Université SAAD DAHLEB Blida1

Département d'Electronique

L2 Télécommunication, Electronique, Électrotechnique

2020/2021

Méthodes Numériques

Durée : 1h 30

Examen de Rattrapage

Exercice 1 : (11 pts)

Soit l'équation : $f(x) = \; e^x - 4x^2$ (1)

1. **a)** Montrer que l'équation (1) a une racine réelles $\alpha \in [0, 1]$.
   b) Approcher par la méthode de **Dichotomie** en trois itérations la racine α.
   c) Combien d'itérations par dichotomie on doit effectuer pour avoir une approximation à 10^{-4}
   d) Montrer dans le cas de la méthode de Dichotomie que l'erreur d'une approximation par rapport à α la racine exacte est : $|x_n - \alpha| \le \frac{b_n - a_n}{2}$.
   e) Calculer l'erreur commise sur la dernière approximation trouvée en (b).

2. Soit l'équation $(x) = \frac{1}{2}\, e^{\frac{x}{2}}$.

   a) Montrer que $f(x) = 0$ est équivalent à $x = g(x)$. En déduire que si α est un point fixe de g alors α est une solution pour f.
   b) Montrer que la suite définie par : $\begin{cases} x_{n+1} = g(x_n) \\ x_0 = 1 \end{cases}$ converge vers la solution α de $f(x) = 0$.
   c) Calculer le nombre d'itérations N avec une précision de $\varepsilon = 10^{-2}$ près.

3. On considère la méthode de **Newton**. Peut on utiliser cette méthode pour $x_0 = 1$. Justifier votre réponse.

Exercice 2 : (05 pts)

1. Construire le polynôme de Lagrange P qui interpole ces trois points: (-1; e), (0; 1) et (1; e).
2. Sans faire de calculs, donner l'expression du polynôme de Lagrange Q qui interpole les trois points :(-1;-1), (0; 0) et (1;-1).
3. Trouver le polynôme qui interpole les trois points (-1;-1), (0; 0) et (1;-1) en utilisant la formule de Newton.

Exercice 3 : (04 pts)

Soient $a > 0 \; et \; p \in N, p \ge 2$. Soit $= \sqrt[p]{a}$. Montrer que la méthode de Newton appliquée aux fonctions (dont α est une racine) $f_1(x) = x^p - a = 0$ et $f_2(x) = 1 - \frac{a}{x^p} = 0$ conduit respectivement aux itérations :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{x}{p}\left(p - 1 + \dfrac{a}{x^p}\right) \\ x_{n+1} = \dfrac{x}{p}\left(p + 1 - \dfrac{x^p}{a}\right) \end{cases}$$

Bon courage

Juillet 2021.

Correction de Rattrapage

Exo1 : Soit $f(x) = e^{-x} - 4x^2$ ...... (1)

1) a)- Mtq l'equation (1) a une racine réelles $\alpha \in [0,1]$

$f(x)$ est la somme d'une polynome et une expo

les deux fct sont définis et continue sur $[0,1]$,

de plus $f(1) = -9{,}04 < 0$ or $f(0) = 0 > 0$ donc $f(1)f(0) < 0$

Alors $\exists$ au moins une racine réelle $\in [0,1]$

et $f'(x) = e^{-x} - 8x < 0$ car $e^{-x} < 8x$ sur $[0,1]$.

Alors le racine est unique.

(1)

b)- Etape (1)

$+$ 0 ——— 0,5 ($+$) ——— 1 ($-$)

Etape (2)

0,5 ($+$) ——— 0,75 ($-$) ——— 1 ($-$)

$(0{,}5) \times 3$

Etape (3) :

0,5 ——— 0,625 ($+$) ——— 0,75 ($-$)

$x_0^* \in [0{,}5, 0{,}75]$

(1,5)

c)- $N = n + 1 \geq \dfrac{\operatorname{Log}\left(\dfrac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\operatorname{Log} 2} = 13{,}28$, Il faut faire 14 Etapes.

(1)

d)- A l'étape n on a : a_n ——— x_n ——— b_n

on sait que la racine se trouve soit ds la 1re partie ou la deuxième.

(1)

Supposons que $\alpha \in]x_n, b_n[$ alors la distance

$$|x_n - \alpha| \le \frac{|b_n - x_n|}{2} = \frac{\left|b_n - \frac{b_n - a_n}{2}\right|}{2} = \frac{|b_n - x_n|}{2}.$$

a- L'erreur est : $\frac{b_2 - a_2}{2} = \frac{4{,}5 - 4{,}25}{2} = 0{,}125$ .. 0,5

2- a) $f(x) = e^{x} - 4x = 0$

$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} e^{x} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{4} e^{x}} = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}$ 0,5

si α est un pt fixe pour la fct g alors

$g(\alpha) = \alpha \Rightarrow f(\alpha) = g(\alpha) - \alpha = \alpha - \alpha = 0$. d'où

le pt fixe de g est une racine de f. 1

b- les conditions de convergence.

0,25 * il est claire que $\frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}$ est une fct définie, continue et dérivable sur $[0,1]$

0,25 * stabilité de $g(x)$; $g'(x) = \frac{1}{4} e^{\frac{x}{2}} > 0$, $\forall x \in [0,1]$

$\Rightarrow g(x)$ est croissante $\Rightarrow$ Max $g(x) = 0{,}82$.

et Min de $g(x) = 0{,}250$

on voit bien que le Min et le Max $\in [0,1]$

donc $g(x)$ est stable sur $[0,1]$.

0,25 * $\exists$? un $k \in]0,1[$ tel que $g(x) < k < 1$.

$k = \max |g'(x)|$, $x \in [0,1]$.

$g'(x) = \frac{1}{4} e^{x/2} \Rightarrow |g'(x)| = \frac{1}{4} e^{x/2}$; $(|g'(x)|)' = \frac{1}{8} e^{x/2}$.

2 - $\Rightarrow |g'|$ est croissante $\forall x \in [0,1]$.

$\text{Max}|g(x)| = |g(x)| = 0,412 < 1$

Alors $x_{n+1} = g(x_n)$ CV $\forall x \in [0,1]$

e- $n \geq \dfrac{\text{Log}(\varepsilon) - \text{Log}(b-a)}{\text{Log}(k)} = 5,16.$

3. Pour pouvoir Appliquer la méthode de Newton sur $[0,1]$, on doit vérifier les cdt

- $f'(x)$ doit garder un signe constant (strict)
- et $f''(x)$ " " " "
- $f'(x) = e^{-x} - 8x < 0 \quad \forall x \in [0,1]$ (déjà démontré)
- $f''(x) = e^{-x} - 8 < 0$ " (")

Choix de x_0 :

x_0 doit vérifier $f(x_0) f''(x_0) > 0$.

pour $x_0 = 1$: $f(1).f''(1) > 1$.

* f définie, continue et dérivable sur $[0,1]$. (déjà démontré)

Exo 2 :

1- Le polynôme de Lagrange $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)\, y_i$

avec $y_i = f(x_i)$; $L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ k \neq j}} \frac{(x - x_k)}{(x_k - x_j)}$

Pour $n = 2$:

$$P_2(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)$$

$$= e \cdot \frac{x(x-1)}{2} - (x+1)(x-1) + e \cdot \frac{(x+1)x}{2}$$

$$P_2(x) = (e-1)x^2 + 1$$

2- il suffit de changer les coefficient y_i ds l'expression précédente

$$Q(x) = -x\frac{(x-1)}{2} - \frac{(x+1)(x)}{2} = -x^2$$

Le polynome de Newton :

$$P_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) = -x^2.$$

x_i	$f(x_i)$	DD1	DD2
-1	-1	1	-1
0	0	-1	
1	-1		

Pour $f(x) = 0$ s'écrit.

Exo3 : La méthode de Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

* Pour $f_1(x)$:

$$x_{n+1} = x - \frac{x^p - a}{p \cdot x^{p-1}} = x\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \frac{a}{p\, x^{p-1}}$$

$$= \frac{x}{p}\left(p - 1 + \frac{a}{x^p}\right)$$

02

. Pour $f_2(x)$

$$x_{n+1} = x - \frac{1 - \frac{a}{x^p}}{\frac{pa}{x^{p+1}}} = x - \frac{x^{p+1} - a x}{p a}$$

$$= x\left(1 + \frac{1}{p}\right) - \frac{x^{p+1}}{p a} = \frac{x}{p}\left(p + 1 - \frac{x^p}{a}\right)$$

02