

Examen de Rattrapage

Exercice 1 : (11 pts)

Soit l'équation : $f(x) = e^x - 4x^2$ (1)

1. a) Montrer que l'équation (1) a une racine réelle $\alpha \in [0, 1]$.
 b) Approcher par la méthode de **Dichotomie** en trois itérations la racine α .
 c) Combien d'itérations par dichotomie on doit effectuer pour avoir une approximation à 10^{-4}
 d) Montrer dans le cas de la méthode de Dichotomie que l'erreur d'une approximation par rapport à α la racine exacte est : $|x_n - \alpha| \leq \frac{b_n - a_n}{2}$.
 e) Calculer l'erreur commise sur la dernière approximation trouvée en (b).
2. Soit l'équation $(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}$.
 a) Montrer que $f(x) = 0$ est équivalent à $x = g(x)$. En déduire que si α est un point fixe de g alors α est une solution pour f .
 b) Montrer que la suite définie par : $\begin{cases} x_{n+1} = g(x_n) \\ x_0 = 1 \end{cases}$ converge vers la solution α de $f(x) = 0$.
 c) Calculer le nombre d'itérations N avec une précision de $\varepsilon = 10^{-2}$ près.
3. On considère la méthode de **Newton**. Peut on utiliser cette méthode pour $x_0 = 1$. Justifier votre réponse.

Exercice 2 : (05 pts)

1. Construire le polynôme de Lagrange P qui interpole ces trois points: $(-1; e)$, $(0; 1)$ et $(1; e)$.
2. Sans faire de calculs, donner l'expression du polynôme de Lagrange Q qui interpole les trois points : $(-1; -1)$, $(0; 0)$ et $(1; -1)$.
3. Trouver le polynôme qui interpole les trois points $(-1; -1)$, $(0; 0)$ et $(1; -1)$ en utilisant la formule de Newton.

Exercice 3 : (04 pts)

Soient $a > 0$ et $p \in \mathbb{N}, p \geq 2$. Soit $\alpha = \sqrt[p]{a}$. Montrer que la méthode de Newton appliquée aux fonctions (dont α est une racine) $f_1(x) = x^p - a = 0$ et $f_2(x) = 1 - \frac{a}{x^p} = 0$ conduit respectivement aux itérations :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{x}{p} \left(p - 1 + \frac{a}{x^p} \right) \\ x_{n+1} = \frac{x}{p} \left(p + 1 - \frac{x^p}{a} \right) \end{cases}$$

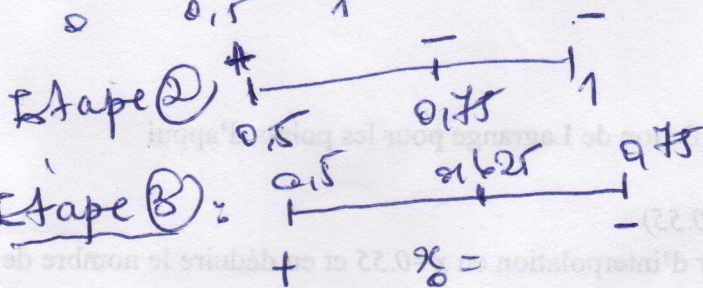
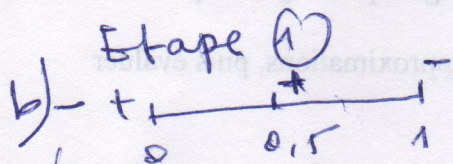
Juillet 2021.

Correction du Rattrapage.

Exo 1: soit $f(x) = e^x - 4x^2$. ---- (1)

- a) g. Mtq l'équation (1) a une racine réelle $\alpha \in [0, 1]$
 $f(x)$ est la somme d'une polynôme et une expo
 les deux fct sont définies et continue sur $[0, 1]$,
 de plus $f(1) = -9,04 < 0$ et $f(0) = 0 > 0$ donc $f(1)f(0) < 0$
 Alors il y a au moins une racine réelle $\in [0, 1]$
 et $f'(x) = e^x - 8x < 0$ car $e^x < 8x$ sur $[0, 1]$.

(1) Alors la racine est unique.



(0.5) x 3

Etape 3: $x^4 \in [0.5, 0.75]$

c) $N = n+1 \geq \frac{\log\left(\frac{b-a}{\epsilon}\right)}{\log 2} = 13,28$, il faut faire 14 étapes.

(1)

d) - A l'étape n on a: a_n x_n b_n

on sait que la racine se trouve soit ds la 1^{re} partie ou ds la deuxieme.

Supposons que $\alpha \in]x_n, b_n[$ alors la distance

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{|b_n - x_n|}{2} = \frac{|b_n - \frac{b_n + a_n}{2}|}{2} = \frac{|b_n - a_n|}{2}.$$

a - L'erreur est: $\frac{b_2 - a_2}{2} = \frac{4,5 - 4,25}{2} = 0,125 \dots (0,5)$

2 - a) $f(x) = e^x - 4x = 0$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} e^x \Rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{4} e^x} = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} \dots (0,5)$$

~~Si~~ α est un pt fixe pour la fct g alors

$$g(\alpha) = \alpha \Rightarrow f(\alpha) = g(\alpha) - \alpha = \alpha - \alpha = 0. \text{ Donc}$$

le pt fixe de g est une racine de f .

b - les conditions de convergence.

obs * il est clair que $\frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}$ est une fct définie, continue et dérivable sur $[0, 1]$.

obs * stabilité de $g(x)$: $g'(x) = \frac{1}{4} e^{\frac{x}{2}} > 0, \forall x \in [0, 1]$
 $\Rightarrow g(x)$ est croissante $\Rightarrow \text{Max}(g'(x)) = 0,82$
 et $\text{Min de } g(x) = 0,250$

on voit bien que le Min et le Max $\in [0, 1]$
 donc $g(x)$ est stable sur $[0, 1]$.

obs * $\exists ?$ un $k \in]0, 1[$ tel que $g(x) < k < 1$.
 $k = \max |g'(x)|, x \in [0, 1]$.

$$g'(x) = \frac{1}{4} e^{\frac{x}{2}} \Rightarrow |g'(x)| = \frac{1}{4} e^{\frac{x}{2}}; (|g'(x)|)' = \frac{1}{8} e^{\frac{x}{2}}$$

2 - $\Rightarrow |g'|$ est croissante $\forall x \in [0, 1]$.

$$\max |g(x)| = |g(u)| = 0,412 < 1$$

$$\text{Alors } x_{n+1} = g(x_n) \in V \quad \forall x_n \in [0, 1]$$

$$e - n \geq \frac{\log(2) - \log(b-a)}{\log(u)} = 5,16$$

$$\log(u)$$

3. Pour pouvoir appliquer la méthode de Newton sur $[0, 1]$, on doit vérifier les cdt

~~NB~~ - $f'(x)$ doit garder un signe constant (strict)

$f'(x) = e^x - 8x < 0 \quad \forall x \in [0, 1]$ (déjà démontré)

$f''(x) = e^x - 8 < 0$ " "

Choix de x_0 :

$$x_0 \text{ doit vérifier } f(x_0) \cdot f'(x_0) > 0$$

pour $x_0 = 1$: $f(1) \cdot f'(1) > 1$

* ~~f~~ définie, continue et dérivable sur $[0, 1]$.
(déjà démontré)

Isos

Exo 2:

1 - le polynôme de Lagrange $P_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) y_i$
 - avec $y_i = f(x_i) = L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$

Pour $n=2$.

$$P_2(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x).$$

$$= e \cdot \frac{x(x-1)}{2} - (x+1)(x-1) + e \cdot \frac{(x+1)x}{2}.$$

$$P_2(x) = (2-x)x^2 + 1.$$

2 - il suffit de changer les coefficients y_i ds l'expression précédente:

$$Q(x) = -x \frac{(x-1)}{2} - \frac{(x+1)(x)}{2} = -x^2$$

Le polynôme de Newton:

$$P_2(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) = -x^2.$$

x_i	$f(x_i)$	Δ^1	Δ^2
-1	-1		
0	0	1	
1	-1	-1	-1

Exo 3: La méthode de Newton Pour $f(x) = 0$ s'écrit:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

* Pour $f_1(x)$:

$$x_{n+1} = x - \frac{x^p - a}{p \cdot x^{p-1}} = x \left(1 - \frac{1}{p} \right) + \frac{a}{p x^{p-1}}$$

$$= \frac{x}{p} \left(p-1 + \frac{a}{x^p} \right)$$

. Pour $f_2(x)$

$$x_{n+1} = x - \frac{1 - \frac{a}{x^p}}{\frac{pa}{x^{p+1}}} = x - \frac{x^{p+1} - ax}{pa}$$

$$= x \left(1 + \frac{1}{p} \right) - \frac{x^{p+1}}{pa} = \frac{x}{p} \left(p+1 - \frac{x^p}{a} \right)$$

20

20

Exercice 3 : (6 points)

Soit $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

1. Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange pour les points d'appui d'abscisses : $-2, -1, 0, 1, 2$.
2. Calculer une approximation de $f(0.5)$.
3. Donner une estimation de l'erreur d'interpolation en $x=0.5$ et en déduire le nombre de chiffres significatifs exacts de l'approximation obtenue en (2).

NB : la note de l'exercice 3 sera considérée comme une note de l'interrogation

Bon courage !!