y $V_p(\alpha, \beta) \subset T_\alpha$ son también equivalentes, lo que completa la demostración. \square

El concepto de hiperplano tangente se generaliza a continuación, considerando subespacios de dimensiones arbitrarias.

Definición 5.1.5. Consideramos una cuádrica $C, [\phi]$, un punto $\alpha = [u]$ de C y un subespacio proyectivo $P(L)$. Si α es un punto regular, decimos que $P(L)$ es tangente a la cuádrica en dicho punto cuando $P(L)$ contiene a α y está contenido en T_α .

Ahora, por la definición de T_α , la inclusión $P(L) \subset T_\alpha$ es equivalente a $L \subset \ker \phi(u, -)$.

Por tanto, de modo más general, podemos decir que $P(L)$ es tangente a la cuádrica en el punto $[u]$ cuando $P(L)$ contiene a $[u]$ y $\phi|_{\{u\} \times L} = 0$.

Proposición 5.1.6. En $P(E)$ consideramos una cuádrica $C, [\phi]$ y un subespacio proyectivo $P(L)$. Designamos por ϕ_L la restricción de ϕ a $L \times L$. Entonces, $P(L)$ es tangente a la cuádrica si, y sólo si, la forma ϕ_L es degenerada (no regular).

Dem. Supongamos primero que ϕ_L es degenerada. Entonces, su núcleo contiene a un vector no nulo u . Es decir, $u \in L - \{0\}$ y $\phi_L(u, v) = 0$, para todo $v \in L$.

En particular, $\phi(u, u) = 0$.

Estas condiciones indican que $[u] \in C$, $[u] \in P(L)$ y $\phi|_{\{u\} \times L} = 0$, con lo que $P(L)$ es tangente a la cuádrica en el punto $[u]$.

Para el recíproco basta seguir en orden inverso el razonamiento anterior. \square

(A diferencia de la definición, para aplicar el resultado anterior no es necesario conocer de antemano el punto de tangencia)

Un resultado parecido es el siguiente.

Proposición 5.1.7. En $P(E)$ consideramos una cuádrica $C, [\phi]$ y un subespacio proyectivo $P(L)$. Designamos por ϕ_L la restricción de ϕ a $L \times L$. Entonces, $P(L)$ está contenido en C si, y sólo si, ϕ_L es la forma 0.

Dem. Sea $\kappa : E \rightarrow K$ la forma cuadrática correspondiente a ϕ . Recordamos que ϕ y κ se determinan mutuamente, mediante las relaciones

$$\kappa(u) = \phi(u, u) \text{ y } \phi(u, v) = \frac{1}{2}(\kappa(u+v) - \kappa(u) - \kappa(v))$$

La condición $P(L) \subset C$ significa que $\phi(u, u) = 0$, para todo $u \in L$. Y esto es lo mismo que $\kappa|_L = 0$ ó $\phi_L = 0$. \square

Corolario 5.1.8. Con las hipótesis anteriores, supongamos que la cuádrica es regular, $\dim P(E) = n$ y $P(L)$ está contenido en C . Entonces, $\dim P(L) \leq \frac{1}{2}(n-1)$.

Dem. Por la proposición, la forma $\phi|_{L \times L}$ es 0, por lo que $L \subset {}^\#L$. Esto proporciona la relación $\dim P(L) \leq \dim P({}^\#L) = n-1 - \dim P(L)$, lo que demuestra el resultado. \square

Definición 5.1.9 (Intersección de una cuádrica con un subespacio). Con las hipótesis de 1.7, supongamos $P(L)$ no contenido en C , es decir, $\phi_L \neq 0$. Entonces, $[\phi_L]$ es una cuádrica en el subespacio $P(L)$, cuya imagen es $C \cap P(L)$. (Como se comprueba de inmediato)

Decimos que $C \cap P(L), [\phi_L]$ es la cuádrica intersección de $C, [\phi]$ con el subespacio $P(L)$.

5.2. Polaridad asociada a una cuádrica

Definición 5.2.1. Dada una cuádrica regular $C, [\phi]$ en un espacio $P(E)$, llamamos polaridad asociada a la cuádrica a la correlación Φ de $P(E)$ en $P(E)$ definida por las formas de $[\phi]$.

Si M es un subespacio de $P(E)$, decimos que $\Phi(M)$ es el subespacio polar de M respecto a la polaridad Φ . (También llamado polo de M , cuando M es un hiperplano)

Observación. Si Φ es la polaridad asociada a una cuádrica, entonces Φ coincide con su inversa.

Esto confiere a Φ la propiedad de simetría siguiente:

Si $M_1 \subset \Phi(M_2)$, entonces $\Phi(M_1) \supset M_2$, para dos subespacios arbitrarios M_1 y M_2 .

Dem. Lo primero es consecuencia de las expresiones $\Phi(P(L)) = P({}^\#L)$ y $\Phi^{-1}(P(L)) = P(L^\#)$, puesto que las formas que intervienen son simétricas.

Así, $M_1 \subset \Phi(M_2)$ implica $\Phi(M_1) \supset \Phi(\Phi^{-1}(M_2))$, lo que prueba la propiedad de simetría deseada. \square

A continuación veremos algunas propiedades importantes de las cuádricas en las que interviene la polaridad.

Proposición 5.2.2. Supongamos que una cuádrica regular $C, [\phi]$ en un espacio $P(E)$ determina la polaridad Φ . Entonces, C está formado por los puntos α de $P(E)$ tales que $\alpha \in \Phi(\alpha)$. Además, si $\alpha \in C$, entonces el hiperplano tangente T_α coincide con $\Phi(\alpha)$.

Dem. Consideramos un punto cualquiera $\alpha = [u]$ de $P(E)$ y su hiperplano polar $\Phi(\alpha) = P(\{u\}^\#)$.

Es obvio que la condición $\alpha \in C$ equivale a cada una de las siguientes

$$\phi(u, u) = 0, u \in \{u\}^\#, [u] \in P(\{u\}^\#)$$

Luego $\alpha \in C$ si y sólo si $\alpha \in \Phi(\alpha)$.

Además, si $\alpha \in C$,

$$T_\alpha = \{[v] \in P(E) : \phi(u, v) = 0\} = \{[v] \in P(E) : v \in \{u\}^\#\} = P(\{u\}^\#)$$

Es decir, $T_\alpha = \Phi(\alpha)$. \square

La caracterización dada de los puntos de C se extiende a cualquier subespacio contenido en C .

Observación. Con los datos de la proposición anterior, sea $P(L)$ un subespacio de $P(E)$. Entonces, $P(L) \subset C$ si y sólo si $P(L) \subset \Phi(P(L))$.

Dem. En efecto, por 1.7, $P(L) \subset C$ si y sólo si $\phi_L = 0$. Y, por otro lado, las condiciones $\phi_L = 0$, $L \subset L^\#$ y $P(L) \subset \Phi(P(L))$ son equivalentes. \square

Observación. Con los datos de la proposición anterior, sea R un subespacio de $P(E)$. Entonces, R es tangente a la cuádrica en un punto α si y sólo si $\alpha \in R \cap \Phi(R)$.

Dem. En efecto, si $\alpha \in R \cap \Phi(R)$, entonces $\alpha \in R \subset \Phi(\alpha)$. Así, por la proposición anterior, $\alpha \in C$ y $\alpha \in R \subset T_\alpha$. Esto prueba que R es tangente a la cuádrica en el punto α . La demostración del recíproco es similar. \square

Ahora supondremos que no existe ningún punto en $R \cap \Phi(R)$; es decir, que los subespacios R y $\Phi(R)$ son suplementarios.

Proposición 5.2.3. Sean $C, [\phi]$ una cuádrica regular en un espacio $P(E)$ y R un subespacio proyectivo distinto de $P(E)$. Supongamos que R y $\Phi(R)$ son suplementarios y $C \cap \Phi(R)$ es no vacío. Entonces, para todo $\alpha \in C \cap \Phi(R)$, el subespacio $V_p(\alpha, R)$ es tangente a la cuádrica en el punto α . Además, existe una cuádrica $C^*, [\phi^*]$ cuya imagen es el conjunto $\bigcup_{\alpha \in C \cap \Phi(R)} V_p(\alpha, R)$.

En particular, el resultado permite determinar los hiperplanos de un haz que son tangentes a una cuádrica. Las figuras ilustran esto, en las dimensiones 2 y 3.

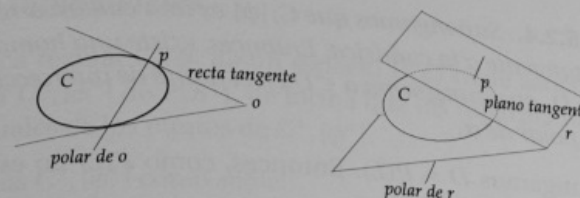


Figura 5.1: Hiperplanos de un haz tangentes a una cuádrica

Dem. En efecto, si $\alpha \in C \cap \Phi(R)$, entonces $R \subset \Phi(\alpha) = T_\alpha$, y, en consecuencia, $\alpha \in V_p(\alpha, R) \subset T_\alpha$, lo que demuestra la primera afirmación.

Como los subespacios R y $\Phi(R)$ son suplementarios por hipótesis, los subespacios vectoriales correspondientes N y $L = N^\#$ son también suplementarios. Además, por la misma hipótesis y la observación anterior, $\Phi(R)$ no es tangente a $C, [\phi]$, por lo que la forma ϕ_L es regular. (Prop. 1.6).

Estas condiciones permiten definir una forma bilineal simétrica no nula ϕ^* sobre E , mediante la expresión

$$\phi^*(u + v, u' + v') = \phi(u, u'), \text{ para todo } u, u' \in L, v, v' \in N$$

Veremos que la cuádrica $C^*, [\phi^*]$ cumple la condición del enunciado:

- Primero sea $\alpha \in C \cap \Phi(R)$, $\alpha = [u_0]$. Entonces,

$V_p(\alpha, R) = P(Ku_0 + N)$. Y, como $\phi^*(ku_0 + v, ku_0 + v) = k^2\phi(u_0, u_0) = 0$, para $v \in N$, se tiene $V_p(\alpha, R) \subset C^*$.

- Inversamente, sea $[w]$ un punto de C^* . Para este paso, podemos suponer $[w] \notin R$. Entonces, $0 = \phi^*(w, w) = \phi(u, u)$, donde $u \in L - \{0\}$ y $w - u = v \in N$. De esta forma, $\alpha = [u]$ pertenece a $C \cap \Phi(R)$ y $[w] \in P(Ku + N) = V_p(\alpha, R)$, lo que completa la demostración. \square

Observación. Las propiedades siguientes son fáciles de comprobar.

- R es el subespacio de los puntos singulares de $C^*, [\phi^*]$
- Las intersecciones de $C, [\phi]$ y $C^*, [\phi^*]$ con el subespacio $\Phi(R)$ determinan la misma cuádrica.

Otro resultado destacable es el siguiente.

Proposición 5.2.4. *Supongamos que $C, [\phi]$ es una cuádrica regular y D es una recta no tangente a la cuádrica. Entonces, existe una homografía involutiva $h : D \rightarrow D$, que transforma $\alpha \in D$ en el punto de intersección de D con el hiperplano polar de α .*

Dem. Supongamos $D = P(L)$. Entonces, como $P(L)$ no es tangente a $C, [\phi]$, la forma ϕ_L es regular.

Para todo $\alpha = [u]$ en D ,

$$D \cap \Phi(\alpha) = P(L \cap \{u\}^\#) = P(\{u\}_L^\#) \quad (1)$$

donde $\{u\}_L^\#$ es el subespacio ortogonal de $\{u\}$ con respecto a ϕ_L .

Así, como $\dim \{u\}_L^\# = \dim L - \dim(Ku) = 1$, resulta que $D \cap \Phi(\alpha)$ consta de un punto único. Por tanto, podemos definir una aplicación $h : D \rightarrow D$ como indica el enunciado.

Veamos que h es una homografía involutiva:

En efecto, por (1), la condición $h([u]) = [u']$ significa que $\phi_L(u, u') = 0$.

Esto muestra que h es una biyección involutiva. Además, $\phi_L(u, u') = 0$ se expresa en la forma

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{pmatrix} = 0$$

donde $(x_0 : x_1), (x'_0 : x'_1)$ son las coordenadas de $[u], [u']$ en la referencia elegida.

Entonces, se verifica

$$\begin{cases} \rho x'_0 = bx_0 + cx_1 \\ \rho x'_1 = -ax_0 - bx_1 \end{cases}$$

y, como estas ecuaciones definen h , resulta que h es una homografía. \square

Observaciones. Las condiciones $\alpha \in C \cap D$ y $\alpha \in D \cap \Phi(\alpha)$ son equivalentes, por lo que $C \cap D$ es el conjunto de los puntos fijos de h .

En particular, $C \cap D = \{a, b\}$, $a \neq b$, si y sólo si la matriz de h tiene dos valores propios distintos. En esta situación, si $p \in D$, $a \neq p \neq b$ y $D \cap \Phi(p) = \{p'\}$, entonces $[a, b, p, p'] = -1$.

(La demostración de esto es inmediata si se utilizan coordenadas. La referencia de D podría ser $\{a, p; p'\}$)

Cuádricas tangenciales

Toda cuádrica regular $C, [\phi]$ de un espacio $P(E)$ tiene asociada una cuádrica regular $C^*, [\phi^*]$ de $P(E^*)$, de forma que los hiperplanos tangentes a $C, [\phi]$ son duales de los puntos de $C^*, [\phi^*]$.

Definimos $C^*, [\phi^*]$ como sigue:

Como en la demostración de 4.3.5, sea $f : E \rightarrow E^*$ el isomorfismo vectorial tal que $f(v)(u) = \phi(u, v)$. Claramente, se tiene una forma bilineal simétrica regular ϕ^* sobre E^* tal que $\phi^*(f(u), f(v)) = \phi(u, v)$. Por tanto, está definida una cuádrica regular $C^*, [\phi^*]$ en el espacio $P(E^*)$.

Definición 5.2.5. *En la situación anterior, decimos que $C^*, [\phi^*]$ es la cuádrica tangencial correspondiente a $C, [\phi]$.*

La denominación dada a $C^*, [\phi^*]$ se justifica por la propiedad señalada al comienzo, que demostramos a continuación.

Proposición 5.2.6. *Con los mismos datos precedentes, se cumple que un hiperplano $P(H)$ de $P(E)$ es tangente a $C, [\phi]$ si, y sólo si, el punto dual de $P(H)$ pertenece a $C^*, [\phi^*]$.*

Dem. Sean $H^0 = Ku^*$ y $f^{-1}(u^*) = u$, con lo que ${}^\#H = f^{-1}(H^0) = Ku$.

Entonces, si $P(H)$ es tangente a $C, [\phi]$, el punto de tangencia es $[u]$, puesto que este punto es el polo de $P(H)$ en la polaridad asociada a $C, [\phi]$. Por tanto, como $\phi^*(u^*, u^*) = \phi(u, u) = 0$, el punto $[u^*]$, dual de $P(H)$, pertenece a $C^*, [\phi^*]$.

Recíprocamente, si $[u^*]$ pertenece a $C^*, [\phi^*]$, es $\phi(u, u) = \phi^*(u^*, u^*) = 0$, con lo que $P(H)$ es incidente con su punto polar $[u] \in C$. Por tanto, $P(H)$ es el hiperplano tangente a $C, [\phi]$ en el punto $[u]$. \square

En la proposición siguiente relacionamos las polaridades asociadas a una cuádrica regular y a la correspondiente cuádrica tangencial.

Proposición 5.2.7. *Sean $C, [\phi]$ y $C^*, [\phi^*]$ una cuádrica regular en un espacio $P(E)$ y la cuádrica tangencial asociada. Designamos por Φ y Φ^* las polaridades respectivas. Entonces, $\Delta \circ \Phi = \Phi^* \circ \Delta$. Es decir, si Φ transforma M_1 en M_2 , entonces Φ^* transforma $\Delta(M_1)$ en $\Delta(M_2)$.*

Dem. Sea $f: E \rightarrow E^*$ el isomorfismo considerado anteriormente. En la demostración de 4.3.5, vimos que ${}^{\#}L = {}^0f(L)$, para todo subespacio vectorial L de E . Análogamente, es fácil comprobar que ${}^{\#}W = f({}^0W)$, para todo subespacio vectorial W de E^* .

Estas igualdades indican que $\Phi = \Delta^{-1} \circ \Phi_{\tilde{f}}$ y $\Phi^* = \Phi_{\tilde{f}} \circ \Delta^{-1}$, respectivamente, y, por tanto, $\Delta \circ \Phi$ y $\Phi^* \circ \Delta$ son la misma colineación $\Phi_{\tilde{f}}$. \square

Observación. Puesto que Φ^* coincide con su inversa, tenemos las expresiones $\Phi = \Delta^{-1} \circ \Phi_{\tilde{f}}$, $\Phi^* = \Delta \circ \Phi_{\tilde{f}}^{-1}$. Esto muestra que una cuádrica y la cuádrica tangencial asociada están representadas en referencias duales por matrices inversas.

5.3. Ecuaciones canónicas y clasificación proyectiva

Ecuaciones canónicas

Sea $C, [\phi]$ una cuádrica en $P(E)$. Es conocido que existe una base \mathcal{B} de E tal que $M(\phi; \mathcal{B})$ es una matriz diagonal

$$\begin{pmatrix} a_0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & a_{r-1} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

donde r es el rango de ϕ . (Los elementos a_0, \dots, a_{r-1} son los únicos no nulos)

Por tanto, la ecuación de la cuádrica en la referencia asociada a \mathcal{B} es

$$a_0 x_0^2 + \dots + a_{r-1} x_{r-1}^2 = 0$$

Observación. Para espacios reales, podemos elegir la base anterior de modo que

$$a_0 = \dots = a_{p-1} = 1, \quad a_p = \dots = a_{r-1} = -1$$

donde p es la signatura de la forma real ϕ .

Por tanto, la cuádrica tiene una ecuación

$$x_0^2 + \dots + x_{p-1}^2 - \dots - x_{r-1}^2 = 0$$

Decimos que ésta es la ecuación canónica de la cuádrica.

Clasificación proyectiva

Definición 5.3.1 (Transformada de una cuádrica por una homografía). Sea $C, [\phi]$ una cuádrica en $P(E)$ y \tilde{h} una homografía de $P(E)$, inducida por un isomorfismo h . Claramente, se tiene una aplicación $\phi': E \times E \rightarrow K$ tal que $\phi'(h(u), h(v)) = \phi(u, v)$, y ϕ' es una forma bilineal simétrica no nula. Entonces, $[\phi']$ es una cuádrica en $P(E)$, cuya imagen es $\tilde{h}(C)$, como se comprueba de inmediato.

Decimos que esta cuádrica es la transformada de $C, [\phi]$ mediante la homografía \tilde{h} .

Proposición 5.3.2. Utilizando una referencia en $P(E)$, sean $C, [\phi]$ la cuádrica de ecuación $x^t A x = 0$ y $C', [\phi']$ su transformada por la homografía \tilde{h} . Entonces, $C', [\phi']$ está definida por la ecuación $x^t A' x = 0$, donde $A' = Q^t A Q$ y Q representa \tilde{h}^{-1} .

Dem. En efecto, como en la definición, podemos suponer

$$\phi'(u, u) = \phi(h^{-1}(u), h^{-1}(u))$$

Por la hipótesis, ϕ y h^{-1} están representadas por matrices proporcionales a A y Q , y así la igualdad anterior se expresa en la forma

$$\rho \phi'(u, u) = x^t Q^t A Q x$$

Por tanto, $\rho \phi'$ está definida por la matriz $A' = Q^t A Q$, lo que demuestra la proposición. \square

Definición 5.3.3. Decimos que una cuádrica $C, [\phi]$ es (proyectivamente) equivalente a otra $C', [\phi']$ en un espacio $P(E)$ cuando existe una homografía \tilde{h} del espacio en sí mismo que transforma $C, [\phi]$ en $C', [\phi']$.

Es decir, $C, [\phi]$ es equivalente a $C', [\phi']$ en $P(E)$ cuando se tiene un isomorfismo vectorial h de E y un escalar ρ tales que $\phi(u, v) = \rho \phi'(h(u), h(v))$, para todo $u, v \in E$.

Observación. La definición relaciona la equivalencia de cuádricas con la equivalencia de formas bilineales simétricas, del modo siguiente:

$C, [\phi]$ es equivalente a $C', [\phi']$ cuando una forma de la colección $[\phi]$ es equivalente a una forma de la colección $[\phi']$.

(En efecto, la condición del apartado segundo de 3.3 significa que la forma ϕ es equivalente a $\rho\phi'$)

Es fácil comprobar que lo expuesto desde el comienzo de este apartado no presenta ninguna ambigüedad, y la equivalencia de cuádricas es una relación de equivalencia en el sentido usual. Las clases de equivalencia correspondientes se pueden caracterizar fácilmente para los espacios reales o complejos, como sucede para las clases de equivalencia de formas bilineales simétricas.

Teorema 5.3.4 (Clasificación de las cuádricas proyectivas reales). *Supongamos que $C, [\phi]$ y $C', [\phi']$ son cuádricas de un espacio proyectivo real, y las formas ϕ y ϕ' tienen rangos r y r' y firmas p y p' , respectivamente. Entonces, las cuádricas son equivalentes si y sólo si $r = r'$ y $p = p'$, o bien, $r = r'$ y $p = r' - p'$.*

Dem. En la clase $[\phi]$, las formas $\rho\phi$ con $\rho > 0$ tienen rango r y firma p . Las restantes, tienen rango r y firma $r - p$. Y análogamente para la clase $[\phi']$. Recordamos ahora que dos formas bilineales simétricas reales son equivalentes si y sólo si tienen el mismo rango y la misma firma.

Teniendo esto en cuenta, el resultado es inmediato. \square

Definición y observación. Si $\psi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ es una forma bilineal simétrica de rango r y firma p , llamamos firma proyectiva de ψ al número $s = |p - (r - p)|$.

Utilizando este concepto, la conclusión del teorema se puede enunciar así:

$C, [\phi]$ es equivalente a $C', [\phi']$ si y sólo si ϕ y ϕ' tienen el mismo rango y la misma firma proyectiva.

Como aplicación de los resultados precedentes establecemos a continuación las clasificaciones de las cuádricas reales en los espacios de dimensiones 2 y 3.

Clasificación de las cónicas proyectivas reales. Existen cinco clases o tipos distintos, que figuran a continuación con sus ecuaciones canónicas.

$$\begin{aligned} r = 3, s = 3: & \quad x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0. & \text{Cónica vacía} \\ r = 3, s = 1: & \quad x_0^2 \pm x_1^2 - x_2^2 = 0. & \text{Cónica regular no vacía} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r = 2, s = 2: & \quad x_0^2 + x_1^2 = 0. & \text{Punto doble} \\ r = 2, s = 0: & \quad x_0^2 - x_1^2 = 0. & \text{Par de rectas} \\ r = 1, s = 1: & \quad x_0^2 = 0. & \text{Recta doble} \end{aligned}$$

Clasificación de las cuádricas proyectivas reales en dimensión 3. La lista siguiente reúne los ocho tipos distintos, con sus ecuaciones canónicas.

$$\begin{aligned} r = 4, s = 4: & \quad x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0. & \text{Vacía} \\ r = 4, s = 2: & \quad x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0. & \text{Cuádrica elíptica} \\ r = 4, s = 0: & \quad x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0. & \text{Cuádrica hiperbólica} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r = 3, s = 3: & \quad x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0. & \text{Punto doble} \\ r = 3, s = 1: & \quad x_0^2 \pm x_1^2 - x_2^2 = 0. & \text{Cono} \\ r = 2, s = 2: & \quad x_0^2 + x_1^2 = 0. & \text{Recta doble} \\ r = 2, s = 0: & \quad x_0^2 - x_1^2 = 0. & \text{Par de planos} \\ r = 1, s = 1: & \quad x_0^2 = 0. & \text{Plano doble} \end{aligned}$$

Observación. Utilizando las ecuaciones canónicas precedentes, podemos determinar los puntos singulares de estas cuádricas:

- Si la imagen de la cuádrica es un subespacio, los puntos singulares son los elementos del conjunto imagen.
- Si la cuádrica es un par de planos, los puntos singulares son los de la recta común a ambos planos.
- Un cono tiene un solo punto singular, llamado vértice del cono. Las rectas que unen el punto singular con cualquier otro punto del cono están contenidas en la cuádrica, y no es difícil comprobar que son las únicas con esta propiedad. (Llamadas generatrices del cono)

5.4. Relación con las cuádricas afines

El enfoque de esta sección supone un estudio de las cuádricas afines sin recursos de carácter proyectivo. Sin embargo, este estudio no resulta muy habitual, y por su excesiva extensión tampoco parece adecuado insertarlo aquí. Por tanto, mencionaremos solamente aspectos parciales del mismo, dejando para el Apéndice B el tratamiento más conceptual y autocontenido.

Concepto de cuádrica afín

La noción de cuádrica afín se basa en la de forma biafín simétrica propia. Estas formas definen las cuádricas afines del mismo modo que las formas bilineales simétricas no nulas definen las cuádricas proyectivas.

Una forma bilineal $\phi : E \times E \rightarrow K$ tiene una expresión del tipo

$$\phi(u, v) = (x_0 \dots x_n) M(\phi; \mathcal{B})(y_0 \dots y_n)^t \quad (1)$$

donde $(x_0, \dots, x_n), (y_0, \dots, y_n)$ son las coordenadas de u, v en la base \mathcal{B} .

De modo similar, una forma biafín sobre un espacio afín X es una aplicación $\varphi : X \times X \rightarrow K$, definida por una expresión

$$\varphi(p, q) = (1 \ x_1 \dots x_n) A (1 \ y_1 \dots y_n)^t \quad (2)$$

donde $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)$ son las coordenadas de los puntos p, q en una referencia cartesiana \mathcal{E} y $A = ((a_{ij}))_{0 \leq i, j \leq n}$ es una matriz de escalares. Podemos denotar A por $M(\varphi; \mathcal{E})$.

La forma biafín es simétrica cuando $M(\varphi; \mathcal{E})$ es una matriz simétrica.

(Las definiciones y justificaciones oportunas figuran en el Apéndice B)

Si φ es una forma biafín simétrica y p es igual a q , el segundo miembro de (2) es el polinomio simétrico

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{1 \leq j \leq n} a_{0j} x_j + a_{00}$$

Por tanto, para que este polinomio sea de grado 2, la submatriz $A_{00} = ((a_{ij}))_{1 \leq i, j \leq n}$ de la matriz A debe ser distinta de 0. Cuando esta condición se cumple, decimos que la forma considerada es propia.

Definición 5.4.1. Una cuádrica $C, [\varphi]$ en un espacio afín X es la colección, denotada por $[\varphi]$, de las formas no nulas proporcionales a una forma biafín simétrica propia $\varphi : X \times X \rightarrow K$. Llamamos imagen de la cuádrica al conjunto $C = \{p \in X : \varphi(p, p) = 0\}$.

La cuádrica es regular cuando φ tiene una matriz regular.

Las nociones de punto regular e hiperplano tangente de una cuádrica afín son análogas a las correspondientes para las cuádricas proyectivas.

Definición 5.4.2. Sean $C, [\varphi]$ una cuádrica en un espacio afín X y p_1 un punto de C . Decimos que p_1 es un punto regular de $C, [\varphi]$ cuando la forma afín $\varphi(p_1, -)$ es no constante. Cuando $\varphi(p_1, -)$ es constante, decimos que p_1 es un punto singular.

Si p_1 es un punto regular, llamamos hiperplano tangente a la cuádrica en el punto p_1 al hiperplano afín $T_{p_1} = \{p \in X : \varphi(p_1, p) = 0\}$.

Cuádricas proyectivas asociadas a una cuádrica afín

La relación entre las cuádricas afines y proyectivas se basa en la relación de las formas biafines con las formas bilineales.

Sea $\varphi : X \times X \rightarrow K$ una forma biafín (simétrica) tal que

$$M(\varphi; \mathcal{E}) = A = ((a_{ij}))_{0 \leq i, j \leq n}$$

donde $\mathcal{E} = \{p_0, u_1, \dots, u_n\}$ es una referencia cartesiana.

Entonces, φ tiene asociadas las formas bilineales (simétricas) $\hat{\varphi} : \hat{X} \times \hat{X} \rightarrow K$ y $\bar{\varphi} : \bar{X} \times \bar{X} \rightarrow K$, tales que

$$M(\hat{\varphi}; \mathcal{E}) = A = ((a_{ij}))_{0 \leq i, j \leq n}, M(\bar{\varphi}; \mathcal{B}) = A_{00} = ((a_{ij}))_{1 \leq i, j \leq n} \quad (3)$$

considerando en \hat{X} y \bar{X} las bases \mathcal{E} y $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$, respectivamente.

Teniendo en cuenta la proposición 2.3.2 y las expresiones (1) y (2) del apartado anterior, es evidente que

$$\hat{\varphi}|(X \times X) = \varphi \text{ y } \hat{\varphi}|(\bar{X} \times \bar{X}) = \bar{\varphi} \quad (4)$$

Observación. Dado que \hat{X} está engendrado vectorialmente por X , el carácter bilineal de $\hat{\varphi}$ asegura que esta forma queda determinada por los valores de su restricción a $X \times X$. Es decir, $\hat{\varphi}$ está determinada de manera única por la forma biafin φ . Y lo mismo sucede para $\bar{\varphi}$, por la segunda igualdad de (4).

Ahora trasladaremos estas observaciones a las cuádricas.

Definición 5.4.3. Toda cuádrica $C, [\varphi]$ de un espacio afín X tiene asociadas las cuádricas proyectivas $\tilde{C}, [\hat{\varphi}]$ y $C_\infty, [\bar{\varphi}]$, de \tilde{X} y X_∞ , respectivamente, donde $\hat{\varphi}$ y $\bar{\varphi}$ son las únicas formas bilineales simétricas que cumplen las condiciones de (4).

Decimos que $\tilde{C}, [\hat{\varphi}]$ y $C_\infty, [\bar{\varphi}]$ son la completación proyectiva y la cuádrica del infinito de la cuádrica afín $C, [\varphi]$.

Observación. Por la primera igualdad de (4), $\tilde{C} \cap X = C$.

Por la definición 1.9, la segunda igualdad de (4) muestra que $C_\infty, [\bar{\varphi}]$ es la cuádrica intersección de $\tilde{C}, [\hat{\varphi}]$ con el hiperplano X_∞ . En particular, $\tilde{C} \cap X_\infty = C_\infty$.

Así vemos que $\tilde{C} = C \cup C_\infty$.

Observación. La cuádrica afín es regular si, y sólo si, su completación proyectiva es regular. (Puesto que las formas φ y $\hat{\varphi}$ tienen la misma matriz)

Proposición 5.4.4. Asignando a toda cuádrica afín su completación proyectiva, se obtiene una biyección entre las cuádricas afines de un espacio X y las proyectivas de \tilde{X} cuyas imágenes no contienen al hiperplano X_∞ .

Dem. Por la proposición 1.7, si $C^*, [\phi]$ es una cuádrica en \tilde{X} , entonces

$$C^* \not\supseteq X_\infty \text{ equivale a } \phi|(\tilde{X} \times \tilde{X}) \neq 0 \quad (5)$$

Ahora, para una cuádrica $C, [\varphi]$ en X , es $\bar{\varphi} \neq 0$ (porque φ es propia) y $\hat{\varphi}|(\tilde{X} \times \tilde{X}) = \bar{\varphi}$; y así la completación proyectiva de $C, [\varphi]$ cumple las condiciones de (5).

Recíprocamente, sea $C^*, [\phi]$ una cuádrica en \tilde{X} que cumple las condiciones de (5).

Sea φ la forma biafin simétrica sobre X cuya matriz coincide con la de ϕ . Entonces:

- $\hat{\varphi} = \phi$, puesto que ambas formas tienen la misma matriz
- φ es propia (es decir, $\bar{\varphi} \neq 0$), por la hipótesis y las condiciones $\bar{\varphi} = \hat{\varphi}|(\tilde{X} \times \tilde{X}) = \phi|(\tilde{X} \times \tilde{X})$.

Por tanto, $C, [\varphi]$ es una cuádrica en X cuya completación es la cuádrica de partida $C^*, [\phi]$.

Esto termina la demostración, puesto que la correspondencia considerada es claramente inyectiva. \square

Proposición 5.4.5 (Compatibilidad de los hiperplanos tangentes). Sean $C, [\varphi]$ una cuádrica en un espacio afín X y p_1 un punto de C . Entonces, p_1 es un punto regular de $C, [\varphi]$ si, y sólo si, es un punto regular de $\tilde{C}, [\hat{\varphi}]$. Además, si p_1 es un punto regular, el hiperplano $T_{p_1}(\tilde{C})$ es la completación proyectiva del hiperplano $T_{p_1}(C)$.

Dem. En efecto, para todo $u \in \tilde{X}$ y todo $\mu \in K$:

- $\varphi(p_1, p_1 + u) = \varphi(p_1, p_1) + \hat{\varphi}(p_1, u) = \hat{\varphi}(p_1, u)$,
- $\hat{\varphi}(p_1, \mu p_1 + u) = \mu \varphi(p_1, p_1) + \hat{\varphi}(p_1, u) = \hat{\varphi}(p_1, u)$.

Por tanto, $\varphi(p_1, -)$ es no constante (distinta de 0) si y sólo si $\hat{\varphi}(p_1, -) \neq 0$, lo que prueba la primera afirmación. Además, por las expresiones anteriores tenemos $\varphi(p_1, -)^{-1}(0) = p_1 + L$ y $\ker \hat{\varphi}(p_1, -) = Kp_1 \oplus L$, donde L designa el núcleo de la forma $\hat{\varphi}(p_1, -)|\tilde{X}$. De este modo, las completaciones vectorial y proyectiva de $\varphi(p_1, -)^{-1}(0) = T_{p_1}(C)$ son los hiperplanos $\ker \hat{\varphi}(p_1, -)$ y $P(\ker \hat{\varphi}(p_1, -)) = T_{p_1}(\tilde{C})$, respectivamente, como se trataba de probar. \square

Para las cuádricas afines se pueden definir ciertas nociones importantes, inexistentes en geometría proyectiva. Entre ellas destaca la noción de centro, que interviene en la determinación de la ecuación canónica y la clasificación de la cuádrica afín.

Definición 5.4.6. Sea $C, [\varphi]$ una cuádrica en un espacio afín X . Decimos que un punto $p_0 \in X$ es centro de la cuádrica cuando $\varphi(p_0 + u, p_0 + u) = \varphi(p_0 - u, p_0 - u)$, para todo $u \in \tilde{X}$.

La definición asegura que todo centro p_0 de $C, [\varphi]$ es centro de simetría de C . Pues la simetría respecto de p_0 transforma $p_0 + u$ en $p_0 - u$, y las condiciones $p_0 + u \in C$ y $p_0 - u \in C$ son equivalentes.

Observación. Sea $\tilde{C}, [\hat{\varphi}]$ la completación proyectiva de $C, [\varphi]$. Para todo $u \in \tilde{X}$:

$$\begin{aligned} - \varphi(p_0 + u, p_0 + u) &= \varphi(p_0, p_0) + 2\hat{\varphi}(p_0, u) + \hat{\varphi}(u, u), \\ - \varphi(p_0 - u, p_0 - u) &= \varphi(p_0, p_0) - 2\hat{\varphi}(p_0, u) + \hat{\varphi}(u, u). \end{aligned}$$

Por tanto, p_0 es centro de $C, [\varphi]$ si y sólo si $\hat{\varphi}(p_0, u) = 0$, para todo $u \in \tilde{X}$.

Corolario 5.4.7 (Interpretación proyectiva del centro). Sea $C, [\varphi]$ una cuádrica regular en un espacio afín X . Entonces, un punto $p_0 \in X$ es centro de $C, [\varphi]$ si y sólo si p_0 es el polo del hiperplano del infinito, en la polaridad correspondiente a $\tilde{C}, [\hat{\varphi}]$.

Dem. En efecto, recordamos que, si Φ designa la polaridad mencionada, entonces $\Phi(X_\infty) = P(\# \tilde{X})$, donde $\# \tilde{X}$ es el subespacio ortogonal de \tilde{X} respecto de $\hat{\varphi}$. Ahora, por la observación previa, p_0 es centro de $C, [\varphi]$ si y sólo si $p_0 \in \# \tilde{X}$. Esto es lo mismo que $[p_0] \in P(\# \tilde{X}) = \Phi(X_\infty)$, con lo que queda demostrado. \square

Ecuaciones canónicas y clasificación afín. Conclusión

Los resultados siguientes son similares a los referentes a las cuádricas proyectivas en la sección anterior. Las demostraciones figuran en el Apéndice B.

Teorema 5.4.8 (Ecuaciones canónicas de las cuádricas afines). Sea $C, [\varphi]$ una cuádrica de un espacio afín real n -dimensional X .

Si p_0 es centro de $C, [\varphi]$, entonces, en alguna referencia cartesiana de origen p_0 , la cuádrica tiene una ecuación canónica

$$x_1^2 + \dots + x_p^2 - \dots - x_r^2 + \varepsilon = 0$$

En esta ecuación, r y p son el rango y la signatura de la forma $\bar{\varphi}$ y ε es $-1, 0$ ó 1 , según que $\varphi(p_0, p_0)$ sea negativo, cero o positivo, respectivamente.

Si $C, [\varphi]$ carece de centros, entonces, en alguna referencia cuyo origen es un punto de C , la cuádrica tiene una ecuación canónica

$$x_1^2 + \dots + x_p^2 - \dots - x_r^2 + 2x_n = 0$$

donde ahora $r < n$.

Definición 5.4.9 (Transformada de una cuádrica por una afinidad). Sean $C, [\varphi]$ una cuádrica en un espacio afín X y $h: X \rightarrow X$ un isomorfismo afín. Claramente, se tiene una aplicación $\varphi': X \times X \rightarrow K$ tal que $\varphi'(h(p), h(q)) = \varphi(p, q)$, y φ' es una forma biforme simétrica propia. Entonces, $[\varphi']$ es una cuádrica en X , cuya imagen es $h(C)$, como se comprueba de inmediato. Decimos que esta cuádrica es la transformada de $C, [\varphi]$ mediante la afinidad h .

Definición 5.4.10. Decimos que una cuádrica $C, [\varphi]$ es (afinmente) equivalente a otra $C', [\varphi']$ en un espacio X cuando existe un isomorfismo afín del espacio en sí mismo que transforma $C, [\varphi]$ en $C', [\varphi']$.

Es fácil comprobar que la equivalencia de cuádricas afines es una relación de equivalencia en el sentido usual. Para los espacios afines reales, las clases de equivalencia se pueden caracterizar como se establece a continuación.

Teorema 5.4.11 (Clasificación de las cuádricas afines reales). Sean $C, [\varphi]$ y $C', [\varphi']$ cuádricas de un espacio afín real, tales que las formas $\bar{\varphi}$ y $\bar{\varphi}'$ tienen rangos r y r' y signaturas p y p' . Entonces, las cuádricas son equivalentes en los casos siguientes:

- Si $r = r'$, $p = p'$ y $\varphi(p_0, p_0)$ tiene el mismo signo que $\varphi'(p'_0, p'_0)$, donde p_0 y p'_0 son centros de $C, [\varphi]$ y $C', [\varphi']$.
- Si $r = r'$, $p = r' - p'$ y $\varphi(p_0, p_0)$ y $\varphi'(p'_0, p'_0)$ tienen signos opuestos.
- Si $r = r'$, $p = p'$, o bien, $r = r'$, $p = r' - p'$, y las cuádricas carecen de centros.

En particular, los resultados de este apartado establecen las clasificaciones afines de las cónicas y las superficies cuádricas, que figuran en las dos páginas siguientes.

CLASIFICACIÓN DE LAS CÓNICAS AFINES REALES

CÓNICAS CON CENTROS

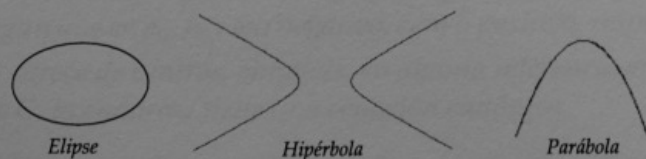
$r = 2, p = 0, 2:$	$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$	<i>Elipse</i>
	$x_1^2 + x_2^2 = 0$	<i>Punto doble</i>
	$x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$	<i>Vacía</i>
$r = 2, p = 1:$	$x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0$	<i>Hipérbola</i>
	$x_1^2 - x_2^2 = 0$	<i>Par de rectas incidentes</i>
$r = 1, p = 0, 1:$	$x_1^2 - 1 = 0$	<i>Par de rectas paralelas</i>
	$x_1^2 = 0$	<i>Recta doble</i>
	$x_1^2 + 1 = 0$	<i>Vacía</i>

CÓNICAS SIN CENTROS

$r = 1, p = 0, 1:$	$x_1^2 + 2x_2 = 0$	<i>Parábola</i>
--------------------	--------------------	-----------------

Las imágenes de las cónicas regulares no vacías (elipse, hipérbola y parábola) se muestran en la figura siguiente.

Figura 5.2: Imágenes de las cónicas regulares no vacías



CLASIFICACIÓN AFÍN REAL EN DIMENSIÓN 3

CUÁDRICAS CON CENTROS

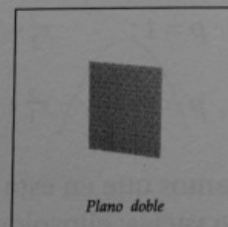
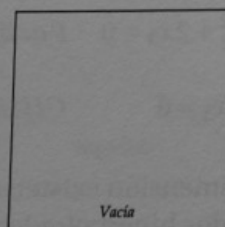
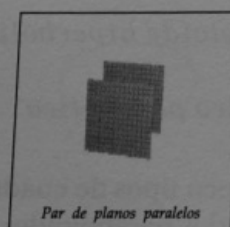
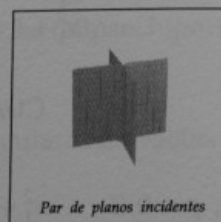
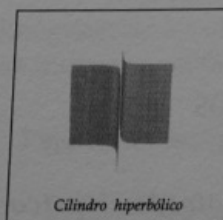
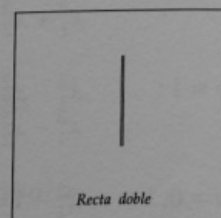
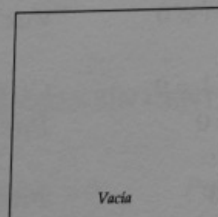
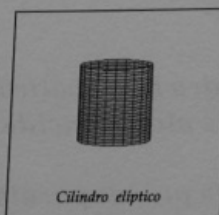
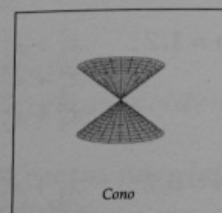
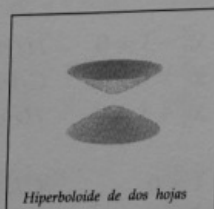
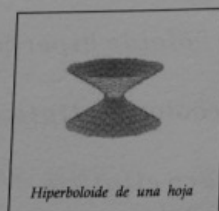
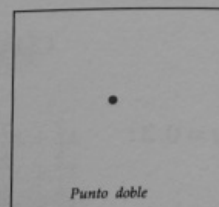
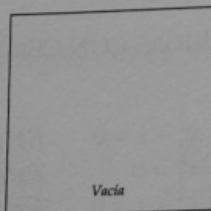
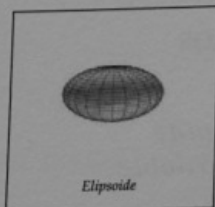
$r = 3, p = 0, 3:$	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$	<i>Elipsoide</i>
	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$	<i>Punto doble</i>
	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1 = 0$	<i>Vacía</i>
$r = 3, p = 1, 2:$	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0$	<i>Hiperboloide hiperbólico</i>
	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$	<i>Cono</i>
	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 1 = 0$	<i>Hiperboloide elíptico</i>
$r = 2, p = 0, 2:$	$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$	<i>Cilindro elíptico</i>
	$x_1^2 + x_2^2 = 0$	<i>Recta doble</i>
	$x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$	<i>Vacía</i>
$r = 2, p = 1:$	$x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0$	<i>Cilindro hiperbólico</i>
	$x_1^2 - x_2^2 = 0$	<i>Par de planos incidentes</i>
$r = 1, p = 0, 1:$	$x_1^2 - 1 = 0$	<i>Par de planos paralelos</i>
	$x_1^2 = 0$	<i>Plano doble</i>
	$x_1^2 + 1 = 0$	<i>Vacía</i>

CUÁDRICAS SIN CENTROS

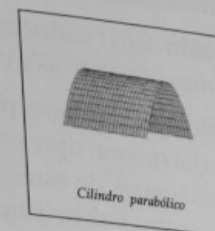
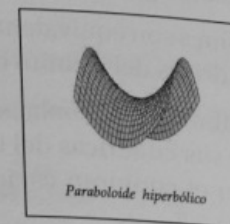
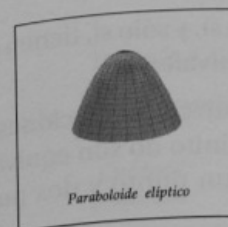
$r = 2, p = 0, 2:$	$x_1^2 + x_2^2 + 2x_3 = 0$	<i>Paraboloide elíptico</i>
$r = 2, p = 1:$	$x_1^2 - x_2^2 + 2x_3 = 0$	<i>Paraboloide hiperbólico</i>
$r = 1, p = 0, 1:$	$x_1^2 + 2x_3 = 0$	<i>Cilindro parabólico</i>

Señalamos que en esta dimensión existen cinco tipos de cuádricas regulares no vacías: elipsoide, dos hiperboloides y dos paraboloides.

Cuádricas reales con centros



Cuádricas reales sin centros

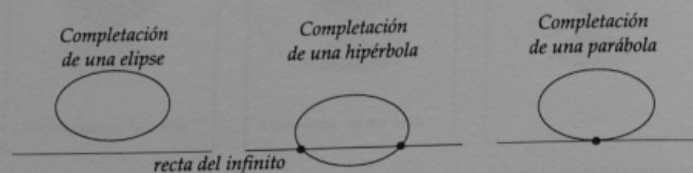


Finalmente, utilizando los teoremas de clasificación 3.4 y 4.11 no resulta difícil establecer la conclusión siguiente.

Conclusión. Dos cuádricas afines son equivalentes si, y sólo si, tienen completaciones proyectivas y cuádricas del infinito equivalentes.

Por ejemplo, la elipse, parábola e hipérbola tienen completaciones proyectivas del mismo tipo, pero sus cuádricas del infinito no son equivalentes: las imágenes de éstas son el conjunto vacío, un punto y dos puntos distintos, como indica la figura 5.3.

Figura 5.3: Completaciones proyectivas de cónicas regulares



Análogamente, para las superficies cuádricas, la conclusión anterior se refleja detalladamente en las tablas que figuran a continuación.

Tabla 1. Cuádricas afines y proyectivas regulares

Cuádrlica proyectiva	Plano del infinito	Cuádrlica afin	Cónica del infinito
Cuádrlica vacía		Vacía	Vacía
Cuádrlica elíptica	No corta	Elipsoide	Vacía
	Tangente	Paraboloide elíptico	Punto doble
	Transversal	Hiperboloide elíptico	Cónica regular no vacía
Cuádrlica hiperbólica	Tangente	Paraboloide hiperbólico	Par de rectas
	Transversal	Hiperboloide hiperbólico	Cónica regular no vacía

Tabla 2. Cuádricas afines y proyectivas singulares
S es el subespacio singular de la cuádrlica proyectiva (pág. 79)

Cuádrlica proyectiva	Plano del infinito	Cuádrlica afin	Cónica del infinito
Punto doble	No contiene a S	Punto doble	Vacía
	Contiene a S	Vacía	Punto doble
Cono	No contiene a S	Cono	Cónica regular no vacía
	Corta en S	Cilindro elíptico	Punto doble
	Corta en una recta	Cilindro parabólico	Recta doble
	Corta en dos rectas	Cilindro hiperbólico	Par de rectas
Recta doble	No contiene a S	Recta doble	Punto doble
	Contiene a S	Vacía	Recta doble
Par de planos	No contiene a S	Par de planos incidentes	Par de rectas
	Corta en S	Par de planos paralelos	Recta doble
Plano doble	Distinto de S	Plano doble	Recta doble

Capítulo 6

Complementos y haces de cónicas

6.1. Algunas propiedades de las cónicas proyectivas

Ecuaciones reducidas

Sabemos que una cónica proyectiva $C, [\phi]$ tiene una *ecuación reducida* del tipo

$$a_{00}x_0^2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 = 0 \quad (1)$$

en una referencia adecuada.

Obviamente, las referencias que determinan ecuaciones de este tipo son las asociadas a las bases $\mathcal{B} = \{u_0, u_1, u_2\}$ tales que

$$\phi(u_0, u_1) = 0, \phi(u_0, u_2) = 0, \phi(u_1, u_2) = 0 \quad (2)$$

Cuando la cónica es regular, estas condiciones se pueden expresar de manera más geométrica, en términos de la polaridad asociada a la cónica. En efecto, supongamos que $C, [\phi]$ es una cónica regular, y sea Φ la polaridad asociada.

Entonces, las condiciones (2) equivalen a las igualdades vectoriales

$$\{u_i\}^\# = V_l(u_j, u_k), i \neq j \neq k \neq i$$

que corresponden en el plano proyectivo a $\Phi([u_i]) = V_p([u_j], [u_k])$, para $i \neq j \neq k \neq i$.

Así vemos que la ecuación de la cónica en una referencia $\mathcal{P} = \{a, b, c; d\}$ es del tipo precedente (1) si, y sólo si, cada uno de los puntos a, b, c es el polo de la recta determinada por los otros dos. Esta condición se expresa diciendo que el triángulo de vértices a, b, c es autopolar.

Un triángulo autopolar respecto de una cónica se puede obtener mediante la construcción que sigue. (El concepto de cuadrivértice que interviene en esta construcción fue definido en el problema 32)

Proposición 6.1.1. Sea $C, [\phi]$ una cónica regular no vacía, y supongamos que los vértices a, b, c, d de un cuadrivértice son puntos de C . Entonces, los puntos diagonales del cuadrivértice forman un triángulo autopolar.

Dem. Sean m, n, o los puntos diagonales del cuadrivértice (como muestra la figura) y p y q los puntos de las intersecciones de $V_p(a, b)$ y $V_p(c, d)$ con la recta $V_p(n, o)$.

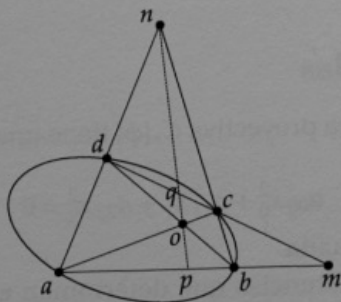


Figura 6.1: El triángulo de vértices m, n, o es autopolar

Por la construcción armónica de la sección 3.2, sabemos que $[a, b, m, p] = -1$. Por tanto, por la observación que sigue a la proposición 5.2.4, la recta polar $\Phi(m)$ pasa por el punto p . Del mismo modo, es $[c, d, m, q] = -1$, con lo que $\Phi(m)$ pasa también por el punto q . Por tanto, $\Phi(m)$ es la recta determinada por p y q , es decir, $V_p(n, o)$.

Por simetría, se tiene asimismo que $\Phi(n)$ y $\Phi(o)$ son las rectas $V_p(m, o)$ y $V_p(m, n)$, respectivamente, lo que demuestra la proposición. \square

Otro tipo de ecuación reducida de interés se obtiene cuando los tres primeros puntos de la referencia elegida son puntos de la cónica.

Para una cónica $C, [\phi]$, estas referencias son las asociadas a las bases $\mathcal{B} = \{u_0, u_1, u_2\}$ tales que

$$\phi(u_0, u_0) = 0, \phi(u_1, u_1) = 0, \phi(u_2, u_2) = 0$$

Por tanto, las ecuaciones reducidas que resultan son del tipo

$$a_{01}x_0x_1 + a_{02}x_0x_2 + a_{12}x_1x_2 = 0 \quad (3)$$

Utilizaremos estas ecuaciones para establecer el resultado siguiente.

Proposición 6.1.2. Consideramos cinco puntos distintos de un plano proyectivo de los cuales no existen cuatro alineados. Entonces, todos ellos están contenidos en una única cónica.

Dem. Por la hipótesis, cuatro de los puntos dados forman una referencia proyectiva. Utilizando esta referencia \mathcal{P} , supongamos que las coordenadas del punto restante son $(e_0 : e_1 : e_2)$.

Claramente, todas las cónicas representadas por ecuaciones del tipo (3) contienen a los tres primeros puntos de \mathcal{P} . Por tanto, las que contienen a todos los puntos dados son las que verifican las condiciones

$$\begin{aligned} 0 &= a_{01} + a_{02} + a_{12} \\ 0 &= a_{01}e_0e_1 + a_{02}e_0e_2 + a_{12}e_1e_2 \end{aligned} \quad (4)$$

Ahora distinguiremos dos casos:

1°. Las coordenadas $(e_0 : e_1 : e_2)$ son todas distintas y no nulas.

Entonces, las condiciones (4) establecen que la terna (a_{01}, a_{02}, a_{12}) es proporcional a $((e_0 - e_1)e_2, (e_2 - e_0)e_1, (e_1 - e_2)e_0)$.

Por tanto, el resultado se cumple en este caso.

2°. Dos de las coordenadas $(e_0 : e_1 : e_2)$ son iguales o alguna es 0.

Como a lo sumo puede haber una coordenada nula, podemos suponer $e_0 = 0$ ó $e_1 = e_2$.

En este caso, las condiciones (4) determinan una única cónica cuya ecuación es $x_0x_1 - x_0x_2 = 0$.

La proposición queda demostrada. \square

Por último, presentaremos otro tipo de ecuación reducida para una cónica regular no vacía.

Las referencias en las que se obtienen estas ecuaciones están formadas por el punto unidad, los puntos de tangencia de dos rectas diferentes y el punto común de dichas rectas. Por ejemplo, supongamos que a_0 y a_2 son los puntos de tangencia de dos rectas que se cortan en a_1 , y sean a_0, a_1, a_2 los tres primeros puntos de una referencia \mathcal{P} .

De esta forma, sabemos que $V_p(a_0, a_2)$ es la recta polar $\Phi(a_1)$, respecto de la cónica considerada $C, [\phi]$. Por tanto, \mathcal{P} está asociada a una base $\mathcal{B} = \{u_0, u_1, u_2\}$ tal que

$$\phi(u_0, u_0) = 0, \phi(u_0, u_1) = 0, \phi(u_1, u_2) = 0, \phi(u_2, u_2) = 0$$

(Ya que las condiciones $\Phi(a_1) = V_p(a_0, a_2)$ y $\{u_1\}^\# = V_l(u_0, u_2)$ son equivalentes)

Por tanto, la ecuación de la cónica se reduce a

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{02}x_0x_2 = 0$$

En particular, si elegimos un punto de la cónica como punto unidad de \mathcal{P} , la ecuación adopta la expresión canónica

$$x_1^2 - x_0x_2 = 0 \quad (5)$$

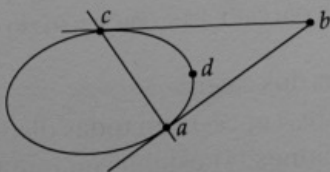


Figura 6.2: Referencia que determina la ecuación (5)

En el apartado siguiente utilizaremos estas ecuaciones.

Teoremas de Chasles y Steiner

Estos teoremas son importantes, porque permiten caracterizar geométricamente las cónicas regulares no vacías. La caracterización se efectúa en

términos de homografías entre haces de rectas, como exponemos a continuación.

Dado un punto a de un plano proyectivo, designamos por \mathcal{F}_a el haz de rectas de base $\{a\}$. Como hemos visto en la observación anterior a 3.3.2, podemos efectuar la identificación

$$\Delta(a) \equiv \mathcal{F}_a$$

en la que a un punto $\eta \in \Delta(a)$ le corresponde la recta $\Delta^{-1}(\eta)$ de \mathcal{F}_a . Esta identificación permite trasladar a los haces de rectas las nociones definidas para las rectas proyectivas.

En particular, decir que una aplicación $F: \mathcal{F}_a \rightarrow \mathcal{F}_c$ es una homografía entre haces significa que la aplicación correspondiente F' de $\Delta(a)$ en $\Delta(c)$, $F': \Delta(r) \mapsto \Delta(F(r))$, es una homografía entre estas rectas.

Además, por la definición de la razón doble de hiperplanos, la identificación $\Delta(a) \equiv \mathcal{F}_a$ conserva las razones dobles. Por tanto, la caracterización de las homografías entre rectas dada en la proposición 3.2.3 se traslada a las homografías entre haces: *las homografías entre haces de rectas son las aplicaciones biyectivas que conservan la razón doble.*

Teorema 6.1.3. *Supongamos que $C, [\phi]$ es una cónica regular y a, c son puntos distintos de C . Entonces, existe una homografía $F: \mathcal{F}_a \rightarrow \mathcal{F}_c$ tal que $F(V_p(a, c))$ es la recta tangente T_c y C es el conjunto*

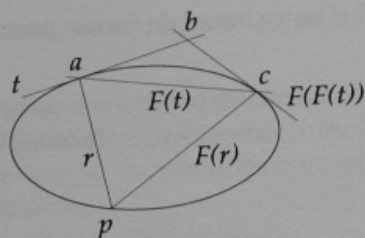
$$\{r \cap F(r) : r \in \mathcal{F}_a\}$$

Dem. Observamos primero que las condiciones del enunciado, excluyendo el carácter proyectivo de la aplicación F , permiten definir explícitamente esta biyección:

Pues, si r es la recta tangente T_a , entonces, como $r \cap F(r) \subset C \cap r = \{a\}$, debe ser $F(r) = V_p(c, a)$. Y, análogamente, si $T_a \neq r \neq V_p(a, c)$, entonces debe ser $r = V_p(a, p)$, $F(r) = V_p(c, p)$, con $p \in C$, $p \neq a, c$.

Para ver que F es una homografía, consideramos la referencia $\mathcal{P} = \{a, b, c; d\}$, donde b es el punto común de las rectas tangentes T_a y T_c y $d \in C$.

Como hemos visto previamente, la cónica está representada en esta referencia por la ecuación reducida $x_1^2 - x_0x_2 = 0$.

Figura 6.3: Definición de F

Por otro lado, las rectas r y r' de los haces \mathcal{F}_a y \mathcal{F}_c tienen ecuaciones de la forma

$$\lambda x_1 + \mu x_2 = 0 \text{ y } \lambda' x_0 + \mu' x_1 = 0$$

respectivamente. Y, por la observación siguiente a 3.3.3, los pares $(\lambda : \mu)$ y $(\lambda' : \mu')$ representan los puntos duales de dichas rectas en referencias apropiadas de $\Delta(a)$ y $\Delta(c)$.

En particular, las rectas r y $F(r)$ que tienen en común un punto $p \in C$ están definidas por las ecuaciones

$$\lambda x_1 + \mu x_2 = 0 \text{ y } \lambda x_0 + \mu x_1 = 0$$

ya que las coordenadas de p son entonces $(\mu^2 : -\lambda\mu : \lambda^2)$.

Por tanto, las ecuaciones $\rho(\lambda', \mu') = (\lambda, \mu)$ definen F , lo que completa la demostración.

Las condiciones restantes resultan inmediatamente de la definición de F . \square

Notación. Supongamos que a_1, a_2, a_3, a_4 son puntos de cuatro rectas distintas r_1, r_2, r_3, r_4 , que concurren en otro punto a , diferente de los anteriores. Entonces, es conveniente designar la razón doble $[r_1, r_2, r_3, r_4]$ en el haz \mathcal{F}_a por $a[a_1, a_2, a_3, a_4]$.

Teorema de Chasles. Supongamos que e_1, e_2, e_3, e_4 son puntos distintos de una cónica regular y los puntos a y c , diferentes de los anteriores, pertenecen también a la cónica. Entonces, las razones dobles $a[e_1, e_2, e_3, e_4]$ y $c[e_1, e_2, e_3, e_4]$ son iguales.

Dem. En efecto, sabemos que las homografías entre haces de rectas conservan la razón doble. Por tanto, el resultado es consecuencia inmediata del teorema anterior. \square

El resultado que sigue es el recíproco del teorema 1.3.

Teorema de Steiner. Supongamos que $F : \mathcal{F}_a \rightarrow \mathcal{F}_c$ es una homografía entre haces de rectas que no deja fija la recta $V_p(a, c)$. Entonces, existe una cónica regular única $C, [\phi]$ tal que $a, c \in C$ y

$$C = \{r \cap F(r) : r \in \mathcal{F}_a\}$$

Dem. La demostración es similar a la del teorema 1.3.

Por la hipótesis, $a \notin F(V_p(a, c))$ y $c \notin F^{-1}(V_p(a, c))$.

Por tanto, $F(V_p(a, c))$ y $F^{-1}(V_p(a, c))$ se cortan en algún punto b distinto de a y c , y se tiene

$$F(V_p(a, c)) = V_p(b, c) \text{ y } F(V_p(a, b)) = V_p(a, c) \quad (7)$$

Considerando una referencia $\mathcal{P} = \{a, b, c, d\}$, las rectas de los haces \mathcal{F}_a y \mathcal{F}_c tienen ecuaciones de la forma

$$\lambda x_1 + \mu x_2 = 0 \text{ y } \lambda' x_0 + \mu' x_1 = 0$$

respectivamente. (Como en la demostración de 1.3)

Además, por las condiciones (7), las rectas transformadas de $r_0 : x_1 = 0$ y $r_1 : x_2 = 0$ son $r'_0 : x_0 = 0$ y $r'_1 : x_1 = 0$.

Por tanto, F viene definida por ecuaciones del tipo $\rho(\lambda', \mu') = (\lambda, k\mu)$, $k \neq 0$, y transforma cualquier recta $r : \lambda x_1 + \mu x_2 = 0$ en la recta $r' : \lambda x_0 + k\mu x_1 = 0$.

Esto prueba que el conjunto $C = \{r \cap F(r) : r \in \mathcal{F}_a\}$ está formado por los puntos de coordenadas $(k\mu^2 : -\lambda\mu : \lambda^2)$. Es decir, C es la imagen de la cónica regular definida por la ecuación $kx_1^2 - x_0x_2 = 0$. \square

Teoremas de Pascal y Brianchon

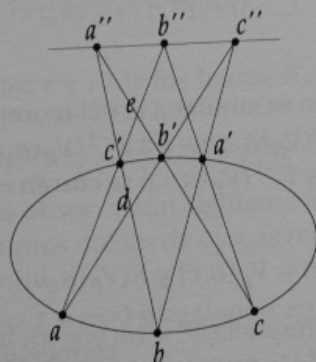
Teorema 6.1.4 (Teorema de Pascal). Supongamos que 6 puntos distintos dados ordenadamente están contenidos en una cónica regular. Entonces, los

puntos son los vértices sucesivos de un hexágono cuyos lados opuestos se cortan en tres puntos alineados.

Dem. Sean a, b', c, a', b, c' , en este orden, los vértices del hexágono y c'', b'', a'' los puntos de las intersecciones

$$V_p(a, b') \cap V_p(a', b), V_p(a, c') \cap V_p(a', c), V_p(b, c') \cap V_p(b', c)$$

de los lados opuestos. (Figura siguiente)



Con la notación de la figura, probaremos que

$$[a, c', e, b''] = [a, d, b', c''] \quad (8)$$

De esta forma, por el resultado del ejercicio 47, las tres rectas $V_p(c', d)$, $V_p(e, b')$ y $V_p(b'', c'')$ concurren en un mismo punto. Se tendría, por tanto, $a'' \in V_p(b'', c'')$, como establece el teorema.

Para obtener la igualdad (8), aplicamos el teorema de Chasles a los puntos a, c', b', a' :

$$c[a, c', e, b''] = c[a, c', b', a'] = b[a, c', b', a'] = b[a, d, b', c'']$$

Por el corolario 3.3.6, esto prueba que $[a, c', e, b''] = [a, d, b', c'']$. \square

La figura 6.4 presenta otra ilustración del teorema.

Recordamos que las rectas tangentes a una cónica regular son duales de los puntos de la cónica tangencial asociada. Por tanto, el resultado que sigue es equivalente al teorema de Pascal.

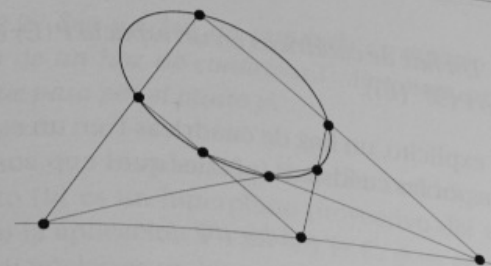


Figura 6.4: Teorema de Pascal

Teorema 6.1.5 (Teorema de Brianchon). Supongamos que 6 rectas distintas dadas ordenadamente son tangentes a una cónica regular. Entonces, las minan tres rectas concurrentes.

6.2. Generalidades sobre haces de cuádricas

Los resultados de las secciones precedentes se han establecido para espacios sobre un cuerpo con alguna restricción, o bien para espacios sobre el cuerpo real. Los resultados formulados para espacios reales se adaptan a los espacios complejos, efectuando modificaciones leves que simplifican la versión real.

En esta sección, la facilidad que supone realizar el estudio para espacios complejos resulta decisiva, por lo que consideramos únicamente este tipo de espacios. (La parte del estudio válida para otros cuerpos puede destacarse sin dificultad)

Definiciones y propiedades básicas

Para designar una cuádrica de un espacio $P(E)$, escribiremos simplemente $[\phi]$, en lugar de $C, [\phi]$.

Además, designaremos por $\mathcal{B}^+(E)$ el espacio vectorial de las formas bilineales simétricas sobre E . Claramente, toda cuádrica $[\phi]$ de $P(E)$ es un elemento del espacio proyectivo $P(\mathcal{B}^+(E))$, por lo que tiene sentido la definición siguiente.

Definición 6.2.1. Un haz de cuádricas en un espacio $P(E)$ es una recta proyectiva del espacio $P(\mathcal{B}^+(E))$.

De modo más explícito, un haz de cuádricas Γ en un espacio $P(E)$ es la colección formada por las cuádricas $[\gamma]$ tales que

$$\gamma = \lambda\phi + \mu\psi$$

donde $[\phi]$ y $[\psi]$ son elementos particulares distintos de Γ y $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Así, suponiendo que ϕ y ψ tienen matrices A y B en una base dada, entonces las cuádricas de Γ son las definidas por matrices de la forma

$$\lambda A + \mu B$$

Estas notaciones se mantienen hasta el final de la sección.

En lo que sigue, consideramos solamente haces no degenerados, lo que significa que alguna cuádrica del haz es no singular. Entonces, podemos suponer que la cuádrica $[\phi]$ del haz precedente Γ es regular. Y es claro que toda cuádrica de Γ distinta de $[\phi]$ tiene una matriz del tipo

$$\lambda A - B$$

Diremos que $\lambda A - B$ es la matriz general del haz.

En particular, las cuádricas singulares del haz son las que se obtienen para las raíces λ del polinomio $|\lambda A - B|$, cuyo grado es la dimensión de E .

Esto prueba que todo haz de cuádricas no degenerado en un espacio proyectivo de dimensión n contiene como máximo $n + 1$ cuádricas degeneradas.

Observación y definición. Es evidente que un punto p de $P(E)$ pertenece a todas las cuádricas de un haz si y sólo si pertenece a dos de ellas.

El conjunto formado por los puntos que pertenecen a todas las cuádricas de un haz se llama base del haz.

Asimismo, por la definición 5.1.5, es inmediato que todo subespacio tangente en un punto p a dos cuádricas distintas de un haz es tangente a todas las cuádricas de éste en el mismo punto p .

Proposición 6.2.2. Sea $p = [u]$ un punto de un espacio $P(E)$, no perteneciente a la base de un haz de cuádricas Γ . Entonces, existe una cuádrica única del haz que pasa por el punto p .

Dem. Veremos que la colección H de las cuádricas de $P(E)$ que pasan por el punto $[u]$ es un hiperplano proyectivo del espacio $P(\mathcal{B}^+(E))$. En efecto, como la aplicación $F : \mathcal{B}^+(E) \rightarrow \mathbb{C}$, $\phi \mapsto \phi(u, u)$, es una forma lineal no nula, su núcleo es un hiperplano vectorial, y claramente

$$H = \{[\phi] \in P(\mathcal{B}^+(E)) : \phi(u, u) = 0\} = P(\ker(F))$$

Además, $\Gamma \not\subseteq H$, puesto que alguna cuádrica de Γ no contiene a $[u]$.

Por consiguiente, la intersección de Γ y H consta de un solo elemento, lo que demuestra el resultado. \square

Equivalencia de haces de cuádricas

Definición 6.2.3. Sean Γ y Γ' haces de cuádricas no degenerados en un espacio $P(E)$. Utilizando la definición 5.3.1, decimos que Γ es equivalente a Γ' cuando las cuádricas de Γ' son las transformadas de las cuádricas de Γ mediante una homografía de $P(E)$.

Trataremos de encontrar una caracterización adecuada de esta noción de equivalencia de haces.

Sea $([\phi], [\psi])$ un par de cuádricas regulares distintas de $P(E)$.

Sabemos que $[\phi]$ y $[\psi]$ tienen asociadas homografías únicas f y g de $P(E)$ en $P(E^*)$ tales que $\Delta^{-1} \circ \Phi_f$ y $\Delta^{-1} \circ \Phi_g$ son las polaridades determinadas por $[\phi]$ y $[\psi]$, respectivamente. Por tanto, podemos asociar al par $([\phi], [\psi])$ la homografía $f^{-1} \circ g$ de $P(E)$ en $P(E)$.

Recordamos que f está inducida por el isomorfismo vectorial \hat{f} tal que $\hat{f}(v)(u) = \phi(u, v)$, y las matrices $M(\phi; \mathcal{B})$ y $M(\hat{f}; \mathcal{B}, \mathcal{B}^*)$ son iguales.

Por tanto, suponiendo que ϕ y ψ tienen matrices A y B en una base dada \mathcal{B} , se tiene que la homografía $f^{-1} \circ g$ está representada en la referencia asociada a \mathcal{B} por la matriz $A^{-1}B$.

Observación. En la situación anterior, sea Γ el haz de cuádricas engendrado por $([\phi], [\psi])$. Entonces, la igualdad

$$|\lambda A - B| = |A| |\lambda I - A^{-1} B|$$

muestra que los valores de λ correspondientes a las cuádricas degeneradas del haz son los valores propios de la matriz de la homografía asociada al par $([\phi], [\psi])$.

Teorema 6.2.4. Sean Γ y Γ' haces de cuádricas no degenerados en un espacio $P(E)$. Entonces, son condiciones equivalentes:

(a) Γ y Γ' son equivalentes.

(b) Existen cuádricas regulares distintas $[\phi'], [\psi']$ de Γ' , que son las transformadas por una misma homografía de cuádricas $[\phi], [\psi]$ pertenecientes a Γ .

(c) Existen pares de cuádricas regulares $([\phi], [\psi])$ y $([\phi'], [\psi'])$ de Γ y Γ' cuyas homografías asociadas son equivalentes. (Es decir, están representadas en una misma referencia por matrices semejantes)

Dem. La equivalencia de las condiciones (a) y (b) es clara.

(b) implica (c):

Supongamos que se cumple (b). Con las notaciones anteriores, esto significa que existe una matriz regular Q tal que

$$A' = Q^t A Q, B' = Q^t B Q$$

Por tanto, si $T = Q^t$, entonces,

$$A'^{-1} B' = (Q^{-1} A^{-1} T^{-1})(T B Q) = Q^{-1} (A^{-1} B) Q$$

lo que demuestra la condición (c).

(c) implica (b):

Supongamos que se cumple (c); es decir, que existe una matriz regular T tal que

$$A'^{-1} B' = T^{-1} (A^{-1} B) T$$

Entonces,

$$\lambda A' - B' = A' (\lambda I - A'^{-1} B') = A' T^{-1} A^{-1} (\lambda A - B) T = P (\lambda A - B) T$$

donde $P = A' T^{-1} A^{-1}$.

La relación $\lambda A' - B' = P (\lambda A - B) T$ indica que las matrices simétricas $\lambda A - B$ y $\lambda A' - B'$ son equivalentes. Ahora, sobre el cuerpo \mathbb{C} dos matrices simétricas equivalentes son congruentes (como se puede ver en [1]), lo que establece en este caso que

$$\lambda A' - B' = Q^t (\lambda A - B) Q, \quad |Q| \neq 0$$

En particular,

$$A' = Q^t A Q, B' = Q^t B Q$$

lo que demuestra que se cumple la condición (b). □

El teorema tiene la siguiente consecuencia inmediata.

Corolario 6.2.5. Sean Γ y Γ' haces de cuádricas no degenerados en un espacio $P(E)$. Entonces, Γ y Γ' son equivalentes si y sólo si existen pares de cuádricas regulares $([\phi], [\psi])$ y $([\phi'], [\psi'])$ de Γ y Γ' cuyas homografías asociadas tienen la misma matriz canónica.

6.3. Haces de cónicas en el plano complejo

Sea Γ un haz de cónicas no degenerado en un plano proyectivo complejo. Utilizando los resultados de la sección anterior, asociaremos a Γ un haz equivalente Γ_c , representado por una matriz general de tipo canónico. Entonces, efectuando los cálculos oportunos con esta matriz, podremos determinar elementos suficientes para caracterizar los diferentes tipos de haces.

Para obtener la expresión del haz Γ_c , aplicaremos el corolario 2.5. Por tanto, partiremos de la matriz canónica de Jordan de la homografía asociada a un par de cuádricas regulares del haz de partida Γ . Designaremos esta matriz por J .

Los tipos de haces que resultan son los siguientes.

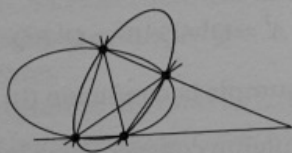
Tipo I. J es una matriz diagonal con tres valores propios distintos.

Entonces, Γ es equivalente al haz Γ_c , representado por la matriz general canónica

$$\begin{pmatrix} \lambda - 1 & & \\ & \lambda - a_1 & \\ & & \lambda - a_2 \end{pmatrix}$$

Calculando con esta matriz se comprueban las propiedades siguientes:

Cónicas singulares. El haz tiene 3 cónicas singulares, cada una de las cuales es un par de rectas.



Puntos base y tangentes comunes. La base del haz consta de cuatro puntos distintos. Además, estos puntos son los vértices de un cuadrivértice, cuyos pares de lados opuestos forman las 3 cónicas degeneradas del haz.

(Los puntos diagonales del cuadrivértice son los tres primeros puntos de la referencia empleada)

En un haz de este tipo no existen tangentes comunes.

Tipo II. J tiene dos valores propios distintos y el bloque elemental de Jordan correspondiente al valor propio doble es de orden 2.

La igualdad

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & a_2 \end{pmatrix}$$

muestra que Γ es equivalente al haz Γ_c , representado por la matriz general canónica

$$\begin{pmatrix} -1 & \lambda - 1 & \\ \lambda - 1 & & \\ & & \lambda - a_2 \end{pmatrix}$$

Calculando con esta matriz se comprueban las propiedades siguientes:

Cónicas singulares. El haz tiene 2 cónicas singulares, cada una de las cuales es un par de rectas.



Puntos base y tangentes comunes. La base del haz consta de tres puntos distintos, siendo uno de ellos el punto singular de una de las cónicas degeneradas. Este punto es el único de tangencia común, y la otra cónica degenerada está formada por la tangente en dicho punto y la recta que engendran los puntos base restantes.

Tipo III. J es una matriz diagonal con dos valores propios distintos. Entonces, Γ es equivalente al haz Γ_c , representado por la matriz general

$$\begin{pmatrix} \lambda - 1 & & \\ & \lambda - 1 & \\ & & \lambda - a_2 \end{pmatrix}$$

Cónicas singulares. El haz tiene 2 cónicas singulares: un par de rectas y una recta doble. La imagen de la recta doble es la polar respecto de cualquier cónica regular del haz del punto singular del par de rectas.



Puntos base y tangentes comunes. La base del haz consta de dos puntos distintos, que engendran la imagen de la recta doble (obviamente). Y, por lo dicho antes, ambos puntos son de tangencia común con las rectas que forman la otra cónica degenerada.

Las cónicas de un haz de este tipo se llaman bitangentes.

Tipo IV. J tiene un valor propio único y es un bloque elemental de Jordan.

La igualdad

$$\begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

muestra que Γ es equivalente al haz Γ_C , representado por la matriz general

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & \lambda - 1 \\ -1 & \lambda - 1 & \\ \lambda - 1 & & \end{pmatrix}$$

Cónicas singulares. El haz tiene una única cónica degenerada, que es un par de rectas.



Puntos base y tangentes comunes. La base del haz consta de dos puntos distintos, siendo uno de ellos el punto singular de la cónica degenerada. Éste es también el único punto de tangencia común, y la recta tangente es una de las que forman dicha cónica.

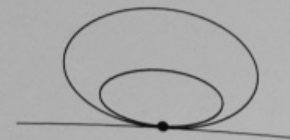
En este caso decimos que las cónicas del haz son osculatrices en el punto de tangencia común.

Tipo V. J tiene un valor propio único y consta de dos bloques elementales.

Entonces, como para el tipo II, Γ es equivalente a un haz Γ_C , representado por la matriz general

$$\begin{pmatrix} -1 & \lambda - 1 & \\ \lambda - 1 & & \\ & & \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

Cónicas singulares. El haz tiene una única cónica degenerada, en este caso una recta doble.



Puntos base y tangentes comunes. La base del haz consta de un punto único. La única tangente común es la recta que forma la cónica degenerada.

En este caso decimos que las cónicas del haz son hiperosculatrices en el punto base.

Apéndice A

Requisitos afines del capítulo 2

A.1. Primeras definiciones

Concepto de espacio afín. Un espacio afín sobre un espacio vectorial E es un conjunto no vacío X , con los dos requisitos siguientes:

- (a) Para todo $p_0 \in X$, se tiene dada una aplicación biyectiva $\tau_{p_0} : E \rightarrow X$. Se adopta la notación $\tau_{p_0}(u) = p_0 + u$, $\tau_{p_0}^{-1}(p) = p_0 p$.
- (b) Para todo p_0 en X y todo u, v en E , se cumple que $p_0 + (u + v) = (p_0 + u) + v$.

Los elementos de X reciben el nombre de puntos. El espacio vectorial E se llama espacio de dirección de X , y se designa por \tilde{X} . Cuando $\dim_K \tilde{X} = n$, se dice que X es un espacio afín de dimensión n sobre el cuerpo K .

En las dos definiciones siguientes se supone que X y X' son espacios afines sobre el mismo cuerpo K .

Subespacios afines. Un subconjunto A de X es un subespacio afín, cuando existen un punto p_0 de A y un subespacio vectorial V de \tilde{X} tales que

$$A = p_0 + V \quad (1)$$

(Donde $p_0 + V = \{p_0 + v : v \in V\}$)

Cuando A es un subespacio afín, el subespacio vectorial V que verifica la igualdad (1) es único, y la igualdad es válida para todo punto p_0 de A .

Además, A tiene una estructura de espacio afín sobre el espacio vectorial V , inducida por la estructura afín de X .

Aplicaciones afines. Una aplicación $f : X \rightarrow X'$ es una aplicación afín, cuando existen un punto p_0 de X y una aplicación lineal $g : \bar{X} \rightarrow \bar{X}'$ tales que

$$f(p_0 + u) = f(p_0) + g(u) \quad (2)$$

para todo $u \in \bar{X}$.

Cuando f es una aplicación afín, la aplicación lineal g que satisface la igualdad (2) es única, y la igualdad se cumple para todo $p_0 \in X$ y todo $u \in \bar{X}$. La aplicación g , llamada aplicación lineal asociada a la aplicación afín f , se designa por \tilde{f} .

Observaciones. Todo espacio vectorial E admite una estructura natural de espacio afín, con el propio espacio vectorial como espacio de dirección. Las biyecciones que definen esta estructura afín son las traslaciones de E ; es decir, las aplicaciones $\tau_u : E \rightarrow E$, $\tau_u : v \mapsto u + v$.

Un espacio vectorial se considera siempre dotado de esta estructura afín natural o canónica.

De este modo:

- Cualquier subespacio vectorial L de un espacio vectorial E es un subespacio afín de E .
- Cualquier aplicación lineal $g : E \rightarrow E'$ es una aplicación afín, cuya aplicación lineal asociada es la propia g .

A.2. Completación vectorial de un espacio afín

Para definir el espacio proyectivo asociado a un espacio afín X es necesario disponer de un espacio vectorial apropiado, en el que X sea un hiperplano afín que no contenga a 0 .

En esta sección, veremos que un espacio vectorial \hat{X} con esa propiedad puede ser construido de modo natural para todo espacio afín X . Diremos entonces que \hat{X} es una completación vectorial del espacio afín X .

Para motivar la definición, supongamos que el espacio X y un espacio vectorial V verifican la condición mencionada. Entonces, el espacio de dirección de X es un hiperplano vectorial de V , con lo que V consta de los elementos $u \in \bar{X}$ y los del tipo $kp \neq 0$, donde $p \in X$. Dichos elementos pueden ser representados formalmente como pares $(0, u)$ y (k, p) , respectivamente, lo que lleva a considerar el conjunto

$$\hat{X} = (K - \{0\}) \times X \cup \{0\} \times \bar{X}$$

Además, si la condición afín $p + pp' = p'$ es verificada por la adición de V , sería:

- $kp + k'p' = kp + k'(p + pp') = (k + k')(p + \frac{k'}{k+k'}pp')$, si $k + k' \neq 0$,
- $kp + k'p' = kp + k'(p + pp') = k'pp'$, si $k + k' = 0$,
- $kp + u = k(p + \frac{1}{k}u)$,

donde $k, k' \in K - \{0\}$, $p, p' \in X$ y $u \in \bar{X}$.

Interpretando formalmente las condiciones anteriores, definimos en \hat{X} la operación de adición siguiente:

- $(k, p) + (k', p') = (k + k', p + \frac{k'}{k+k'}pp')$, si $k + k' \neq 0$,
- $(k, p) + (k', p') = (0, -kpp')$, si $k + k' = 0$,
- $(k, p) + (0, u) = (0, u) + (k, p) = (k, p + \frac{1}{k}u)$,
- $(0, u) + (0, v) = (0, u + v)$.

Asimismo, es coherente definir la multiplicación de escalares por elementos de \hat{X} como sigue:

- $\lambda(k, p) = (\lambda k, p)$, si $\lambda \neq 0$,
- $\lambda(k, p) = (0, \vec{0})$, si $\lambda = 0$,
- $\lambda(0, u) = (0, \lambda u)$.

Entonces, con las operaciones de adición y multiplicación por escalares precedentes, \hat{X} es un espacio vectorial.

Dem. Una comprobación directa sería fácil, pero demasiado laboriosa. Por eso es preferible utilizar otro procedimiento.

El producto cartesiano $K \times \bar{X}$ de los espacios vectoriales K y \bar{X} es un espacio vectorial. Elegimos un punto p_0 de X , y consideramos la aplicación

$$F : \hat{X} \rightarrow K \times \bar{X}$$

que transforma (k, p) en (k, kp_0p) y $(0, u)$ en $(0, u)$.

Entonces, F es una aplicación biyectiva. Además, es fácil comprobar que la adición de \hat{X} y la multiplicación de escalares por elementos de \hat{X} corresponden mediante F a las mismas operaciones de $K \times \tilde{X}$. (Dejamos los detalles como ejercicio)

Por tanto, como sucede en $K \times \tilde{X}$, todos los requisitos de la estructura de espacio vectorial son verificados en \hat{X} .

(Como complemento resulta que F es un isomorfismo vectorial) \square

Si X es el espacio afín canónico K^n , entonces $K \times \tilde{X}$ es el espacio vectorial ordinario K^{n+1} y se tiene el isomorfismo vectorial $F: \hat{X} \rightarrow K \times \tilde{X}$, que transforma (k, p) en (k, kp) y $(0, u)$ en $(0, u)$. Además, $K \times \tilde{X}$ cumple las condiciones de las proposiciones siguientes referentes a \hat{X} .

Por consiguiente, podemos elegir el espacio ordinario K^{n+1} como completación vectorial del espacio afín canónico K^n .

Proposición A.2.1. La aplicación $i_0: \tilde{X} \rightarrow \hat{X}$, $u \mapsto (0, u)$, es una inmersión lineal, lo que permite identificar \tilde{X} con el subespacio vectorial $i_0(\tilde{X})$ de \hat{X} .

Asimismo, la aplicación $i: X \rightarrow \hat{X}$, $p \mapsto (1, p)$, es una inmersión afín, que permite identificar X con el subespacio afín $i(X)$ de \hat{X} .

Dem. El primer apartado es inmediato.

Para el segundo, utilizamos la igualdad $(1, p) = (1, p_0) + (0, p_0p)$. Por las definiciones de i e i_0 , esto expresa que $i(p) = i(p_0) + i_0(p_0p)$. Por tanto, i es una aplicación afín, cuya aplicación lineal asociada es i_0 . \square

Usualmente efectuaremos las identificaciones $X \equiv i(X)$, $\tilde{X} \equiv i_0(\tilde{X})$. Por tanto, en lugar de $i(X)$, $i(p)$, $i_0(u)$, ..., escribiremos simplemente X , p , u , ..., omitiendo las inmersiones i e i_0 . Hacemos esto a continuación.

Demostraremos ahora que los subespacios X y \tilde{X} de \hat{X} son hiperplanos.

Proposición A.2.2. Consideramos X y \tilde{X} como subespacios disjuntos de \hat{X} . Entonces,

$$\hat{X} = Kp_0 \oplus \tilde{X}$$

para todo $p_0 \in X$. Por consiguiente, \tilde{X} y X son hiperplanos del espacio \hat{X} .

Dem. Veremos primero que todo elemento de \hat{X} pertenece a $Kp_0 + \tilde{X}$.

En efecto, para los elementos del tipo (k, p) , esto resulta de las expresiones $(k, p) = k(1, p) \equiv kp$, teniendo en cuenta que $p = p_0 + p_0p$. Para los elementos del tipo $(0, u)$, el resultado es obvio, pues $u \in \tilde{X}$ y $(0, u) \equiv u$.

Por otro lado, como $p_0 \notin \tilde{X}$, los subespacios Kp_0 y \tilde{X} sólo tienen en común el vector 0.

Por tanto, Kp_0 y \tilde{X} son subespacios suplementarios de \hat{X} , como se trataba de probar. \square

Corolario A.2.3. \hat{X} está engendrado vectorialmente por X .

Dem. En efecto, todo elemento de \tilde{X} se expresa en \hat{X} en la forma

$$u = p_0p = p - p_0$$

donde $p_0, p \in X$. Por tanto, el resultado es consecuencia inmediata de la proposición anterior. \square

Apéndice B

Cuádricas afines

B.1. Formas biafinas

Definición B.1.1. Sea X un espacio afín sobre el cuerpo K . Una forma biafín sobre X es una aplicación $\varphi : X \times X \rightarrow K$ tal que, para todo $p \in X$, las aplicaciones parciales $\varphi(-, p) : X \rightarrow K$ y $\varphi(p, -) : X \rightarrow K$ son formas afines.

Decimos que una forma biafín φ es simétrica cuando $\varphi(p, q) = \varphi(q, p)$ para todo $p, q \in X$.

Las proposiciones siguientes determinan la estructura de las formas biafinas sobre un espacio dado X .

Proposición B.1.2. Sean X un espacio afín sobre K y \bar{X} su espacio de dirección. Consideramos una forma bilineal $\bar{\varphi} : \bar{X} \times \bar{X} \rightarrow K$, formas lineales $f, g : \bar{X} \rightarrow K$ y un escalar k . Además, sean $p_0, q_0 \in X$. Entonces, la aplicación $\varphi : X \times X \rightarrow K$, definida por la expresión

$$\varphi(p_0 + u, q_0 + v) = \bar{\varphi}(u, v) + f(u) + g(v) + k$$

es una forma biafín.

Además, se verifica:

$$k = \varphi(p_0, q_0)$$

$$f(u) = \varphi(p_0 + u, q_0) - \varphi(p_0, q_0)$$

$$g(v) = \varphi(p_0, q_0 + v) - \varphi(p_0, q_0)$$

$$\bar{\varphi}(u, v) = \varphi(p_0 + u, q_0 + v) - \varphi(p_0 + u, q_0) - \varphi(p_0, q_0 + v) + \varphi(p_0, q_0) \quad (2d)$$

Dem. Veremos que todas las aplicaciones $\varphi(p, -)$ y $\varphi(-, q)$ son formas afines, lo que demostrará que φ es una forma biafin. En efecto

$$\begin{aligned} \varphi(-, q)(p_0 + u) - \varphi(-, q)(p_0) &= \varphi(p_0 + u, q) - \varphi(p_0, q) = \\ &= (\bar{\varphi}(u, q_0 q) + f(u) + g(q_0 q) + k) - (\bar{\varphi}(0, q_0 q) + f(0) + g(q_0 q) + k) = \\ &= (\bar{\varphi}(-, q_0 q) + f)(u). \end{aligned}$$

Como $\bar{\varphi}(-, q_0 q)$ y f son aplicaciones lineales, esto prueba que $\varphi(-, q)$ es una aplicación afin, cuya aplicación lineal asociada es $\bar{\varphi}(-, q_0 q) + f$.

Análogamente, $\varphi(p, -)$ es una aplicación afin, cuya aplicación lineal asociada es $\bar{\varphi}(p_0 p, -) + g$.

Las fórmulas (2a), (2b), (2c) resultan de (1), haciendo sucesivamente $u = v = 0$, $v = 0$ y $u = 0$. Por último, (2d) se obtiene substituyendo en (1) las expresiones de f, g y k dadas en (2a), (2b) y (2c). \square

Proposición B.1.3. Sea φ una forma biafin sobre un espacio X . Elegimos puntos $p_0, q_0 \in X$ y definimos k, f_{q_0}, g_{p_0} y $\bar{\varphi}$ mediante las expresiones (2a) a (2d). Entonces, f_{q_0} y g_{p_0} son formas lineales, $\bar{\varphi}$ es una forma bilineal y se tiene

$$\varphi(p_0 + u, q_0 + v) = \bar{\varphi}(u, v) + f_{q_0}(u) + g_{p_0}(v) + k \quad (3)$$

Además, $\bar{\varphi}$ es independiente de la elección de p_0 y q_0 , mientras que f_{q_0} y g_{p_0} dependen de q_0 y p_0 , respectivamente, de acuerdo con las expresiones

$$f_{q_1} = f_{q_0} + \bar{\varphi}(-, q_0 q_1), \quad g_{p_1} = g_{p_0} + \bar{\varphi}(p_0 p_1, -) \quad (4)$$

Dem. Por la definición, $f_{q_0}(u) = \varphi(-, q_0)(p_0 + u) - \varphi(-, q_0)(p_0)$.

Como $\varphi(-, q_0)$ es una aplicación afin, esta igualdad muestra que f_{q_0} es precisamente la aplicación lineal asociada a $\varphi(-, q_0)$.

Del mismo modo, g_{p_0} es la aplicación lineal asociada a $\varphi(p_0, -)$.

Por otro lado,

$$\bar{\varphi}(u, v) = (\varphi(p_0 + u, q_0 + v) - \varphi(p_0 + u, q_0)) - (\varphi(p_0, q_0 + v) - \varphi(p_0, q_0)) = g_{p_0+u}(v) - g_{p_0}(v). \quad (5a)$$

Y, asimismo,

$$\bar{\varphi}(u, v) = (\varphi(p_0 + u, q_0 + v) - \varphi(p_0, q_0 + v)) - (\varphi(p_0 + u, q_0) - \varphi(p_0, q_0)) = f_{q_0+u}(v) - f_{q_0}(v). \quad (5b)$$

La relación (5b) muestra que $\bar{\varphi}$ es lineal en la primera variable y no depende del punto p_0 , mientras que (5a) muestra que $\bar{\varphi}$ es lineal en la segunda variable y no depende de q_0 . Por consiguiente, $\bar{\varphi}$ es una forma bilineal, independiente de p_0 y q_0 .

La expresión (3) resulta inmediatamente de las definiciones de $\bar{\varphi}, f_{q_0}, g_{p_0}$ y k .

Por último, las relaciones (4) corresponden a (5a) y (5b), poniendo $p_1 = p_0 + u$ y $q_1 = q_0 + v$, respectivamente. \square

Observaciones y definiciones. (1) La forma biafin φ determina de manera única la forma $\bar{\varphi}$. Decimos que $\bar{\varphi}$ es la forma bilineal asociada a la forma biafin φ .

Cuando $\bar{\varphi} \neq 0$, decimos que φ es una forma biafin propia.

(2) Si φ es simétrica, entonces $\bar{\varphi}$ es simétrica, y $f_p = g_p$, para todo $p \in X$. Y recíprocamente.

Expresión analítica. Sea φ una forma biafin sobre X . Consideramos una referencia cartesiana $\mathcal{E} = \{p_0; u_1, \dots, u_n\}$ y puntos arbitrarios p, q de coordenadas $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)$.

Entonces, la expresión

$$\varphi(p, q) = \bar{\varphi}(p_0 p, p_0 q) + f_{p_0}(p_0 p) + g_{p_0}(p_0 q) + \varphi(p_0, p_0)$$

se escribe en la forma

$$\varphi(p, q) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \bar{\varphi}(u_i, u_j) x_i y_j + \sum_{1 \leq i \leq n} f_{p_0}(u_i) x_i + \sum_{1 \leq j \leq n} g_{p_0}(u_j) y_j + \varphi(p_0, p_0)$$

Ahora, sea $A = ((a_{ij}))$ la matriz cuyos elementos están definidos por

$$a_{00} = \varphi(p_0, p_0), \quad a_{i0} = f_{p_0}(u_i), \quad a_{0j} = g_{p_0}(u_j), \quad a_{ij} = \bar{\varphi}(u_i, u_j)$$

para $1 \leq i, j \leq n$.

Introduciendo estos coeficientes en la expresión anterior de $\varphi(p, q)$ queda

$$\varphi(p, q) = (1 \ x_1 \ \dots \ x_n) A (1 \ y_1 \ \dots \ y_n)^t$$

La matriz A depende únicamente de la forma φ y la referencia considerada \mathcal{E} . Escribiremos $A = M(\varphi; \mathcal{E})$.

Observación. La forma φ es simétrica si y sólo si la matriz $M(\varphi; \mathcal{E})$ es simétrica, para cualquier referencia \mathcal{E} . (Esto resulta de las expresiones (6) y la segunda observación que sigue a 1.3).

Observación (Formas cuadráticas afines). Como sucede para las formas bilineales simétricas, toda forma biafin simétrica φ sobre un espacio X queda determinada por la aplicación $\kappa : X \rightarrow K$ tal que $\kappa(p) = \varphi(p, p)$. En efecto, es fácil comprobar la relación

$$\varphi(p, q) = 2\kappa\left(\frac{1}{2}(p+q)\right) - \frac{1}{2}(\kappa(p) + \kappa(q))$$

Decimos que κ es la forma cuadrática afín correspondiente a la forma biafin simétrica φ .

Formas biafines regulares. Una forma biafin φ es regular cuando está representada por una matriz regular $M(\varphi; \mathcal{E})$.

Para obtener una caracterización más satisfactoria, consideramos el sistema homogéneo

$$(x_0 \dots x_n) M(\varphi; \mathcal{E}) = 0$$

Supongamos que la matriz $M(\varphi; \mathcal{E})$ es singular; es decir, que el sistema tiene soluciones no nulas. Entonces, hay dos posibilidades:

- Existe una solución no nula de la forma $(1 \ x_1 \dots x_n)$. Esto significa que existe un punto p tal que $\varphi(p, -)$ es 0.
- Existe una solución no nula $(0 \ x_1 \dots x_n)$. Teniendo en cuenta las expresiones (6), que definen la matriz $M(\varphi; \mathcal{E})$, eso significa que existe un vector no nulo u tal que $f_{p_0}(u) = 0 = \bar{\varphi}(u, -)$. Además, estas condiciones son equivalentes a $f_p(u) = 0$, para todo p , debido a las relaciones (4) de 1.3.

Por tanto, hemos establecido el resultado siguiente.

Proposición B.1.4. Sea φ una forma biafin sobre un espacio X . Entonces, φ está representada por una matriz regular si, y sólo si, se verifica

- $\varphi(p, -)$ es distinto de 0, para todo $p \in X$
- No existe ningún vector no nulo $u \in \bar{X}$ tal que $f_p(u) = 0$, para todo p .

Para terminar esta sección definiremos el concepto de equivalencia de formas biafines, que interviene en la clasificación de las cuádras de un espacio afín.

Definición B.1.5. Sean φ y φ' formas biafines sobre un espacio X . Entonces, φ es afínmente equivalente a φ' cuando existe un isomorfismo afín $h : X \rightarrow X$ tal que $\varphi(p, q) = \varphi'(h(p), h(q))$, para todo $p, q \in X$.

Las notaciones de esta sección se mantienen hasta el final del capítulo.

B.2. Cuádras afines. Hiperplanos tangentes

Las nociones de cuádras afín e hiperplanos tangentes que figuran a continuación fueron definidas previamente en la sección 5.4. Dada la analogía de las mismas con los conceptos proyectivos correspondientes, es oportuno tener en cuenta los comentarios de la sección 5.1 sobre el significado de estos últimos.

Definición B.2.1. Una cuádras $C, [\varphi]$ en un espacio afín X es la colección denotada por $[\varphi]$, de las formas no nulas proporcionales a una forma biafin simétrica propia $\varphi : X \times X \rightarrow K$. Llamamos imagen de la cuádras al conjunto $C = \{p \in X : \varphi(p, p) = 0\}$.

Definición B.2.2. Decimos que una cuádras afín $C, [\varphi]$ es regular, cuando la forma φ es regular. Cuando φ no es regular, decimos que la cuádras es singular o degenerada.

Expresión analítica. Sea $C, [\varphi]$ una cuádras en un espacio afín X . Entonces, en una referencia dada \mathcal{E} , los puntos de C están determinados por la ecuación

$$(1 \ x_1 \dots x_n) M(\varphi; \mathcal{E}) (1 \ x_1 \dots x_n)^t = 0$$

cuyo primer miembro es un polinomio simétrico de grado 2 en las coordenadas (x_1, \dots, x_n) .

Decimos que la ecuación anterior es la ecuación de la cuádras en la referencia considerada.

Definición B.2.3. Sean $C, [\varphi]$ una cuádrica en un espacio afín X y p_1 un punto de C . Decimos que p_1 es un punto regular de $C, [\varphi]$ cuando la forma afín $\varphi(p_1, -)$ es no constante. Cuando $\varphi(p_1, -)$ es constante, decimos que p_1 es un punto singular.

Si p_1 es un punto regular, llamamos hiperplano tangente a la cuádrica en el punto p_1 al hiperplano afín $T_{p_1} = \{p \in X : \varphi(p_1, p) = 0\}$.

Proposición B.2.4. Sean $C, [\varphi]$ una cuádrica en un espacio afín X y p_1 un punto de C . Entonces, p_1 es un punto regular de la cuádrica si, y sólo si, $f_{p_1} \neq 0$. Además, si p_1 es un punto regular, el hiperplano vectorial tangente \tilde{T}_{p_1} es el núcleo de f_{p_1} .

Dem. En efecto, $f_{p_1}(p_1 p) = \varphi(p_1 + p_1 p, p_1) - \varphi(p_1, p_1)$ y, como $p_1 \in C$, queda $f_{p_1}(p_1 p) = \varphi(p_1, p)$. Por tanto, la primera parte de la proposición es clara. Además, se tiene $\tilde{T}_{p_1} = \{p_1 p : \varphi(p_1, p) = 0\} = \ker f_{p_1}$ \square

El concepto de hiperplano tangente se generaliza a continuación, considerando subespacios de dimensiones arbitrarias.

Definición B.2.5. Sean $C, [\varphi]$ una cuádrica afín y p_1 un punto regular de la misma. Decimos que un subespacio afín Y es tangente a la cuádrica en dicho punto cuando Y contiene a p_1 y está contenido en T_{p_1} .

Es decir, Y es tangente a la cuádrica en p_1 cuando Y contiene a p_1 y la forma $\varphi(p_1, -)$ se anula sobre Y .

Daremos dos definiciones más, que serán utilizadas en las secciones siguientes.

Definición B.2.6. Sea $C, [\varphi]$ una cuádrica en un espacio afín X . Decimos que una dirección Ku de X (es decir, una recta vectorial de \tilde{X}) es una dirección asintótica de la cuádrica cuando $\bar{\varphi}(u, u)$ es 0.

Definición B.2.7 (Transformada de una cuádrica por una afinidad). Sean $C, [\varphi]$ una cuádrica en un espacio afín X y $h : X \rightarrow X'$ un isomorfismo afín. Claramente, se tiene una aplicación $\varphi' : X' \times X' \rightarrow K$ tal que $\varphi'(h(p), h(q)) = \varphi(p, q)$, y φ' es una forma biafín simétrica propia. Entonces, $[\varphi']$ es una cuádrica en X' , cuya imagen es $h(C)$, como se comprueba de inmediato.

Decimos que esta cuádrica es la transformada de $C, [\varphi]$ mediante el isomorfismo afín h .

B.3. Centros y subespacios diametrales

Definición B.3.1. Sea $C, [\varphi]$ una cuádrica en un espacio afín X . Decimos que un punto $p_0 \in X$ es centro de la cuádrica cuando $\varphi(p_0 + u, p_0 + u) = \varphi(p_0 - u, p_0 - u)$, para todo $u \in \tilde{X}$.

La definición asegura que todo centro p_0 de $C, [\varphi]$ es centro de simetría de C . Pues la simetría respecto de p_0 transforma $p_0 + u$ en $p_0 - u$, y las condiciones $p_0 + u \in C$ y $p_0 - u \in C$ son equivalentes.

Observación. Puesto que

$$\begin{aligned} -\varphi(p_0 + u, p_0 + u) &= \bar{\varphi}(u, u) + 2f_{p_0}(u) + \varphi(p_0, p_0) \\ -\varphi(p_0 - u, p_0 - u) &= \bar{\varphi}(u, u) - 2f_{p_0}(u) + \varphi(p_0, p_0) \end{aligned}$$

un punto p_0 es centro de $C, [\varphi]$ si, y sólo si, la forma lineal f_{p_0} es nula.

Proposición B.3.2. Sea $C, [\varphi]$ una cuádrica de un espacio afín X , representada en una referencia cartesiana \mathcal{E} por la matriz $M(\varphi; \mathcal{E}) = ((a_{ij}))_{0 \leq i, j \leq n}$. Entonces, los centros de la cuádrica son los puntos de X cuyas coordenadas en \mathcal{E} son soluciones del sistema

$$\begin{cases} a_{i0} + \sum_{1 \leq j \leq n} a_{ij} x_j = 0 \\ i = 1, \dots, n \end{cases}$$

En consecuencia, el conjunto de los centros es un subespacio afín de X , o el conjunto vacío.

Dem. Sea $\mathcal{E} = \{p_0; u_1, \dots, u_n\}$. Por la observación anterior y las relaciones (4) de 1.3, los centros de la cuádrica son los puntos $p \in X$ tales que $f_p(-, p_0 p) = 0$.

Ahora, $\{u_1, \dots, u_n\}$ es una base de \tilde{X} y, por la definición de $M(\varphi; \mathcal{E})$ tiene

$$f_{p_0}(u_i) = a_{i0}, \quad \bar{\varphi}(u_i, u_j) = a_{ij}$$

para $1 \leq i, j \leq n$.

Por tanto, la igualdad $f_{p_0} + \bar{\varphi}(-, p_0 p) = 0$ se expresa en la forma

$$\begin{cases} a_{i0} + \sum_{1 \leq j \leq n} a_{ij} x_j = 0 \\ i = 1, \dots, n \end{cases}$$

como se trataba de probar.

Observación. En la situación anterior, sea $Z \neq \emptyset$ el subespacio de los centros de $C, [\varphi]$. Entonces, si $p_0 \in Z$, las condiciones

$$p \in Z, f_p = 0 \text{ y } \bar{\varphi}(-, p_0 p) = 0$$

son equivalentes. Por tanto, el subespacio de dirección de Z es $\bar{Z} = \{v : \bar{\varphi}(-, v) = 0\}$, que, por definición, es el núcleo de la forma $\bar{\varphi}$.

Corolario B.3.3. El escalar $\varphi(p, p)$ no depende de p , si p es centro de $C, [\varphi]$.

Dem. Pues, si p_0 y p son centros de la cuádrica, entonces el vector $p_0 p$ pertenece al núcleo de la forma $\bar{\varphi}$. Por tanto, la relación $\varphi(p, p) = \bar{\varphi}(p_0 p, p_0 p) + \varphi(p_0, p_0)$ se reduce a $\varphi(p, p) = \varphi(p_0, p_0)$. \square

A continuación definimos las nociones de subespacio diametral y asíntota de una cuádrica con centro.

Definición B.3.4. En un espacio afín X , se llama subespacio diametral de una cuádrica a todo subespacio afín que contiene a uno de sus centros. Las rectas diametrales se denominan diámetros, y cuando un diámetro tiene dirección asíntótica recibe el nombre de asíntota.

Definición B.3.5. Sea $C, [\varphi]$ una cuádrica de un espacio afín X con un centro p_0 . Decimos que dos subespacios diametrales $Y = p_0 + \bar{Y}$ y $Z = p_0 + \bar{Z}$ son subespacios conjugados de la cuádrica cuando sus subespacios de dirección \bar{Y} y \bar{Z} son ortogonales con respecto a $\bar{\varphi}$.

Se tiene la propiedad importante siguiente.

Proposición B.3.6. Sea $C, [\varphi]$ una cuádrica de un espacio afín X con un centro p_0 , y sea $D = p_0 + K v$ un diámetro de dirección no asíntótica. Entonces, D tiene un hiperplano diametral conjugado $H = p_0 + \{v\}^\#$. ($\{v\}^\#$ es el subespacio ortogonal de $\{v\}$ con respecto a $\bar{\varphi}$). Además, están definidas las simetrías de X sobre H y D , paralelamente a \bar{D} y \bar{H} , respectivamente, y ambas simetrías transforman la cuádrica en sí misma.

Dem. Por la hipótesis sobre D , es $\bar{\varphi}(v, v) \neq 0$, por lo que \bar{H} y \bar{D} son subespacios suplementarios. Por tanto, H es un hiperplano conjugado de D y están definidas las simetrías mencionadas, s y s' .

Ahora, todo $p \in X$ se expresa en la forma $p = p_0 + u + k v$, con $u \in \bar{H}$ y $k \in K$, y claramente

$$\varphi(p_0 + u \pm k v, p_0 + u \pm k v) = \varphi(p_0, p_0) + \bar{\varphi}(u, u) + k^2 \bar{\varphi}(v, v)$$

Por tanto, $\varphi(s(p), s(p)) = \varphi(p, p)$, lo que prueba el resultado para s . La prueba para s' es análoga. \square

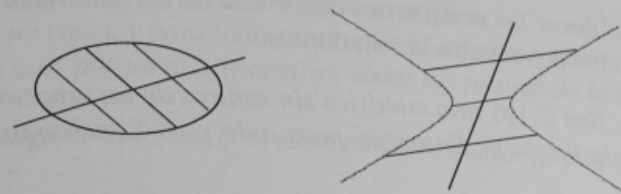


Figura B.1: Simetrías respecto a dos diámetros conjugados

B.4. Ecuaciones canónicas

Proposición B.4.1 (Ecuaciones canónicas de las cuádricas con centro). Sea $C, [\varphi]$ una cuádrica de un espacio afín real X , y supongamos que p_0 es el centro de $C, [\varphi]$. Entonces, en alguna referencia cartesiana de origen p_0 , la cuádrica tiene una ecuación canónica

$$x_1^2 + \dots + x_l^2 - \dots - x_r^2 + \varepsilon = 0$$

En esta ecuación, r y l son el rango y la signatura de la forma $\bar{\varphi}$, $\varepsilon = -1, 0$ ó 1 , según que $\varphi(p_0, p_0)$ sea negativo, cero o positivo, respectivamente.

Dem. Sea $\varepsilon = \varphi(p_0, p_0)$. Cambiando φ , si es necesario, por una forma $k\varphi$ con $k > 0$, podemos suponer que ε es $-1, 0$ ó 1 . (Como $k > 0$, la signatura de $k\bar{\varphi}$ sería la misma que la de $\bar{\varphi}$).

Ahora sea $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ una base de \bar{X} tal que $M(\bar{\varphi}; \mathcal{B})$ sea la matriz diagonal canónica.

Consideramos la referencia $\mathcal{E} = \{p_0; u_1, \dots, u_n\}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \varphi(p, p) &= \bar{\varphi}(p_0 p, p_0 p) + \varphi(p_0, p_0) = \\ &= (x_1 \dots x_n) M(\bar{\varphi}; \mathcal{B}) (x_1 \dots x_n)^t + \varepsilon = \sum_{1 \leq i \leq l} x_i^2 - \sum_{1 < j \leq r} x_j^2 + \varepsilon \end{aligned}$$

lo que demuestra la proposición. \square

Para establecer las ecuaciones canónicas de las cuádras sin centros se requieren los dos resultados siguientes.

Lema B.4.2. Sea $C, [\varphi]$ una cuádras sin centros de un espacio X , y sea N el núcleo de la forma $\bar{\varphi}$. Entonces, para todo $p_0 \in X$, existe un vector $u \in N - \ker f_{p_0}$.

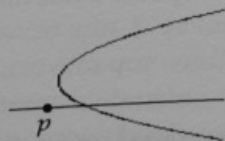


Figura B.2: La recta dibujada es $p + N$

Dem. Supongamos que la conclusión del lema no se cumple; es decir, que $N \subset \ker f_{p_0}$, para algún punto p_0 . Veremos que esto lleva a una contradicción.

Sea $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ una base en la que $\bar{\varphi}$ está representada por una matriz diagonal. Y supongamos que el rango de $\bar{\varphi}$ es r , con lo que $u_i \in N$, para $r < i \leq n$.

Consideramos la referencia $\mathcal{E} = \{p_0; u_1, \dots, u_n\}$, y la matriz $M(\varphi; \mathcal{E}) = ((a_{ij}))$. Recordamos que

$$a_{i0} = f_{p_0}(u_i) \text{ y } a_{ij} = \bar{\varphi}(u_i, u_j)$$

para $i, j = 1, \dots, n$.

En particular, para $r < i \leq n$, es $a_{i0} = 0$, ya que $u_i \in N \subset \ker f_{p_0}$.

En cambio, para $i \leq r$, es $a_{ii} = \bar{\varphi}(u_i, u_i) \neq 0$.

Por tanto, el sistema que determina los posibles centros de la cuádras (Prop. 3.2), está formado por las ecuaciones compatibles

$$\begin{cases} a_{i0} + a_{ii} x_i = 0 \\ i = 1, \dots, r \end{cases}$$

Esto contradice que la cuádras carece de centros, lo que prueba el lema. \square

Corolario B.4.3. Con los datos del lema, se verifica:

- (1) C es no vacía, y para todo punto $p_0 \in C$ existe un vector $u \in N - \bar{T}_{p_0}$. (Se observa que, por no existir centros, todos los puntos de la cuádras son regulares)
- (2) El rango de la forma $\bar{\varphi}$ es estrictamente menor que la dimensión de X .

Dem. Por el lema, dado un punto p_* de X , existe un vector $u \in N - \ker f_{p_*}$. Entonces, como

$$\varphi(p_* + ku, p_* + ku) = 2k f_{p_*}(u) + \varphi(p_*, p_*)$$

con $f_{p_*}(u) \neq 0$, resulta que la recta $p_* + Ku$ contiene a un punto de C .

Además, por la proposición 2.4, si $p_0 \in C$, es $\ker f_{p_0} = \bar{T}_{p_0}$, con lo que las otras afirmaciones del enunciado resultan evidentes. \square

Proposición B.4.4 (Ecuaciones canónicas de las cuádras sin centros). Sea $C, [\varphi]$ una cuádras sin centros de un espacio afín real X . Entonces, en alguna referencia $\mathcal{E} = \{p_0; u_1, \dots, u_n\}$ tal que $p_0 \in C$ y $\{u_1, \dots, u_{n-1}\}$ es base de \bar{T}_{p_0} , la cuádras tiene una ecuación canónica

$$x_1^2 + \dots + x_l^2 - \dots - x_r^2 + 2x_n = 0$$

donde ahora $r < n$.

Dem. Por el resultado anterior, podemos elegir un punto $p_0 \in C$ y un vector $u_n \in N - \bar{T}_{p_0}$. Como $u_n \notin \bar{T}_{p_0} = \ker f_{p_0}$, cambiando u_n , si es necesario, por un vector proporcional, podemos suponer $f_{p_0}(u_n) = 1$.

Por otro lado, la restricción de $\bar{\varphi}$ a $\bar{T}_{p_0} \times \bar{T}_{p_0}$ está representada por la matriz (diagonal) canónica en una base $\{u_1, \dots, u_{n-1}\}$ de \bar{T}_{p_0} . Y, claramente, $\bar{\varphi}(u_i, u_n) = 0$, ya que u_n pertenece al núcleo de $\bar{\varphi}$.

Por tanto, tenemos una base $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ de \tilde{X} , en la que $\tilde{\varphi}$ está representada por la matriz canónica.

Consideramos la referencia $\mathcal{E} = \{p_0; u_1, \dots, u_n\}$. Entonces,

$$\varphi(p, p) = \tilde{\varphi}(p_0 p, p_0 p) + 2f_{p_0}(p_0 p) = (x_1 \dots x_n) M(\tilde{\varphi}; \mathcal{B})(x_1 \dots x_n)^t + 2f_{p_0}(\sum_{i=1}^n x_i u_i) = \sum_{1 \leq i \leq l} x_i^2 - \sum_{1 < j \leq r} x_j^2 + 2x_n$$

(Teniendo en cuenta que $u_1, \dots, u_{n-1} \in \tilde{T}_{p_0} = \ker f_{p_0}$, y $f_{p_0}(u_n) = 1$, por la elección de u_n)

La expresión anterior demuestra la proposición. \square

B.5. Clasificación afín

Definición B.5.1. Decimos que una cuádrica $C, [\varphi]$ es (afinmente) equivalente a otra $C', [\varphi']$ en un espacio X cuando existe un isomorfismo afín del espacio en sí mismo que transforma $C, [\varphi]$ en $C', [\varphi']$.

Observación B'. Supongamos que $C, [\varphi]$ y $C', [\varphi']$ son cuádricas (equivalentes) tales que

$$\varphi(p, q) = \varphi'(h(p), h(q)) \quad (1)$$

para algún isomorfismo afín $h: X \rightarrow X$.

De (1) resulta de inmediato que si $C, [\varphi]$ tiene un centro p_0 , entonces $p'_0 = h(p_0)$ es centro de $C', [\varphi']$. Y, obviamente, $\varphi(p_0, p_0) = \varphi'(p'_0, p'_0)$.

Recordamos que las formas φ y φ' son equivalentes cuando se cumple la condición (1).

Observación B''. (1) Como en la observación anterior, supongamos que

$$\varphi(p, q) = \varphi'(h(p), h(q)) \quad (1)$$

para algún isomorfismo afín $h: X \rightarrow X$.

Entonces, de las definiciones se sigue que

$$f_{p_0}(u) = f'_{h(p_0)}(\tilde{h}(u)) \quad (2a)$$

$$\tilde{\varphi}(u, v) = \tilde{\varphi}'(\tilde{h}(u), \tilde{h}(v)) \quad (2b)$$

para todo $p_0 \in X$ y todo $u, v \in \tilde{X}$.

Ahora sean $\mathcal{E} = \{p_0; u_1, \dots, u_n\}$ y $\mathcal{E}' = \{p'_0; u'_1, \dots, u'_n\}$ referencias cartesianas tales que h transforma \mathcal{E} en \mathcal{E}' (Es decir, $p'_0 = h(p_0)$, $u'_1 = \tilde{h}(u_1), \dots, u'_n = \tilde{h}(u_n)$)

Entonces, utilizando las igualdades anteriores y las expresiones que definen la matriz de una forma biafin, se comprueba que

$$M(\varphi; \mathcal{E}) = M(\varphi'; \mathcal{E}')$$

(2) Recíprocamente, supongamos que las referencias cartesianas $\mathcal{E} = \{p_0; u_1, \dots, u_n\}$ y $\mathcal{E}' = \{p'_0; u'_1, \dots, u'_n\}$ son tales que

$$M(\varphi; \mathcal{E}) = M(\varphi'; \mathcal{E}')$$

Consideramos el isomorfismo afín h que transforma \mathcal{E} en \mathcal{E}' . Entonces, por la hipótesis y la definición de h , es

$$\varphi(p_0, p_0) = \varphi'(h(p_0), h(p_0)) \quad (1')$$

y las igualdades (2a) y (2b) se cumplen para los vectores $u = u_i, v = u_j$, para todo i, j .

Ahora, como u_1, \dots, u_n son los elementos de una base, esas igualdades se cumplen para todos los vectores u, v .

Por último, utilizando las condiciones (1'), (2a) y (2b), se sigue de la expresión (3) de 1.3 que

$$\varphi(p, q) = \varphi'(h(p), h(q))$$

Es decir, las formas φ y φ' son equivalentes.

Teorema B.5.2 (Clasificación de las cuádricas afines reales). Sean $C, [\varphi]$ y $C', [\varphi']$ cuádricas de un espacio afín real, tales que las formas $\tilde{\varphi}$ y $\tilde{\varphi}'$ tienen rangos r y r' y signaturas l y l' . Entonces, las cuádricas son equivalentes en los casos siguientes:

(a') Si $r = r', l = l'$ y $\varphi(p_0, p_0)$ tiene el mismo signo que $\varphi'(p'_0, p'_0)$, donde p_0 y p'_0 son centros de $C, [\varphi]$ y $C', [\varphi']$.

(a'') Si $r = r', l = r' - l'$ y $\varphi(p_0, p_0)$ y $\varphi'(p'_0, p'_0)$ tienen signos opuestos.

(b) Si $r = r', l = l'$, o bien, $r = r', l = r' - l'$, y las cuádricas carecen de centros.

Dem. Utilizando las observaciones anteriores, demostraremos la parte del teorema referente a las cuádricas con centros.

Supongamos primero que las cuádricas son equivalentes.

Entonces, existen formas $\psi = \rho\varphi, \psi' = \rho'\varphi'$ tales que ψ y ψ' son equivalentes.

Por la observación B', si p_0 es centro de $C, [\varphi]$, entonces $C', [\varphi']$ tiene un centro p'_0 y $\psi(p_0, p_0) = \psi'(p'_0, p'_0)$. Además, $\bar{\psi}$ y $\bar{\psi}'$ verifican la relación (2b) de la observación B'', lo que indica que estas formas son equivalentes y, por tanto, tienen el mismo rango y la misma signatura.

En consecuencia, se cumplirán las condiciones de (a') , si en las relaciones $\psi = \rho\varphi, \psi' = \rho'\varphi'$, los coeficientes ρ y ρ' tienen el mismo signo; mientras que, si ρ y ρ' tienen signos opuestos, se cumplirán las condiciones de (a'') .

Recíprocamente, supongamos que se cumplen las condiciones de (a') ó (a'') .

Efectuando, si se cumple (a'') , un cambio de coordenadas obvio en alguna de las ecuaciones canónicas, podemos conseguir que las cuádricas tengan ecuaciones canónicas idénticas. Esto asegura que existen formas ψ y ψ' , proporcionales a φ y φ' , cuyas matrices en ciertas referencias son iguales.

Por tanto, por el segundo apartado de B'', las formas ψ y ψ' son equivalentes, con lo que $C, [\varphi]$ y $C', [\varphi']$ son cuádricas equivalentes. \square

Concluimos aquí la presentación de los resultados generales sobre las cuádricas afines que se utilizan en la sección 5.4. Para los resultados referentes a las ecuaciones canónicas y las clasificaciones de las cónicas y las superficies cuádricas, nos remitimos a lo expuesto en esa sección.

Apéndice C

Problemas propuestos

C.1. Problemas propuestos

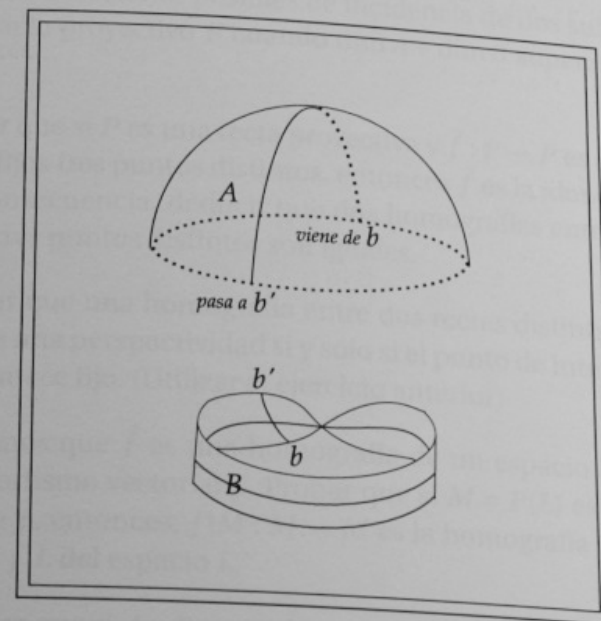


Figura de la página anterior. El plano proyectivo real está formado por los dos subconjuntos complementarios representados en la figura: un casquete esférico A y una banda de Möbius B .

El casquete A se completa a lo largo de la circunferencia dibujada con línea de puntos con la curva que forma el borde de la banda B .

En la figura se indican también dos rectas proyectivas distintas y el punto común a las mismas.

Problemas del capítulo 1

1. Sea M un subconjunto de un espacio proyectivo $P(E)$. Demostrar que M es una variedad proyectiva si, y sólo si, para dos puntos cualesquiera $a, b \in M$ el subespacio $V_p(a, b)$ está contenido en M .
2. Demostrar que si A, B, C son variedades proyectivas de un espacio P , entonces $V_p(A, B, C) = V_p(A, V_p(B, C))$.
3. Demostrar que si a_0, \dots, a_r son puntos de un espacio proyectivo, entonces $\dim V_p(a_0, \dots, a_r) = r$ si, y sólo si, $a_i \notin V_p(a_0, \dots, a_{i-1})$, para $1 \leq i \leq r$.
4. Demostrar que si H_1, \dots, H_r son hiperplanos de un espacio proyectivo n -dimensional, donde $n \geq r$, entonces $H_1 \cap \dots \cap H_r \neq \emptyset$.
5. Analizar las situaciones posibles de incidencia de dos planos proyectivos en un espacio de dimensión 4 ó 5.
6. Analizar las situaciones posibles de incidencia de dos subespacios A y B de un espacio proyectivo P cuando $\dim A + \dim B$ supera la dimensión de P .
7. Demostrar que si P es una recta proyectiva y $\tilde{f}: P \rightarrow P$ es una homografía que deja fijos tres puntos distintos, entonces \tilde{f} es la identidad.
Como consecuencia, deducir que dos homografías entre rectas, coincidentes en tres puntos distintos son iguales.
8. Demostrar que una homografía entre dos rectas distintas de un plano proyectivo es una perspectividad si y sólo si el punto de intersección de las rectas permanece fijo. (Utilizar el ejercicio anterior)
9. Supongamos que \tilde{f} es una homografía de un espacio $P(E)$, inducida por un isomorfismo vectorial f . Probar que si $M = P(L)$ es un subespacio invariante de \tilde{f} , entonces, $\tilde{f}|_M: M \rightarrow M$ es la homografía inducida por el isomorfismo $f|_L$ del espacio L .
10. Demostrar que si A y B son subespacios invariantes de una homografía, entonces las variedades $A \cap B$ y $V_p(A, B)$ son también invariantes.

11. Probar que $\mathcal{P} = \{(1:0:0), (1:-1:0), (0:2:-1); (3:-3:1)\}$ es una referencia proyectiva de $P(\mathbb{R}^3)$ y hallar una base asociada a \mathcal{P} . Determinar las coordenadas homogéneas en \mathcal{P} de un punto arbitrario $(x_0:x_1:x_2)$ de $P(\mathbb{R}^3)$.

12. Sea $\mathcal{P} = \{a, b, c; e\}$ una referencia proyectiva de $P(\mathbb{R}^3)$. Demostrar que para las referencias $\mathcal{P}' = \{c, e, b; a\}$ y $\mathcal{P}'' = \{e, c, a; b\}$, las matrices $M(\mathcal{P}'; \mathcal{P})$ y $M(\mathcal{P}''; \mathcal{P})$ son inversas (salvo proporcionalidad).

13. Sea $\mathcal{P} = \{a, b, c; e\}$ una referencia proyectiva de un plano P . En la recta $R = V_p(a, b)$ se considera una referencia $\mathcal{P}_1 = \{a, b; e'\}$. Precisar cómo debe elegirse e' para que cualquier punto de R , de coordenadas $(x_0:x_1:0)$ en \mathcal{P} tenga coordenadas $(x_0:x_1)$ en \mathcal{P}_1 .

14. Se consideran los puntos $a = (1:2:-1:1)$, $a' = (1:-1:2:-1)$, $b = (3:0:1:1)$, $b'_k = (-1:1:0:k)$ de $P(\mathbb{R}^4)$, donde k es un elemento arbitrario de \mathbb{R} . Hallar las ecuaciones de la recta $A = V_p(a, a')$ y del plano $M = V_p(a, a', b)$.

Si $B_k = V_p(b, b'_k)$, determinar los valores de k para que $A \cap B_k \neq \emptyset$, y los subespacios $V_p(A, B_k)$.

15. En $P(\mathbb{R}^5)$ se considera el subespacio M_1 engendrado por los tres puntos $(1:0:-1:0:1)$, $(0:1:0:1:-1)$, $(2:2:-2:1:2)$ y la variedad M_2 de ecuaciones $x_0 - x_1 + x_4 = 0$, $2x_0 + x_2 - x_3 = 0$, en la referencia proyectiva canónica. Obtener las ecuaciones de M_1 y un conjunto de generadores de M_2 . Determinar las variedades $M_1 \cap M_2$ y $V_p(M_1, M_2)$.

16. Demostrar que la aplicación proyectiva \tilde{f} de $P(\mathbb{R}^4)$ en $P(\mathbb{R}^4)$, definida por las ecuaciones $\rho x'_0 = x_0$, $\rho x'_1 = x_3$, $\rho x'_2 = x_2$, $\rho x'_3 = x_1$, es una proyección cónica. Hallar el centro y la imagen de la misma. Hallar también:

El subespacio imagen inversa del punto $(1:-1:0:-1)$.

Los subespacios imagen e imagen inversa de la recta de ecuaciones $x_1 = 0 = x_0 + x_2 + x_3$.

17. Determinar la homografía de $P(\mathbb{R}^3)$ que transforma la referencia del ejercicio 11 en la referencia $\{(1:0:1), (0:2:1), (0:0:1); (1:-1:0)\}$.

18. Una homografía de $P(\mathbb{R}^3)$ transforma las rectas de ecuaciones $x_0 = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ en las rectas de ecuaciones $x_0 - x_1 + x_2 = 0$, $x_0 + x_1 = 0$, $x_0 + 2x_2 = 0$, respectivamente, y deja fijo el punto $(1:1:1)$. Determinar las ecuaciones de dicha homografía.

19. Sean a, b, c, d cuatro puntos distintos de $P(\mathbb{R}^2)$. Demostrar que existe una homografía única de $P(\mathbb{R}^2)$, que transforma a, b, c, d en c, d, a, b , respectivamente.

20. Sean a, b, c, d cuatro puntos distintos de $P(\mathbb{R}^3)$ tales que $d \notin V_p(a, b, c)$. Probar que existe una homografía de $P(\mathbb{R}^3)$, que transforma a, b, c, d en b, c, a, d , respectivamente. ¿Es única esa homografía?

21. Determinar las ecuaciones de la proyección cónica de $P(\mathbb{R}^4)$ que tiene como centro e imagen las rectas de ecuaciones $x_0 + x_1 = 0 = x_2 + x_3$ y $x_1 = 0 = x_3$, respectivamente.

22. ("Teorema del eje proyectivo") En $P(\mathbb{R}^3)$ sean R y R' rectas distintas que se cortan en un punto o , y sea $\tilde{f}: R \rightarrow R'$ una homografía. Demostrar que existe una recta T en la que están todos los puntos $V_p(\alpha, \beta') \cap V_p(\beta, \alpha')$ tales que $\alpha, \beta \in R$, $\tilde{f}(\alpha) = \alpha'$, $\tilde{f}(\beta) = \beta'$.

La recta T se denomina eje de la homografía considerada \tilde{f} .

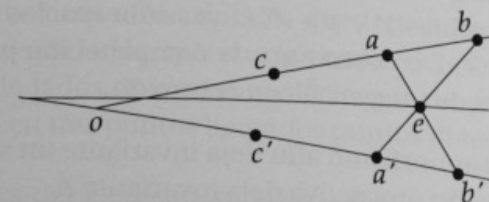


Figura C.1: Teorema del eje proyectivo

(Indicación: Elegir en $P(\mathbb{R}^3)$ una referencia $\mathcal{P} = \{o, a, a'; e\}$ y en R, R' referencias $\mathcal{P}_1 = \{o, a; b\}$, $\mathcal{P}'_1 = \{o, a'; b'\}$ tales que $\tilde{f}(a) = a'$, $\tilde{f}(b) = b'$ y e sea el punto común de $V_p(a, b')$ y $V_p(b, a')$).

23. Demostrar que si la homografía $\tilde{f}: R \rightarrow R'$ del ejercicio anterior es una perspectividad, entonces su eje pasa por el punto de intersección de R y R' .

24. Hallar los puntos fijos y las rectas invariantes de la homografía \tilde{f} de $P(\mathbb{R}^3)$ definida por las ecuaciones $\rho x'_0 = x_0 + x_2$, $\rho x'_1 = x_0 + 2x_1$, $\rho x'_2 = -x_0 - x_1$.

Una recta invariante R de \tilde{f} contiene a un punto fijo a_0 y al punto $a_2 = (0 : -1 : 1)$. Obtener las ecuaciones de $\tilde{f}|R : R \rightarrow R$, en la referencia de R formada por a_0 , $\tilde{f}^{-1}(a_2)$, a_2 . (Utilizar el ejercicio 9).

Problemas del capítulo 2

25. En el espacio proyectivo \tilde{X} , asociado a un espacio afín X , sea $M = P(L)$ un subespacio no contenido en el hiperplano X_∞ . Demostrar que $M \cap X$ es un subespacio afín de X , cuyo subespacio de dirección es $L \cap \tilde{X}$. Probar que M es la completación proyectiva de este subespacio afín.

26. Sean A y B subespacios afines de un espacio afín X . Probar que la completación proyectiva de $V(A, B)$ es $V_p(\tilde{A}, \tilde{B})$. Probar que si $A \cap B \neq \emptyset$, entonces la completación proyectiva de $A \cap B$ es $\tilde{A} \cap \tilde{B}$.

27. Se considera la proyección afín $g : X \rightarrow X$, de imagen Y y dirección \tilde{Z} . (Recordamos que g transforma un punto p en el punto de intersección de los subespacios afines Y y $p + \tilde{Z}$, cuyos subespacios de dirección son suplementarios en \tilde{X}) Demostrar que la completación proyectiva de g es la proyección cónica de imagen \tilde{Y} con centro Z_∞ .

28. Probar que un isomorfismo afín deja invariante un subespacio A si, y sólo si, su completación proyectiva deja invariante \tilde{A} .

29. Comprobar que $\mathcal{E} = \{(1, 2, -1); (1, 1, 0), (2, 1, 3), (0, 0, 1)\}$ es una referencia cartesiana de \mathbb{R}^3 . Hallar la referencia proyectiva $\tilde{\mathcal{E}}$, asociada a \mathcal{E} , y calcular las coordenadas homogéneas en $\tilde{\mathcal{E}}$ de un punto arbitrario de \mathbb{R}^3 .

30. Un isomorfismo afín $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ transforma $a = (-1, -1)$ en $a' = (1, -2)$ y a' en $a'' = (3, -1)$, y tiene una recta de puntos fijos paralela a la recta determinada por a, a' y a'' . Además, la completación proyectiva de f transforma la recta $r : x_0 + x_1 + x_2 = 0$ en la recta $r' : x_0 + x_1 + 4x_2 = 0$. Determinar las expresiones de f y \tilde{f} en las referencias canónicas.

31. Un isomorfismo afín $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ transforma $a = (1, 2)$ en $a' = (0, 1)$ y $b = (1, -1)$ en $b' = (3, 1)$. Además, la completación proyectiva de f deja fijos los puntos del infinito de las rectas $V(a, a')$ y $V(a', b)$. Obtener las ecuaciones de f y \tilde{f} en las referencias canónicas. Precisar si la restricción de f a la recta $V(a, a')$ es una traslación o una homotecia.

32. En un plano proyectivo P se consideran la figura siguiente, determinada por los puntos a, b, c, d , y la referencia $\mathcal{P} = \{a, b, n; o\}$. En el plano afín $X = P - V_p(b, c)$ sea \mathcal{E} la referencia cartesiana tal que $\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{P}$. Hallar las coordenadas de d y m en \mathcal{E} .

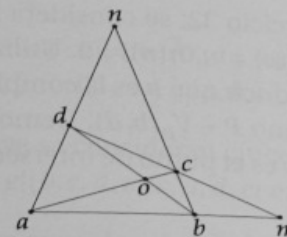


Figura C.2: Cuadrivértice

(La figura considerada se denomina cuadrivértice. Está formada por cuatro vértices distintos a, b, c, d , tales que tres cualesquiera de ellos no están alineados, y seis lados, que son las rectas determinadas por los vértices. Los pares de lados opuestos, es decir, que no pasan por un mismo vértice, se cortan en tres puntos llamados puntos diagonales)

33. Con los datos del ejercicio anterior, sean \tilde{f} la homografía de P que transforma a, b, n, o en m, b, n, d y \tilde{g} la homografía que transforma a, b, c, d en m, n, b, o , respectivamente. Deducir que existen isomorfismos afines f, g de X cuyas completaciones proyectivas son \tilde{f}, \tilde{g} .

34. Sea \tilde{f} la homografía de $P(\mathbb{R}^3)$ definida por las ecuaciones $\rho x'_0 = 2x_0 + x_2$, $\rho x'_1 = x_0 - x_1 - x_2$, $\rho x'_2 = -x_0$. Obtener los puntos fijos de dicha homografía. Probar que existe una transformación afín g de una recta A de \mathbb{R}^2 , que coincide con \tilde{f} sobre A . Precisar si g es una traslación o una homotecia.

35. En el plano afín $X = P(\mathbb{R}^3) - r$, donde r es la recta de ecuación $x_1 + x_2 = 0$ en la referencia proyectiva canónica, se considera la traslación que transforma el punto $(0 : 1 : 0)$ en $(-1 : 3 : 0)$. Determinar la completación proyectiva de dicha traslación.

36. Sea \tilde{f} la homografía de $P(\mathbb{R}^3)$ definida por las ecuaciones $\rho x'_0 = x_1 + x_2$, $\rho x'_1 = x_0 + x_2$, $\rho x'_2 = x_0 + x_1$. Demostrar que \tilde{f} tiene una recta de puntos fijos r , y su restricción al plano afín $P(\mathbb{R}^3) - r$ es una homotecia. Hallar el centro y la razón de dicha homotecia.

37. Con los datos del ejercicio 32, se considera la homografía \tilde{h} de P tal que $\tilde{h}(a) = m$, $\tilde{h}(m) = c$, $\tilde{h}(c) = n$, $\tilde{h}(n) = a$. Utilizando su matriz en la referencia $\mathcal{P} = \{a, b, n; o\}$, deducir que \tilde{h} es la completación proyectiva de un isomorfismo afín h del plano $P - V_p(b, d)$. Demostrar que $h \circ h$ es una simetría central, cuyo centro es el punto de intersección de las rectas $V(a, c)$ y $V(m, n)$.

38. En $P(\mathbb{R}^3)$ se consideran las rectas $A : x_0 = 0$, $A' : 2x_0 + x_1 + x_2 = 0$ y $B : x_1 + x_2 = 0$. En el plano afín $X = P(\mathbb{R}^3) - B$ una aplicación $f \in \text{HT}(X)$ transforma la recta $A \cap X$ en $A' \cap X$ y lleva el punto $p_0 = (1 : 2 : 0)$ al punto $p'_0 = (0 : 1 : 1)$ de la recta A . Determinar las ecuaciones de la completación proyectiva de f , calculando previamente la imagen de p'_0 . Precisar si f es una traslación o una homotecia.

39. (Dilataciones y transvecciones) Sea $f : X \rightarrow X$ un isomorfismo afín que deja fijos todos los puntos de un hiperplano Y (Con lo que su completación proyectiva h es una homología de base \tilde{Y}). Probar que:

Toda recta D determinada por un punto a de X y su imagen a' es invariante por f .

- Si $aa' \notin \tilde{Y}$, entonces f induce en D una homotecia cuya razón k es la característica de h . (En este caso, decimos que f es una dilatación de base Y , dirección \tilde{D} y razón k)

- Si $aa' \in \tilde{Y}$, entonces la transformación inducida por f en D es una traslación, y h es una elación. (En este caso, decimos que f es una transvección de base Y y dirección \tilde{D})

40. En la situación del ejercicio anterior, sea $\varphi : X \rightarrow K$ una forma afín tal que $Y = \varphi^{-1}(0)$. Probar que $f(p) = p + \varepsilon \varphi(p)aa'$, para todo p , donde ε es una constante.

Problemas del capítulo 3

41. En $P(\mathbb{R}^2)$ sean $a = (1 : -1)$, $b = (3 : -1)$, $c = (1 : 0)$, $d = (2 : 1)$. Hallar la razón doble $[a, b, c, d]$. Dado $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0, 1$, hallar el punto d_k tal que $[a, b, c, d_k] = k$.

42. En $P(\mathbb{R}^3)$ sean $a = (1 : -1 : 0)$, $b = (0 : 1 : -1)$, $c = (1 : 1 : -2)$. Hallar los puntos c' y d tales que $[a, b, c, d] = -\frac{1}{2}$ y $[a, b, c', d] = -\frac{2}{3}$.

43. En una recta proyectiva se consideran cinco puntos distintos a, b, c, d, e . Demostrar que $[a, b, d, e][b, c, d, e][c, a, d, e]$ es igual a 1.

44. En una recta afín X se considera la cuaterna de puntos a, b, c, d , y designamos también por a, b, c, d las coordenadas respectivas en una referencia cartesiana de origen p_0 . Demostrar que:

Si $p_0 = a$, la cuaterna es armónica si, y sólo si, $\frac{2}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$.

Si $p_0 = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, la cuaterna es armónica si, y sólo si, $a^2 = cd$.

45. Sea $\mathcal{P} = \{a, b, c\}$ una referencia proyectiva de una recta P . Deducir que \mathcal{P} está asociada a la referencia cartesiana $\mathcal{E} = \{a; ac\}$ de la recta afín $X = P - \{b\}$. Demostrar que la coordenada de un punto p de X en la referencia \mathcal{E} coincide con la razón doble $[a, b, c, p]$.

46. Sea $\mathcal{P} = \{a, b, c; e\}$ una referencia de un plano proyectivo P . Sea \mathcal{E} la referencia cartesiana del plano afín $X = P - V_p(b, c)$ asociada a \mathcal{P} , como en la demostración de 2.4.6. Demostrar que las coordenadas de un punto p de X en la referencia \mathcal{E} son las razones dobles $[a, b, e', p']$, $[a, b, e'', p'']$, donde p' y p'' son los puntos de las intersecciones $V_p(a, b) \cap V_p(c, p)$ y $V_p(a, c) \cap V_p(b, p)$, respectivamente.

47. Sean a, b, c, d y a', b', c', d' dos cuaternas de puntos de dos rectas diferentes que se cortan en a . Demostrar que las rectas $V_p(b, b')$, $V_p(c, c')$

y $V_p(d, d')$ pasan por un mismo punto si y sólo si $[a, b, c, d]$ coincide con $[a, b', c', d']$.

48. (Teorema de Ceva) En un plano afín tres rectas que pasan por los vértices a, b, c de un triángulo cortan a los lados opuestos respectivos en puntos α, β, γ , que se suponen distintos de los anteriores. Demostrar que las tres rectas son concurrentes si, y sólo si, $[\alpha, b, c][\beta, c, a][\gamma, a, b] = -1$.

Enunciar una versión proyectiva del teorema, haciendo uso de la razón doble.

49. (Teorema de Menelao) En un plano afín, sean a, b, c los vértices de un triángulo y α, β, γ tres puntos situados en los lados opuestos respectivos, que se suponen distintos de los anteriores. Demostrar que α, β, γ están alineados si, y sólo si, $[\alpha, b, c][\beta, c, a][\gamma, a, b] = 1$.

Enunciar una versión proyectiva del teorema, haciendo uso de la razón doble.

50. Supongamos que en un plano afín se tiene el cuadrivértice del problema 32, y las rectas $V(a, b)$ y $V(n, o)$ se cortan en un punto m' . En esta situación sabemos que la cuaterna a, b, m, m' es armónica. Probar que esta propiedad se sigue de los teoremas de Menelao y Ceva para el triángulo de vértices a, b, n , los puntos alineados c, d, m y las rectas que unen a, b, n con el punto o .

51. En un plano proyectivo se considera para cada vértice de un triángulo dado una recta que lo contiene, tomándose el punto de intersección de la misma con el lado opuesto y su conjugado armónico respecto de los vértices pertenecientes a ese lado. Probar que los conjugados armónicos así obtenidos están alineados si y sólo si las rectas de partida son concurrentes. (Fig C.3)

52. En un plano proyectivo sean r y r' rectas distintas que se cortan en un punto o , y supongamos que $h: r \rightarrow r'$ es una perspectividad de centro c y eje t (Ejercicios 22 y 23). Demostrar que la cuaterna de rectas $r, r', V_p(o, c), t$ es armónica.

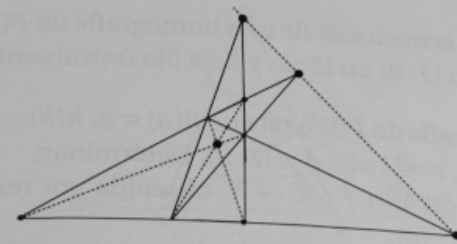


Figura C.3: (Problema 51)

53. (Homografías entre haces de rectas) Sea $F: \mathcal{F}_a \rightarrow \mathcal{F}_c$ una aplicación biyectiva entre los haces de rectas de bases $\{a\}$ y $\{c\}$ de un plano proyectivo. (Recordamos de la observación anterior a 3.3.2 que se tiene una identificación $\Delta(a) \equiv \mathcal{F}_a$) Probar que la aplicación $F': \Delta(a) \rightarrow \Delta(c)$, $\Delta(r) \mapsto \Delta(F(r))$, es una homografía si, y sólo si, F conserva las razones dobles.

Cuando se cumplen estas condiciones equivalentes, decimos que F es una homografía entre los haces de rectas.

54. (Perspectividades entre haces de rectas) En la situación del ejercicio anterior, supongamos que $F: \mathcal{F}_a \rightarrow \mathcal{F}_c$ es una homografía. Utilizando el ejercicio 8 y la dualidad canónica, deducir que F deja fija la recta $V_p(a, c)$ si y sólo si, existe una recta s tal que cada recta $r \in \mathcal{F}_a$ y su transformada $F(r)$ se cortan en un punto de s .

Cuando se cumplen estas condiciones equivalentes, decimos que F es una perspectividad entre los haces considerados.

Problemas del capítulo 4

HOMOGRAFÍAS DE LA RECTA Y EL PLANO

55. Una homografía h de la recta $P(\mathbb{R}^2)$ deja fijos los puntos $a = (1:0)$ y $b = (1:-1)$. Sabiendo que $[a, b, c, h(c)] = 2$ para $c = (1:1)$, determinar las ecuaciones de h en la referencia canónica.

56. Determinar las ecuaciones de una homografía de $P(\mathbb{R}^2)$, sabiendo que transforma el punto $(1:2)$ en $(2:5)$ y deja fijo únicamente el punto $(0:1)$.

57. Sea h la homografía de $P(\mathbb{R}^2)$ tal que $h(a) = a$, $h(b) = c$, $h(c) = d$, donde $a = (1:0)$, $b = (0:1)$, $c = (1:1)$, $d = (2:3)$. Determinar:

La transformación afín $f: X \rightarrow X$, obtenida por restricción de h a la recta afín $X = P(\mathbb{R}^2) - \{a\}$.

La coordenada del punto $f(d)$ en la referencia cartesiana $\{c; bc\}$.

58. Sea h una biyección de la recta proyectiva $P(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ en sí misma tal que $h(0) = \infty$. Demostrar que h es una homografía involutiva si, y sólo si, para todo $x \neq 0$ en \mathbb{R} , el producto $xh(x)$ tiene un valor constante.

59. Sean h y h' homografías de una recta proyectiva, cuyos puntos fijos respectivos a, b y a', b' son todos distintos. Comprobar que si $h' \circ h = h \circ h'$, entonces los puntos fijos de h están en involución con respecto a h' . Demostrar que $h' \circ h = h \circ h'$ si, y sólo si, ambas homografías son involutivas y $[a, b, a', b'] = -1$.

60. (Teorema de Desargues) En un plano proyectivo se considera un cuadrivértice (problema 32) y una recta R que no contiene a ninguno de los vértices ni puntos diagonales del mismo. Demostrar que R corta a los pares de lados opuestos en pares de puntos $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$, tales que α', β', γ' son las imágenes de α, β, γ por una homografía involutiva. (Figura C.4)

(Indicación: Utilizando el ejercicio 47, demostrar que las razones dobles $[\alpha, \beta, \gamma, \beta']$ y $[\gamma', \beta, \alpha', \beta']$ en R coinciden con $[b, e, c, \beta']$ en $V_p(b, c)$. Se tiene entonces $[\alpha, \beta, \gamma, \beta'] = [\alpha', \beta', \gamma', \beta]$, y el resultado se sigue de inmediato)

61. Determinar los subespacios invariantes de la homografía de $P(\mathbb{R}^3)$ definida por las ecuaciones $\rho x'_0 = -2x_1 + 4x_2$, $\rho x'_1 = 9x_0 - 6x_1$, $\rho x'_2 = 6x_2$. Hallar la matriz de Jordan y una base de Jordan de un isomorfismo que induzca la homografía.

62. Demostrar que la homografía de $P(\mathbb{R}^3)$ definida por las ecuaciones $\rho x'_0 = 3x_0$, $\rho x'_1 = 3x_1$, $\rho x'_2 = -x_0 - 2x_1 + x_2$ es una homología. Hallar su vértice, base y característica.

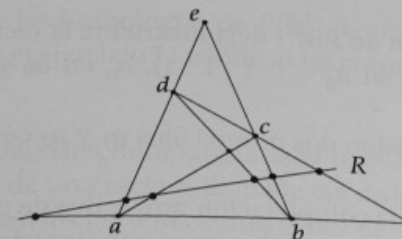


Figura C.4: En R se indican $\alpha, \beta, \gamma, \gamma', \beta', \alpha'$

63. Determinar una homología de $P(\mathbb{R}^3)$, cuya base es la recta de ecuación $x_0 + x_1 - 2x_2 = 0$, sabiendo que el vértice es el punto $(1:1:0)$ y el transformado de $(0:1:-1)$ es $(1:0:1)$.

64. Determinar una homología de $P(\mathbb{R}^3)$, sabiendo que el vértice está contenido en la base y las rectas $r: x_0 + x_1 = 0$ y $s: x_0 - x_1 = 0$ se transforman en $r': x_0 + x_2 = 0$ y $s': x_0 - x_2 = 0$, respectivamente.

65. Estudiar cómo debe elegirse una referencia proyectiva para que una homología del plano $P(\mathbb{R}^3)$ esté representada en la misma por su matriz canónica.

66. Sean h_1 y h_2 homografías involutivas de un plano proyectivo, tales que el vértice de cada una de ellas está contenido en la base de la otra. Probar que $h_2 \circ h_1$ es una homología involutiva, y determinar su base y su vértice.

67. Para todo $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ sea $h = h_a$ la homografía de $P(\mathbb{R}^3)$ definida por las ecuaciones $\rho x'_0 = x_0 + x_2$, $\rho x'_1 = -x_0 + ax_1 + x_2$, $\rho x'_2 = -x_0 + 3x_2$. Hallar una matriz de Jordan correspondiente a h . Hallar la base y el vértice de h cuando h es una homología.

68. Una homografía involutiva h de $P(\mathbb{R}^3)$ deja invariantes los puntos $a_0 = (1:-1:0)$ y $b_0 = (0:1:0)$ y la recta $r: x_0 + x_1 + 3x_2 = 0$, que contiene a a_0 . Además, el punto $c = (0:3:-1)$ de r se transforma en $c' = (4:-1:-1)$. Precisar si h está determinada de manera única y de qué tipo es su matriz de Jordan. Hallar las rectas invariantes.

69. Una homografía h de $P(\mathbb{R}^3)$ deja invariante la recta $r: x_0 = 0$, y transforma $a_0 = (1:1:1)$ en $a'_0 = (-1:1:1)$, a'_0 en a_0 y $s: x_0 - 2x_1 = 0$ en $s': x_0 + 2x_1 = 0$.

Demostrar que existen dos puntos fijos a_1 y a_2 contenidos en la recta r .

Sabiendo que h es la completación proyectiva de una simetría axial de \mathbb{R}^2 , hallar sus ecuaciones en la referencia canónica y las rectas invariantes.

70. Una homografía h de $P(\mathbb{R}^3)$ transforma el punto $a_1 = (1:1:0)$ y la recta $r_1: x_1 - 3x_2 = 0$ en el punto $a_2 = (1:-1:0)$ y la recta $r_2: x_0 - 3x_2 = 0$, respectivamente. Además, se verifica que $h(a_2) = a_1$ y $h(r_2) = r_1$.

Demostrar que existen puntos $b_1 \in r_1$ y $b_2 \in r_2$ tales que las restricciones de $h \circ h$ a las rectas afines $r_1 - \{b_1\}$ y $r_2 - \{b_2\}$ son homotecias que tienen la misma razón.

Suponiendo que el punto $(5:3:1)$ de r_1 se transforma en $(3:-1:1)$, determinar las ecuaciones de h , sus rectas invariantes y la razón común de las homotecias citadas en el apartado anterior.

HOMOGRAFÍAS DEL ESPACIO DE DIMENSIÓN 3

71. Escribir las distintas matrices de Jordan de orden 4 sobre \mathbb{R} que tienen al menos dos bloques elementales del tipo $J_1(\lambda) = (\lambda)$ correspondientes al mismo valor propio λ , y cuyo polinomio característico es de la forma $(x - \lambda)^2 Q(x)$, donde $Q(x)$ tiene alguna raíz real. Utilizar esas matrices para determinar los subespacios invariantes de las homografías de $P(\mathbb{R}^4)$ representadas por las mismas.

72. Sea h la homografía de $P(\mathbb{R}^4)$ definida por las ecuaciones $\rho x'_0 = 3x_0 + x_1 + 2x_3$, $\rho x'_1 = -x_0 + x_1 - 2x_3$, $\rho x'_2 = 2x_2 - x_3$, $\rho x'_3 = 2x_3$.

Determinar los puntos fijos de h .

Hallar la matriz de la restricción de h al plano invariante $M: x_0 + x_1 + 3x_3 = 0$, en la referencia formada por los puntos $(1:-1:0:0)$, $(0:0:1:0)$, $(1:2:0:-1)$, $(0:3:-1:-1)$.

Admitiendo que la restricción de h a M es una homología, calcular el vértice.

73. Comprobar que las homologías de $P(\mathbb{R}^4)$ figuran entre las homografías consideradas en el ejercicio 71 e indicar las correspondientes matrices canónicas.

74. (Homografía axial) Una homografía axial h de $P(\mathbb{R}^4)$ es aquella cuyos puntos fijos son los de una recta r , llamada eje de la homografía, y cuyos planos invariantes son los pertenecientes al haz de base r . Comprobar que estas homografías figuran entre las consideradas en el ejercicio 71 e indicar las correspondientes matrices canónicas.

Probar que si $h(p) = p'$, $p \neq p'$, donde h es una homografía axial, entonces la recta $V_p(p, p')$ es invariante e incidente con el eje de h .

75. Determinar una homografía axial, sabiendo que su eje es la recta $r: x_0 + x_1 = 0 = x_3$ y la recta $s: x_0 = 0 = x_2$ se transforma en $s': x_0 - x_1 + 4x_2 = 0 = 2x_2 + x_3$.

76. (Homografía biaxial) Una homografía biaxial h de $P(\mathbb{R}^4)$ es aquella cuyos puntos fijos son los pertenecientes a dos rectas suplementarias. Estas rectas se llaman ejes de la homografía. Comprobar que las homografías biaxiales figuran entre las consideradas en el ejercicio 71 e indicar las correspondientes matrices canónicas.

Probar que si $h(p) = p'$, $p \neq p'$, donde h es una homografía biaxial, entonces la recta $V_p(p, p')$ es invariante e incidente con los ejes de h .

77. Sean h_1 y h_2 homologías involutivas de $P(\mathbb{R}^4)$, tales que el vértice de cada una de ellas está contenido en la base de la otra. Probar que $h_2 \circ h_1$ es una homografía biaxial involutiva.

78. Sean X un espacio afín, Y un subespacio afín de X , \bar{Z} un subespacio vectorial suplementario de \bar{Y} en \bar{X} y k un escalar distinto de 0 y 1. Llamamos dilatación de base Y , dirección \bar{Z} y razón k al isomorfismo afín $f: X \rightarrow X$ que deja fijos los puntos de Y e induce en cada subespacio afín de dirección \bar{Z} una homotecia de razón k cuyo centro pertenece a Y . (En particular, cuando Y es un hiperplano, se obtienen las dilataciones consideradas en los ejercicios 39 y 40).

Si la dimensión de X es 3 y f es una dilatación cuya base es una recta, demostrar que la completación proyectiva de f es una homografía biaxial.

CORRELACIONES DEFINIDAS POR FORMAS BILINEALES

79. Sea Φ la correlación de un espacio $P(E)$ en sí mismo definida por una forma bilineal regular ϕ . Cuando esta forma es simétrica o antisimétrica, decimos que Φ es simétrica o antisimétrica, respectivamente. Demostrar que Φ coincide con su inversa si, y sólo si, es simétrica o antisimétrica.

80. Demostrar que si Φ es una correlación antisimétrica de un espacio $P(E)$, entonces $p \in \Phi(p)$, para todo punto p . Probar que para un espacio proyectivo real también se cumple el recíproco.

81. En $P(\mathbb{R}^3)$ sean a_0, a_1, a_2 los vértices de un triángulo y r_0, r_1, r_2 los respectivos lados opuestos. Demostrar que existe una correlación simétrica única que transforma a_0, a_1, a_2, a en r_0, r_1, r_2, r , siendo a un punto no situado en los lados del triángulo y r una recta no incidente con ninguno de sus vértices.

82. Demostrar que existe una correlación simétrica única de $P(\mathbb{R}^3)$, que transforma cada vértice de un pentágono dado en el lado opuesto a dicho vértice.

83. Determinar la expresión analítica de una correlación de $P(\mathbb{R}^3)$, sabiendo que los puntos $(1:0:0)$, $(1:-2:1)$, $(0:2:1)$, $(1:-2:0)$ se transforman en las rectas de ecuaciones $x_0 - x_1 = 0$, $x_0 + x_2 = 0$, $x_0 - x_1 + x_2 = 0$, $x_0 = 0$, respectivamente. Hallar el punto transformado de la recta $x_0 = 0$.

84. Una correlación de $P(\mathbb{R}^3)$ transforma las rectas definidas por las ecuaciones $x_0 - x_1 = 0$, $x_0 + x_2 = 0$, $x_0 - x_1 + x_2 = 0$ en los puntos $(1:1:0)$, $(1:-1:-2)$, $(0:1:2)$, respectivamente. Sabiendo que el punto $(1:0:0)$ se transforma en la recta $4x_1 - 3x_2 = 0$, obtener las ecuaciones de dicha correlación. Hallar el punto que se transforma en la recta $x_0 - x_1 = 0$.

85. Una correlación simétrica del espacio $P(\mathbb{R}^4)$ transforma los puntos $a_0 = (1:0:0:0)$ y $a_1 = (0:1:0:0)$ en los planos $M_0: 4x_0 - x_1 - 2x_2 = 0$ y $M_1: x_0 - x_1 - 2x_3 = 0$, respectivamente, y la recta $R: x_0 = 0 = x_1$ en $R': 2x_0 + 2x_1 - x_2 = 0 = 2x_0 + 4x_1 + x_3$. Determinar las ecuaciones de la correlación.

86. Una correlación simétrica de $P(\mathbb{R}^4)$ aplica en sí mismas las rectas $r: x_1 = 0 = x_2 - x_3$ y $s: x_1 = 0 = x_2 + x_3$ y transforma los puntos $(0:0:1:1)$ y $(0:0:1:-1)$ de r y s en planos incidentes con $(0:1:0:0)$. Sabiendo que el transformado del punto $(0:1:1:0)$ es el plano de ecuación $x_0 + x_2 = 0$, obtener la expresión analítica de la correlación.

Problemas de los capítulos 5 y 6

CUÁDRICAS PROYECTIVAS

87. Comprobar que la cuádrica de $P(\mathbb{R}^4)$ de ecuación $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ tiene un único punto singular p_0 . Demostrar que:

Si $p_1 \neq p_0$ es un punto de la cuádrica (cono), entonces $V_p(p_0, p_1)$ es una recta contenida en la cuádrica.

Para todo punto $p \neq p_0$ de la recta anterior, los planos tangentes T_{p_1} y T_p son coincidentes.

88. Demostrar que la cuádrica regular de $P(\mathbb{R}^4)$ definida por la ecuación $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ (llamada cuádrica elíptica) no contiene a ninguna recta.

89. (Generatrices de la cuádrica hiperbólica) Se considera la cuádrica regular de $P(\mathbb{R}^4)$ de ecuación $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ (llamada cuádrica hiperbólica o reglada). Para todo $u = (u_0, u_1)$ distinto de $(0,0)$ en \mathbb{R}^2 , definimos la recta

$$G_u: \begin{cases} u_0(x_0 + x_1) = u_1(x_2 + x_3) \\ u_1(x_0 - x_1) = u_0(x_2 - x_3) \end{cases}$$

Demostrar que dichas rectas están contenidas en la cuádrica y cada punto de ésta pertenece a una única recta de la familia (G_u) .

Probar el resultado análogo, para la familia de rectas (G'_v) , donde

$$G'_v: \begin{cases} v_0(x_0 - x_1) = v_1(x_2 + x_3) \\ v_1(x_0 + x_1) = v_0(x_2 - x_3) \end{cases}$$

para todo $v = (v_0, v_1)$ distinto de $(0,0)$ en \mathbb{R}^2 .

90. Sean (G_u) y (G'_v) las dos familias de generatrices de la cuádrica hiperbólica, como en el ejercicio anterior. Deducir que dos generatrices se cortan en un punto único si no pertenecen a la misma familia y son disjuntas en caso contrario. Deducir que si G_u y G'_v se cortan en p , entonces el plano determinado por G_u y G'_v coincide con el plano tangente T_p .

91. Sea $C, [\phi]$ una cuádrica singular de un espacio $P(E)$. Sea entonces $P(L)$ un subespacio suplementario de $P(N)$, donde N es el núcleo de la forma ϕ . Probar que $C, [\phi]$ está totalmente determinada por su subespacio singular $P(N)$ y la cuádrica regular intersección de $C, [\phi]$ con el subespacio $P(L)$.

Demostrar que, si la imagen de esta intersección es C' y \tilde{g} es la proyección cónica de $P(E)$ sobre $P(L)$ con centro $P(N)$, entonces $C = \tilde{g}^{-1}(C') \cup P(N)$.

92. Dada la cuádrica de $P(\mathbb{R}^4)$ de ecuación $x_0^2 + x_1^2 + x_3^2 + x_0x_2 - x_1x_2 + 2x_1x_3 - x_2x_3 = 0$, hallar el plano tangente en el punto $(1 : 2 : -1 : -2)$. Determinar la cónica intersección de la cuádrica con dicho plano.

Determinar a para que la recta $r_a : x_0 - x_1 + ax_2 = 0 = 2x_0 + x_3$ sea tangente a la cuádrica.

93. Determinar las rectas de $P(\mathbb{R}^3)$ que son tangentes a la cónica de ecuación $x_0^2 - 2x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_0x_2 - 4x_1x_2 = 0$ y pasan por el punto $(2 : 2 : -1)$.

94. Dadas las cónicas $C_a : -4x_0^2 + x_1^2 + ax_2^2 - 4ax_0x_2 + 2x_1x_2 = 0$, $a \in \mathbb{R}$, hallar las rectas tangentes en el punto $p_1 = (1 : -2 : 0)$. Sabiendo que T_{p_1} contiene al punto $(0 : 1 : -1)$, encontrar la otra tangente que pasa por este mismo punto.

Hallar los polos de la recta $x_0 = 0$ respecto de las cónicas regulares consideradas, y comprobar que todos ellos están en una misma recta.

95. Determinar la recta polar de la recta $r : x_0 - 2x_3 = 0 = 2x_1 - x_2 - x_3$ de $P(\mathbb{R}^4)$ respecto a la cuádrica de ecuación $4x_1^2 + x_3^2 - 2x_0x_2 = 0$. Hallar los planos tangentes a la cuádrica que contienen a la recta r .

96. Supongamos que en el enunciado de 5.2.3 es $R = \{p_0\}$, donde $p_0 = [u_0]$. Probar que la unión de las rectas $V_p(p_0, p_1)$ tangentes a $C, [\phi]$ en los puntos $p_1 \in C \cap \Phi(p_0)$ está formada por los puntos $[u]$ tales que $\phi(u_0, u_0)\phi(u, u) -$

$\phi(u_0, u)^2 = 0$. (Es decir, dicha unión es la imagen de la cuádrica $C', [\phi']$, donde $\phi'(u, v) = \phi(u_0, u_0)\phi(u, v) - \phi(u_0, u)\phi(u_0, v)$.)

97. En $P(\mathbb{R}^3)$ se considera la cónica de ecuación $4x_0^2 + 4x_1^2 + x_2^2 - 2x_0x_2 - 4x_1x_2 = 0$. Obtener la expresión de la homografía subordinada por la cónica sobre la recta $r : 2x_1 - x_2 = 0$, en la referencia de ésta formada por los puntos $(1 : 0 : 0)$, $(0 : 1 : 2)$, $(1 : 1 : 2)$.

98. La polaridad asociada a una cuádrica $C, [\phi]$ de $P(\mathbb{R}^4)$ transforma el punto $(0 : 0 : 1 : -1)$ en el plano $M : 2x_0 - x_2 - x_3 = 0$ y la recta $R : x_0 = 0 = x_3$ en $R' : 2x_0 + 2x_1 - x_2 = 0 = x_0 - 2x_2 - 2x_3$. Determinar la ecuación de la cuádrica, sabiendo que el plano de ecuación $x_1 - 2x_2 = 0$ es tangente a la misma en el punto $(1 : 0 : 0 : 0)$.

CUÁDRICAS AFINES Y PROYECTIVAS

99. En el plano afín \mathbb{R}^2 se considera la cónica de ecuación $x^2 + 2xy - 4y - 3 = 0$. Comprobar que la recta $r : y + 1 = 0$ es tangente a la cónica y hallar otra tangente paralela a r .

100. Dada la cuádrica de \mathbb{R}^3 definida por la ecuación $4x^2 - 4y^2 + 8xz - 4x + 9 = 0$, determinar los planos tangentes paralelos al de ecuación $x + 2y = 0$.

101. Establecer los resultados similares a los del ejercicio 89 para el hiperboloide hiperbólico de ecuación $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$.

102. Comprobar que el paraboloide hiperbólico de ecuación $x^2 - y^2 + 2z = 0$ contiene a todas las rectas de las familias (G_u) y (G'_v) , $u, v \in \mathbb{R}$, donde

$$G_u \left\{ \begin{array}{l} x + y = 2u \\ u(x - y) = -z \end{array} \right. \quad G'_v \left\{ \begin{array}{l} x - y = -2v \\ v(x + y) = z \end{array} \right.$$

Determinar la simetría afín de \mathbb{R}^3 respecto de la generatriz G_u en la dirección del plano $x - y = 0$, y demostrar que dicha simetría transforma la cuádrica en sí misma. Y análogamente para las generatrices G'_v y el plano $x + y = 0$.

103. Demostrar que el subespacio de los centros de una cuádrica afín es paralelo al hiperplano tangente en cualquier punto regular.

104. Demostrar que toda cuádrica que contiene a uno de sus centros es degenerada.

105. Demostrar que si una cuádrica regular tiene centro, entonces su cuádrica del infinito también es regular.

106. Sea $C, [\varphi]$ una cuádrica de un espacio afín X con un centro p_0 . Probar que un diámetro $A = p_0 + Ku$ de $C, [\varphi]$ es una asíntota si, y sólo si, la recta \tilde{A} es tangente en $[u]$ a la cuádrica $\tilde{C}, [\tilde{\varphi}]$.

107. Demostrar que cualquier recta tangente a una hipérbola corta a las asíntotas en dos puntos cuyo punto medio coincide con el de tangencia.

108. Sean $C, [\varphi]$ una cuádrica afín regular y D un diámetro de la misma que corta a C . Demostrar que $C \cap D$ consta de dos puntos en los que los hiperplanos tangentes son paralelos al hiperplano diametral H , conjugado de D .

Probar que \tilde{H} es el hiperplano polar de D_∞ en la polaridad asociada a la completación proyectiva de $C, [\varphi]$.

109. En $P(\mathbb{R}^4)$ un plano tangente corta a una cuádrica regular en una cónica no regular. (Justificar). Utilizando los ejercicios 88 y 90 probar que esta cónica es un punto doble o un par de rectas, según que la cuádrica sea elíptica o hiperbólica.

Análogamente, probar que la cónica intersección de un cono con un plano tangente en cualquier punto regular es una recta doble.

110. De una cónica regular de \mathbb{R}^2 se sabe que su centro es el punto $(0,0)$. Además, en la polaridad asociada a su completación en $P(\mathbb{R}^3)$, las rectas polares de los puntos $(0:1:0)$ y $(0:0:1)$ pasan por los puntos $(1:1:0)$ y $(0:1:2)$, respectivamente. Hallar las ecuaciones de las cónicas afines que cumplen esas condiciones y clasificarlas.

111. En $P(\mathbb{R}^4)$ se consideran las cuádricas $C_{a,b} : ax_0^2 + x_1^2 + x_3^2 + 2x_0x_3 - 2x_1x_2 + 2bx_2x_3 = 0$. Determinar a y b para que la polaridad correspondiente transforme en sí misma la recta $r : x_0 - x_1 = 0 = x_0 + x_3$.

De una cuádrica de \mathbb{R}^3 correspondiente a una de las anteriores se sabe que contiene al origen y tiene su centro en el plano $x_1 = 0$. Clasificarla y hallar el centro.

112. Clasificar las cónicas de \mathbb{R}^2 definidas por las ecuaciones siguientes, así como sus completaciones proyectivas:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 4x - 8y + 4 &= 0, & 4x^2 + y^2 - 4xy - 2y + 4 &= 0, \\ y^2 + xy + 2x - 2y - 6 &= 0, & x^2 + 4y^2 - 4xy + 2x - 4y - 3 &= 0. \end{aligned}$$

113. Clasificar las cuádricas de \mathbb{R}^3 definidas por las ecuaciones siguientes, así como sus completaciones proyectivas:

$$\begin{aligned} 4x^2 + z^2 - 2xy + 2y + 4 &= 0 \\ x^2 + z^2 - xy + 2xz - yz + x + 1 &= 0 \\ x^2 - y^2 + 4xz + 2yz + 2y - 2z - 1 &= 0 \\ x^2 + y^2 + 4z^2 - 2xy + 4xz - 4yz - 4y &= 0 \\ x^2 - 2z^2 - xz + x + z &= 0 \end{aligned}$$

114. (Cuádricas en espacios complejos) Toda forma bilineal simétrica sobre un espacio vectorial (E, \mathbb{C}) está representada por una matriz diagonal canónica, cuyos elementos no nulos son iguales a 1. Además, dos de estas formas son equivalentes si y sólo si tienen el mismo rango.

Utilizando estas propiedades, probar que en un espacio proyectivo complejo:

Toda cuádrica tiene una ecuación canónica del tipo $x_0^2 + \dots + x_{r-1}^2 = 0$.

Dos cuádricas $C, [\phi]$ y $C', [\phi']$ son equivalentes si y sólo si las formas ϕ y ϕ' tienen el mismo rango.

115. (Cuádricas en espacios complejos) Establecer para un espacio complejo los resultados referentes a las ecuaciones canónicas y la clasificación de las cuádricas afines, similares a los dados para las cuádricas afines reales en los teoremas 5.4.8 y 5.4.11.

116. Como en el ejercicio 90, se considera la cuádrica hiperbólica $C, [\phi]$ y sus dos familias de generatrices (G_u) y (G'_v) . Deducir que la aplicación $F: P(\mathbb{R}^2) \times P(\mathbb{R}^2) \rightarrow C$, que asigna al par (u, v) , en el que $u = (u_0 : u_1)$, $v = (v_0 : v_1)$, el punto de intersección de G_u y G'_v , es una biyección. Por tanto, interpretando $P(\mathbb{R}^2)$ como una circunferencia S , se tiene una biyección entre el conjunto C y la superficie (toro) $S \times S$.

117. Sea $C, [\phi]$ una cuádrica hiperbólica de $P(\mathbb{R}^4)$. Supongamos que los puntos a_0, a_1, a_2, a_3 de una referencia \mathcal{P} , distintos del punto unidad, son tales que a_0, a_1 y a_2, a_3 determinan dos generatrices de la cuádrica y lo mismo a_1, a_2 y a_0, a_3 . Probar que en la referencia \mathcal{P} la cuádrica tiene una ecuación reducida del tipo $ax_0x_2 + bx_1x_3 = 0$. En particular, la ecuación es $x_0x_2 - x_1x_3 = 0$, si el punto unidad de \mathcal{P} pertenece a C .

118. Demostrar que en una cuádrica hiperbólica todo plano que contiene a una generatriz es tangente a la cuádrica.

119. Demostrar que existe una cuádrica hiperbólica única que contiene a tres rectas dadas que son disjuntas dos a dos.

120. Supongamos que la cónica regular que interviene en el teorema de Pascal se sustituye por un par de rectas. ¿Existe entonces alguna versión válida del teorema?

121. Determinar la hipérbola de \mathbb{R}^2 que pasa por el punto $(1/2, 4)$, es tangente a la recta $x = 0$ en el punto $(0, 2)$ y tiene como asíntota la recta $2x + 4 = y$. Hallar su centro y la ecuación de la otra asíntota.

122. Determinar una parábola de \mathbb{R}^2 , sabiendo que pasa por los puntos $(0, 0)$ y $(8, 2)$ y es tangente a la recta $3x - 4y + 2 = 0$ en el punto $(2, 2)$.

123. En \mathbb{R}^2 los puntos de intersección de una elipse de centro $(2, -3/2)$ con la cónica de ecuación $xy - 2x + 3y - 2 = 0$ son $p_1 = (1, 1)$ y $p_2 = (-1, 0)$. Además, las rectas tangentes a ambas cónicas son distintas en p_1 y coincidentes en p_2 . Hallar la ecuación de la elipse.

124. Demostrar que los hiperplanos polares de un punto dado respecto de las cuádricas regulares de un haz forman parte de un mismo haz de hiperplanos.

125. Sea Γ un haz de cuádricas en una recta proyectiva. Demostrar que si $[\phi]$ y $[\psi]$ son elementos distintos de Γ , entonces una al menos de las cuádricas $[\phi]$, $[\psi]$, $[\phi + \psi]$ es no singular. Suponiendo $[\phi]$ no singular, deducir que su ecuación en una referencia apropiada \mathcal{P} es $x_0x_1 = 0$. Así, cualquier otra cuádrica del haz tiene una ecuación de la forma $ax_0^2 + 2(b + \lambda)x_0x_1 + cx_1^2 = 0$.

126. (Teorema de Desargues) Sea Γ un haz de cónicas en un plano $P(E)$, y sea r una recta del plano no incidente con la base de Γ , ni contenida en ninguna de sus cónicas. Para todo $p \in r$, la cónica de Γ que pasa por p corta a r en una cuádrica, y se asigna a p el punto $h(p)$ tal que $\{p, h(p)\}$ es la imágen de esa cuádrica. (Figura C.5)

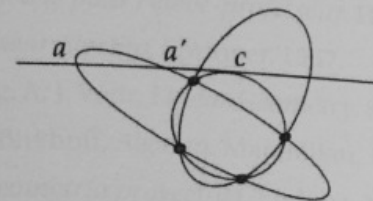


Figura C.5: $h(a)$ es a' y $h(c)$ es c

Utilizando los datos del ejercicio anterior, demostrar que la aplicación $h: r \rightarrow r, p \mapsto h(p)$, es una homografía involutiva, cuyas ecuaciones en \mathcal{P} son $\rho(x'_0 : x'_1) = (ax_1 : cx_0)$.

Suponiendo que $P(E)$ es un plano proyectivo real, probar que si $ac > 0$ existen dos cónicas de Γ tangentes a la recta r , mientras que si $ac < 0$ ninguna cónica del haz es tangente a dicha recta.

127. Precisar si el teorema de Desargues del problema 60 puede obtenerse aplicando el teorema anterior a un haz particular de cónicas.

Bibliografía

- [1] P. Abellanas, *Geometría básica*. Romo, 1961.
- [2] M. Berger, *Geometry*, 2 vols. Springer, 1983.
- [3] J. Frenkel, *Géométrie pour l'élève-professeur*. Hermann, 1973.
- [4] W. H. Greub, *Linear Algebra*. Springer, 1967.
- [5] K. W. Gruenberg, A. J. Weir, *Linear Geometry*. Springer, 1977.
- [6] S. MacLane, G. Birkhoff, *Algebra*. Macmillan, 1967.
- [7] L. A. Santaló, *Geometría proyectiva*. Eudeba, 1966, 1977.
- [8] J. G. Semple, G. T. Kneebone, *Algebraic projective geometry*. Oxford, 1952, 1998.
- [9] J. C. Sidler, *Géométrie projective*. Dunod, 2000.
- [10] J. C. Tisseron, *Géométries affine, projective et euclidienne*. Hermann, 1983.

Índice alfabético

- Anulador, 40
- Aplicación afín, 112
- Aplicación proyectiva, 6
- Asíntota, 124, P-106

- Base
 - asociada a una referencia, 14
 - de un haz de cuádricas, 102
 - de un haz de hiperplanos, 49
 - de una dilatación, P-39, P-78
 - de una homología, 34
 - de una transvección, P-39

- Cambio de coordenadas, 15, 16
- Característica de una homología, 35
- Centro
 - de una aplicación proyectiva, 6
 - de una cuádrica afín, 83, 123
 - de una perspectiva, 10
 - de una proyección cónica, 7
- Colineación, 61
- Completación proyectiva
 - de un espacio afín, 22
 - de un subespacio afín, 23
 - de una aplicación afín, 25
 - de una cuádrica afín, 82

- Completación vectorial de un espacio afín, 21, 112
- Completaciones proyectivas
 - de los isomorfismos afines, 27
 - de las dilataciones y transvecciones, P-39, P-78
 - de las traslaciones y homotecias, 28
- Conjunto de generadores, 12
- Conjuntos proyectivamente dependientes e independientes, 12
- Construcción armónica, 48
- Coordenadas homogéneas
 - de un punto, 15
 - en un haz de hiperplanos, 51
- Correlación, 61
 - antisimétrica, P-79
 - asociada a una forma bilineal, 62
 - simétrica, P-79
- Cuádrica
 - afín, 81, 121
 - afín regular, 81, 121
 - del infinito, 82
 - proyectiva, 67
 - proyectiva regular, 67
 - tangencial, 75

- Cuádricas
 - afinmente equivalentes, 85, 128
 - proyectivamente equivalentes, 77
- Cuadrivértice, P-32
- Cuaterna armónica, 48
- Diámetro de una cuádrica afín, 124
- Dilatación, P-39, P-78
- Dimensión de un espacio afín, 111
- Dimensión de un espacio proyectivo, 1
- Dirección asintótica, 122
- Dualidad proyectiva canónica, 41
- Ecuación
 - de un hiperplano tangente, 69
 - de una cuádrica afín, 121
 - de una cuádrica proyectiva, 68
- Ecuaciones
 - canónicas de las cuádrics afines, 84, 125, 127
 - canónicas de las cuádrics proyectivas, 76
 - de la completación de un subespacio afín, 30
 - de la completación de una aplicación afín, 30
 - de un cambio de coordenadas, 15, 16
 - de un subespacio proyectivo, 17
 - de una aplicación proyectiva, 18
 - de una correlación, 65
 - reducidas de las cónicas, 93, 94, 95, 96
- Elación, 34
- Espacio afín, 111
- Espacio proyectivo, 1
 - asociado a un espacio afín, 22
 - canónico, 2
 - de hiperplanos, 41, 42
 - dual, 41
- Forma biafín, 80, 117
 - propia, 80, 119
 - regular, 120
 - simétrica, 80, 117
- Formas biafines equivalentes, 121
- Generatrices de la cuádrica reglada, P-89, P-90, P-116
- Grupo afín, 26, 27
- Grupo proyectivo, 11, 27
- Haces de cuádrics equivalentes, 103
- Haz de cuádrics, 102
 - no degenerado, 102
- Haz de hiperplanos, 49
- Hiperplano, 2
 - del infinito, 22
 - invariante por una homografía, 19
 - tangente a una cuádrica afín, 81, 122
 - tangente a una cuádrica proyectiva, 68
- Homografía, 9
 - axial, P-74
 - biaxial, P-76
 - entre haces de rectas, P-53
 - inducida por un haz de cónicas sobre una recta, P-126
 - inducida por una cuádrica sobre una recta, 74

- Homografías involutivas de la recta, 55
- Homografías involutivas del plano, 60
- Homología, 34
- Homología del plano, 58
- Matriz de una aplicación proyectiva, 18
- Matriz de una forma biafín, 120
- Matriz general de un haz de cuádrics, 102
- Perspectividad, 10
- Perspectividad entre haces de rectas, P-54
- Plano, 2
- Polaridad asociada a una cuádrica, 71
- Polo, 71
- Principio de dualidad, 42
- Propiedad dual, 42
- Proyección cónica o central, 7
- Punto, 2
 - del infinito, 22
 - diagonal de un cuadrivértice, P-32
 - regular de una cuádrica afín, 81
 - regular de una cuádrica proyectiva, 68
 - singular de una cuádrica afín, 81
 - singular de una cuádrica proyectiva, 68
 - unidad de una referencia, 13
- Puntos fijos de una homografía, 19
- Razón de una dilatación, P-39, P-78
- Razón de una homología, 35
- Razón doble de cuatro puntos, 44
- Razón doble de hiperplanos, 50
- Razón simple de tres puntos, 46
- Recta, 2
- Referencia proyectiva, 13
 - asociada a una base, 13
 - asociada a una cartesiana, 29, 36
 - canónica, 15
- Referencias proyectivas duales, 43
- Signatura proyectiva, 78
- Subespacio afín, 111
 - diametral, 124
 - tangente a una cuádrica, 122
- Subespacio proyectivo, 2
 - contenido en una cuádrica, 70
 - engendrado por un subconjunto, 4
 - intersección, 3
 - invariante por una homografía, 11
 - polar, 71
 - suma o unión, 4
 - tangente a una cuádrica, 69, 70
- Subespacios suplementarios, 5
- Teorema
 - de Brianchon, 101
 - de Ceva, P-48
 - de Chasles, 98
 - de Desargues, 33, P-60, P-126
 - de incidencia, 4
 - de Menelao, P-49
 - de Pappus, 32
 - de Pascal, 99

- de Staudt, 49
- de Steiner, 99
- del eje proyectivo, P-22
- Transformación de una cuádrica
 - por una afinidad, 85, 122
 - por una homografía, 77
- Transvección, P-39
- Variedad (Véase subespacio)
- Vértice de un cuadrivértice, P-32
- Vértice de una homología, 58