

**ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM**

NGUYỄN NGỌC THU'

**PHÁT TRIỂN TƯ DUY SÁNG TẠO
CHO HỌC SINH GIỎI THÔNG QUA DẠY HỌC
HỆ PHƯƠNG TRÌNH Ở TRƯỜNG THPT**

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC GIÁO DỤC

THÁI NGUYÊN, 2015

**ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM**

NGUYỄN NGỌC THƯ

**PHÁT TRIỂN TƯ DUY SÁNG TẠO
CHO HỌC SINH GIỎI THÔNG QUA DẠY HỌC
HỆ PHƯƠNG TRÌNH Ở TRƯỜNG THPT**

Chuyên ngành: Lý luận và Phương pháp dạy học bộ môn Toán

Mã số: 60 14 10 11

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC GIÁO DỤC

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS. Nguyễn Anh Tuấn

THÁI NGUYÊN, 2015

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi, các kết quả nghiên cứu là trung thực và chưa được công bố trong bất kỳ công trình nào khác.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2015
Tác giả luận văn

Nguyễn Ngọc Thu

Xác nhận
của trưởng khoa chuyên môn

Xác nhận
của người hướng dẫn khoa học

PGS TS. Nguyễn Anh Tuấn

LỜI CẢM ƠN

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn và chỉ bảo tận tình của PGS.TS. Nguyễn Anh Tuấn. Em xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành nhất đến Thầy. Thầy đã tận tình hướng dẫn, hết lòng giúp đỡ em trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu để hoàn thành luận văn.

Em xin trân trọng cảm ơn các Thầy Cô giáo trong Tổ bộ môn Phương pháp giảng dạy môn Toán Trường Đại học Sư phạm Thái Nguyên, Đại học Sư phạm Hà Nội; Ban Chủ nhiệm khoa Toán, Ban Chủ nhiệm Phòng Sau Đại học Trường Đại học Sư phạm – Đại học Thái Nguyên đã tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tác giả trong quá trình học tập, thực hiện và hoàn thành luận văn.

Tác giả cũng xin trân trọng cảm ơn Ban giám hiệu, các bạn đồng nghiệp ở Trường THPT Phương Xá, xã Phương Xá, huyện Cẩm Khê, tỉnh Phú Thọ đã giúp đỡ, tạo điều kiện thuận lợi trong suốt quá trình học tập.

Dù đã rất cố gắng, xong luận văn cũng không tránh khỏi những hạn chế và thiếu sót. Tác giả mong nhận được sự góp ý của Thầy Cô và các bạn.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2015

Tác giả luận văn

Nguyễn Ngọc Thư

QUY ƯỚC VIẾT TẮT TRONG LUẬN VĂN

Viết tắt	Viết đầy đủ
GTLN	Giá trị lớn nhất
GTNN	Giá trị nhỏ nhất
GV	Giáo viên
HPT	Hệ phương trình
HS	Học sinh
HSG	Học sinh giỏi
KTM	Không thỏa mãn
PPDH	Phương pháp dạy học
PT	Phương trình
SBT	Sách bài tập
SGK	Sách giáo khoa
TDST	Tư duy sáng tạo
TH	Trường hợp
THCS	Trung học cơ sở
THPT	Trung học phổ thông
TM	Thỏa mãn
VN	Vô nghiệm

MỤC LỤC

	Trang
LỜI CAM ĐOAN	i
LỜI CẢM ƠN	ii
QUY ƯỚC VIẾT TẮT TRONG LUẬN VĂN	iii
MỤC LỤC	iv
MỞ ĐẦU	1
CHƯƠNG 1 – CƠ SỞ LÝ LUẬN VÀ THỰC TIỄN.	4
1.1. MỘT SỐ VẤN ĐỀ VỀ TƯ DUY VÀ TƯ DUY SÁNG TẠO.	4
1.1.1. Sơ lược về tư duy.	4
1.1.2. Khái niệm tư duy sáng tạo.	4
1.1.3. Các đặc trưng cơ bản của TDST.	5
1.1.4. Các biểu hiện TDST của HS THPT trong dạy học HPT.	5
1.1.4.1. Tính mềm dẻo.	5
1.1.4.2. Tính nhuần nhuyễn.	11
1.1.4.3. Tính độc đáo.	19
1.1.4.4. Tính hoàn thiện.	21
1.1.4.5. Tính nhạy cảm vấn đề.	23
1.2. TIỀM NĂNG CỦA CHỦ ĐỀ HPT TRONG VIỆC PHÁT TRIỂN TDST KHI BỒI DƯỠNG HSG.	25
1.3. TÌNH HÌNH DẠY VÀ HỌC HPT VỚI ĐỐI TƯỢNG HSG THPT.	27
1.3.1. Mục tiêu và nội dung dạy học chủ đề HPT ở trường THPT.	27
1.3.1.1. Mục tiêu của chủ đề HPT.	27
1.3.1.2. Nội dung dạy học của chủ đề HPT ở trường THPT.	28
1.3.2. Thực trạng việc phát triển TDST khi bồi dưỡng HSG trong dạy học HPT.	30
1.4. NHỮNG BIỂU HIỆN CỦA HỌC SINH GIỎI VỀ TOÁN VÀ NĂNG KHIẾU TOÁN HỌC.	33
1.4.1. Những biểu hiện của học sinh giỏi về toán.	33
1.4.2. Năng khiếu toán học.	33
1.5. KẾT LUẬN CHƯƠNG 1.	33

CHƯƠNG 2 - MỘT SỐ BIỆN PHÁP SỬ DỤNG ĐỂ PHÁT TRIỂN TƯ DUY SÁNG TẠO CHO HỌC SINH GIỎI THÔNG QUA DẠY HỌC HỆ PHƯƠNG TRÌNH Ở TRƯỜNG THPT.	35
2.1. ĐỊNH HƯỚNG XÂY DỰNG BIỆN PHÁP SỬ DỤNG.	36
2.2. MỘT SỐ BIỆN PHÁP SỬ DỤNG.	36
2.2.1. Biện pháp 1: Củng cố tri thức, đào sâu, mở rộng các khái niệm, tính chất, các quy tắc phương pháp có liên quan, tập luyện kỹ năng giải HPT để tạo điều kiện nền tảng cho phát triển TDST ở HSG.	36
2.2.2. Biện pháp 2: Tập luyện cho HS thói quen không suy nghĩ cứng nhắc theo những quy tắc đã học, không máy móc áp dụng những mô hình đã gặp để ứng xử linh hoạt trước những tình huống mới.	46
2.2.3. Biện pháp 3: Hướng dẫn và luyện tập cho HS khả năng nhìn bài toán giải hệ phương trình dưới nhiều góc độ khác nhau để có thể tìm được nhiều cách giải khác nhau.	50
2.2.4. Biện pháp 4: Hướng dẫn và luyện tập cho HS khả năng phát hiện, đề xuất các bài toán mới và phương pháp giải mới cho các HPT, từ các bài toán HPT quen thuộc đã biết.	61
2.2.5. Biện pháp 5: Tổ chức những tình huống để rèn luyện cho HS thói quen, kỹ năng phê phán, tìm ra sai lầm, chưa hợp lý trong lời giải các hệ phương trình, từ đó tìm ra lời giải tối ưu.	70
2.2.6. Biện pháp 6: Xây dựng các bài toán HPT nhằm phát triển TDST cho HSG THPT.	74
2.2.6.1. Xây dựng các bài toán về HPT đối xứng loại 1.	75
2.2.6.2. Xây dựng các bài toán về HPT đối xứng loại 2.	77
2.3. KẾT LUẬN CHƯƠNG 2.	79
CHƯƠNG 3 - THỰC NGHIỆM SỬ DỤNG.	80
3.1. MỤC ĐÍCH VÀ KẾ HOẠCH THỰC NGHIỆM.	80
3.2. NỘI DUNG THỰC NGHIỆM.	80
3.3. ĐÁNH GIÁ KẾT QUẢ THỰC NGHIỆM.	92
3.4. KẾT LUẬN CHƯƠNG 3.	96
KẾT LUẬN	97
TÀI LIỆU THAM KHẢO	98

MỞ ĐẦU

1. LÝ DO CHỌN ĐỀ TÀI.

Mục tiêu của giáo dục đào tạo đã được xác định trong nghị quyết Trung ương 4 khóa VII là *“Đào tạo những con người lao động tự chủ, năng động sáng tạo, có năng lực giải quyết các vấn đề do thực tiễn đặt ra”*.

Sau đó được Đảng làm rõ thêm trong Nghị quyết Đại hội khóa XI là: *“Giáo dục đào tạo có sứ mệnh nâng cao dân trí, phát triển nguồn nhân lực, bồi dưỡng nhân tài, góp phần quan trọng phát triển đất nước, xây dựng nền văn hóa và con người Việt Nam. Phát triển giáo dục và đào tạo cùng với phát triển khoa học công nghệ là quốc sách hàng đầu, đầu tư cho giáo dục là đầu tư cho phát triển”*.

Luật Giáo dục sửa đổi ban hành ngày 27/6/2005 cũng đã thể chế hóa *“Phương pháp giáo dục phổ thông phải phát huy tính tích cực, tự giác chủ động, sáng tạo của học sinh (HS), phù hợp với đặc điểm của từng lớp học, môn học; bồi dưỡng phương pháp tự học, rèn luyện kỹ năng vận dụng kiến thức vào thực tiễn; tác động đến tình cảm; đem lại niềm vui hứng thú học tập cho học sinh”*.

Như vậy việc bồi dưỡng, phát triển tư duy sáng tạo (TDST) cho người học vừa là mục tiêu, vừa là nhiệm vụ của ngành Giáo dục đào tạo nhằm đào tạo nguồn nhân lực chất lượng cao cho đất nước, đáp ứng yêu cầu công nghiệp hóa, hiện đại hóa.

Tuy nhiên do rất nhiều nguyên nhân, giáo dục nước ta còn có những bất cập về nội dung, chương trình dạy học, phương pháp dạy học (PPDH), kiểm tra đánh giá, hình thức tổ chức cũng như công tác quản lý. Trong đó chúng tôi quan tâm đến PPDH và cách thức học tập của HS. Thực tiễn cho thấy PPDH của nhiều giáo viên (GV) hiện nay vẫn nặng về phân loại các dạng toán và đưa ra phương pháp giải cho từng dạng toán đó, cách làm này có thể giúp học sinh hệ thống được các dạng toán thường gặp, nhưng lại làm hạn chế đi rất nhiều khả năng sáng tạo của HS khi học toán. Họ chưa chú ý đến việc phát triển TDST, rèn luyện năng lực tự học, năng lực thực hành và giải quyết vấn đề.

Do đó đổi mới PPDH theo hướng phát triển TDST cho HS là rất quan trọng và cần thiết. Nhiệm vụ của GV không phải là chỉ cung cấp tri thức cho HS mà còn phải giúp HS phát triển khả năng tư duy, giúp HS tự giác, tích cực, chủ động sáng tạo trong học tập, điều đó đặc biệt có ý nghĩa quan trọng trong bối cảnh đổi mới toàn diện giáo dục theo hướng tập trung vào năng lực của người học.

Môn Toán có vị trí quan trọng trong chương trình phổ thông. Thông qua dạy học Toán GV có thể giúp HS phát triển các năng lực, phẩm chất trí tuệ, đặc biệt là rèn luyện TDST cho HS.

Giải toán về hệ phương trình (HPT) là một tình huống giải bài tập toán hay và khó, thường gặp trong các đề thi tuyển sinh vào lớp 10, đề thi HSG các cấp, đề thi tuyển sinh đại học, cao đẳng. Do đó dạy học về chủ đề này chứa đựng tiềm năng khá tốt để phát triển TDST cho HS. Tuy nhiên việc dạy và học HPT ở trường trung học phổ thông (THPT) còn có những hạn chế, bất cập: thời lượng dạy chính khóa trong chương trình sách giáo khoa (SGK) dành cho nội dung HPT không nhiều, trong SGK và sách bài tập (SBT) chỉ đưa vào những bài tập giải HPT tương đối đơn giản, trong khi những bài toán về HPT ở các kỳ thi nói trên thường khó hơn. Trong thực tế bồi dưỡng, ôn thi HSG, đối với cả GV & HS vẫn gặp phải những khó khăn khi dạy và học giải HPT.

Vấn đề bồi dưỡng tư duy sáng tạo cho HS qua môn Toán được nhiều tác giả quan tâm. Tác phẩm nổi tiếng “Sáng tạo toán học” của nhà Toán học, nhà tâm lý học G.Polya đã nghiên cứu một cách sinh động về quá trình sáng tạo toán học thông qua việc giải toán. Ở trong nước, các tác giả Nguyễn Cảnh Toàn [21], Hoàng Chúng [5], Lê Hải Châu - Phạm Văn Hoàn ([4]), Nguyễn Bá Kim ([10],[11]),... đã có những công trình nghiên cứu cả về lý luận và thực tiễn vấn đề phát triển tư duy sáng tạo cho HS trong dạy học Toán.

Tuy nhiên, việc bồi dưỡng tư duy sáng tạo cho HS qua dạy học HPT ở trường THPT còn cần được đi sâu nghiên cứu một cách cụ thể.

Với các lý do trên, để xây dựng một giải pháp tư duy sáng tạo cho học sinh giỏi (HSG) THPT và thực hiện đổi mới phương pháp dạy học môn toán theo hướng tập trung vào năng lực của người học, góp phần khắc phục những tồn tại trên đây, chúng tôi lựa chọn vấn đề **“Phát triển tư duy sáng tạo cho học sinh giỏi thông qua dạy học hệ phương trình ở trường THPT”** làm đề tài nghiên cứu.

2. MỤC ĐÍCH NGHIÊN CỨU.

Đề xuất biện pháp phát triển TDST cho HSG THPT thông qua dạy học HPT, góp phần nâng cao chất lượng dạy học Toán ở THPT.

3. NHIỆM VỤ NGHIÊN CỨU.

- + Nghiên cứu lý luận về TDST và phát triển TDST trong dạy học Toán.
- + Tìm hiểu những biểu hiện của TDST ở HS THPT trong dạy học nội dung HPT.
- + Tìm hiểu tình hình dạy và học HPT với yêu cầu phát triển TDST cho đối tượng HSG THPT.
- + Đề xuất các biện pháp phát triển TDST cho HSG THPT trong dạy học HPT.
- + Tổ chức thực nghiệm sư phạm để bước đầu tìm hiểu tính khả thi và hiệu quả của các biện pháp đề ra.

4. GIẢ THUYẾT KHOA HỌC.

Nếu đề xuất được một số biện pháp sư phạm phù hợp và vận dụng chúng một cách hợp lý trong dạy học HPT thì sẽ phát triển được tư duy sáng tạo cho HSG ở trường THPT.

5. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU.

- + Phương pháp nghiên cứu lý luận (đọc tài liệu, sách, giáo trình).
- + Phương pháp nghiên cứu thực tiễn (quan sát, điều tra, phỏng vấn,...).
- + Phương pháp thực nghiệm sư phạm.
- + Phương pháp thống kê toán học (xử lý kết quả điều tra trước và sau thực nghiệm).

6. CẤU TRÚC CỦA LUẬN VĂN.

Ngoài phần mở đầu, kết luận và tài liệu tham khảo, nội dung luận văn được trình bày trong ba chương:

Chương 1: Cơ sở lý luận và thực tiễn.

Chương 2: Một số biện pháp sư phạm nhằm phát triển TDST cho HSG trong dạy học giải HPT ở trường THPT.

Chương 3: Thực nghiệm sư phạm.

CHƯƠNG 1 - CƠ SỞ LÝ LUẬN VÀ THỰC TIỄN

1.1. MỘT SỐ VẤN ĐỀ VỀ TƯ DUY VÀ TƯ DUY SÁNG TẠO.

1.1.1. Sơ lược về tư duy.

- *Khái niệm tư duy*: Tư duy là sản phẩm của não bộ con người, là quá trình phản ánh tích cực thế giới khách quan vào trong bộ não người. Kết quả của tư duy bao giờ cũng là một ý nghĩ và được thể hiện qua ngôn ngữ. [8, tr 4]

- *Đặc điểm cơ bản của tư duy*:

+ Tư duy là sản phẩm của bộ não con người và là một quá trình phản ánh tích cực thế giới khách quan.

+ Kết quả của quá trình tư duy bao giờ cũng là một ý nghĩ và được thể hiện qua ngôn ngữ.

+ Bản chất của tư duy là ở sự phân biệt, sự tồn tại độc lập của đối tượng được phản ánh với hình ảnh nhận thức được qua khả năng hoạt động của con người nhằm phản ánh đối tượng.

+ Tư duy là quá trình phát triển năng động và sáng tạo.

+ Khách thể trong tư duy được phản ánh với nhiều mức độ khác nhau từ thuộc tính này đến thuộc tính khác, nó phụ thuộc vào chủ thể là con người. [8, tr 4]

1.1.2. Khái niệm tư duy sáng tạo.

Trong dạy học, nói riêng là đối với môn Toán, TDST giữ vai trò quan trọng nên các nhà nghiên cứu trong và ngoài nước đã có nhiều công trình nghiên cứu.

Theo Tôn Thân ([20]): “TDST là một dạng tư duy độc lập tạo ra ý tưởng mới, độc đáo và có hiệu quả giải quyết vấn đề cao, không bị gò bó, phụ thuộc vào cái đã có. Tính độc lập của nó bộc lộ vừa trong việc đặt mục đích vừa trong việc tìm giải pháp. Mỗi sản phẩm của TDST đều mang rất đậm dấu ấn của mỗi cá nhân đã tạo ra nó”

Theo Nguyễn Bá Kim ([11]): “ Tính linh hoạt, tính độc lập và tính phê phán là những điều kiện cần thiết của TDST, là những đặc điểm về những mặt khác nhau của TDST. Tính sáng tạo của tư duy thể hiện rõ nét ở khả năng tạo ra cái mới, phát hiện vấn đề mới, tìm ra hướng đi mới, tạo kết quả mới”

Trong tác phẩm “Dạy học nêu vấn đề” ([27]), I.Ia.Lecne đã chỉ ra các thuộc tính của TDST là: Có sự tự lực chuyển các tri thức, kỹ năng sang tình huống mới; nhìn thấy cấu trúc của đối tượng đang nghiên cứu; kỹ năng tìm thấy nhiều lời giải; kỹ năng kết hợp với các phương thức giải đã biết thành một phương thức giải mới; kỹ năng sáng tạo ra một cách giải độc đáo; nhìn thấy vấn đề mới trong các điều kiện quen biết.

Nhìn chung, chúng ta có thể hiểu:

+ TDST là quá trình tìm cách nhận thức, phát hiện ra quy luật của sự vật, có ý thức luôn tìm ra cái mới để hiểu rõ hơn bản chất của sự vật, hiện tượng cũng như tìm ra nguyên nhân, ngăn chặn, loại bỏ cái xấu và phát triển cái tốt, cái tích cực.

+ Sản phẩm của tư duy sáng tạo là tìm ra cái mới, được thể hiện ở chỗ phát hiện vấn đề mới, tìm ra hướng đi mới, tạo ra kết quả mới. TDST là một dạng tư duy độc lập, tạo ra ý tưởng mới độc đáo và có hiệu quả giải quyết vấn đề cao.

1.1.3. Các đặc trưng cơ bản của tư duy sáng tạo.

TDST có các đặc điểm chung của tư duy, ngoài ra còn có những đặc trưng sau:

a) Tính mềm dẻo: Là khả năng dễ dàng đi từ hoạt động trí tuệ này sang hoạt động trí tuệ khác.

b) Tính nhuần nhuyễn: Là khả năng tìm được nhiều giải pháp trên nhiều góc độ và tình huống khác nhau.

c) Tính độc đáo: Là khả năng tìm kiếm và giải quyết vấn đề bằng phương pháp lạ, độc đáo hoặc duy nhất.

d) Tính hoàn thiện: Là khả năng lập kế hoạch, phối hợp các ý nghĩ và hành động, phát triển ý tưởng, kiểm tra và kiểm chứng ý tưởng.

e) Tính nhạy cảm vấn đề: Là khả năng nhanh chóng phát hiện vấn đề, tức là thấy cái sai lầm, cái thiếu logic, cái chưa tối ưu,..., để hoàn thiện, thay đổi, cấu trúc lại, để phát triển ý tưởng mới. [8, tr 9]

1.1.4. Các biểu hiện TDST của HS THPT trong dạy học giải HPT.

1.1.4.1. Tính mềm dẻo.

Tính mềm dẻo của TDST thể hiện ở khả năng dễ dàng đi từ hoạt động trí tuệ này sang hoạt động trí tuệ khác, từ thao tác tư duy này sang thao tác tư duy khác, vận

dụng linh hoạt các hoạt động phân tích, tổng hợp, so sánh, trừu tượng hóa, khái quát hóa và các phương pháp suy luận như quy nạp, suy diễn, tương tự.

Tính mềm dẻo của TDST có các đặc trưng sau:

- Dễ dàng chuyển từ giải pháp này sang giải pháp khác, điều chỉnh kịp thời hướng suy nghĩ khi gặp trở ngại.

- Dễ dàng thay đổi nhanh chóng trật tự của hệ thống tri thức chuyển từ góc độ quan niệm này sang góc độ quan niệm khác, định nghĩa lại sự vật, hiện tượng, gạt bỏ sơ đồ tư duy có sẵn và xây dựng phương pháp tư duy mới, tạo ra sự vật mới trong những quan hệ mới, hoặc chuyển đổi quan hệ và nhận ra bản chất sự vật và điều phán đoán.

- Suy nghĩ không dập khuôn, không áp dụng một cách máy móc các kiến thức, kỹ năng đã có vào một hoàn cảnh mới, điều kiện mới, trong khi đã có những yếu tố thay đổi, có khả năng thoát khỏi những ảnh hưởng, kìm hãm của những kinh nghiệm, phương pháp, những cách suy nghĩ đã có từ trước. Đó là nhận ra vấn đề mới trong những điều kiện quen thuộc, nhìn thấy chức năng mới, cấu trúc mới trong những đối tượng quen biết.

Tính mềm dẻo của tư duy là một trong các thành phần quan trọng của TDST. Do đó để phát triển TDST cho HS, một điều kiện không thể thiếu là rèn luyện tính mềm dẻo trong tư duy của các em. Để làm được điều đó, người GV phải đưa ra các ví dụ, các bài tập sao cho khi áp dụng theo cách giải thông thường HS không thể tìm được lời giải hoặc nếu có tìm được lời giải, thì lời giải thường dài dòng và phải vận dụng đến nhiều nội dung kiến thức. Để làm điều này, ta cùng nhau xét các ví dụ sau:

<p>Ví dụ 1: Giải hệ phương trình:</p> $\begin{cases} x^2 + \frac{1}{x^2} + y^2 + \frac{1}{y^2} = 9 \\ x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5 \end{cases}$

Phân tích: Quan sát HPT đã cho, ta nhận thấy đây là HPT đối xứng loại một, theo cách giải truyền thống của HPT đối xứng loại một, HS sẽ cố gắng biến đổi HPT trên, về một HPT mới, mà trong hệ có sự xuất hiện của hai đại lượng $x + y$ và $x.y$, từ đó dẫn đến phép đặt ẩn phụ quen thuộc $S = x + y, P = xy$. Cụ thể, HPT được biến đổi như sau:

+ Điều kiện: $x \neq 0, y \neq 0$.

$$\begin{aligned}
& + \text{HPT} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 9 \\ x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + y^2) \left(1 + \frac{1}{x^2 y^2} \right) = 9 \\ (x + y) \left(1 + \frac{1}{xy} \right) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[(x + y)^2 - 2xy \right] \left(1 + \frac{1}{(xy)^2} \right) = 9 \\ (x + y) \left(1 + \frac{1}{xy} \right) = 5 \end{cases} \\
& + \text{Đặt } S = x + y, P = xy, \text{ ĐK: } S \geq 4P, \text{ ta có hệ phương trình: } \begin{cases} (S^2 - 2P) \left(1 + \frac{1}{P^2} \right) = 9 \\ S \left(1 + \frac{1}{P} \right) = 5 \end{cases}
\end{aligned}$$

+ Nhìn vào HPT thu được ta thấy, hệ này có thể giải được bằng phép thế, nhờ rút S theo P hoặc P theo S từ PT dưới, rồi thay vào PT trên, đến đây ta thu được một PT bậc cao theo ẩn P hoặc một PT bậc cao ẩn S . Giải PT bậc cao này, ta tìm được P , từ đó tìm được S , hoặc tìm được S , rồi tìm được P và cuối cùng tìm được nghiệm x và y của HPT ban đầu.

+ Qua sự phân tích trên, ta thấy về nguyên tắc HPT đã cho có thể giải theo phương pháp truyền thống của hệ đối xứng loại một, nhưng rõ ràng ở đây ta thấy có một sự máy móc trong cách biến đổi và trong phép đặt ẩn phụ $S = x + y, P = xy$, dẫn đến một lời giải dài dòng, cứng nhắc, thiếu sáng tạo như đã phân tích ở trên. Trong trường hợp này đối với những HSG, có khả năng sáng tạo với sự mềm dẻo về kiến thức, kết hợp với khả năng tư duy, nhìn nhận vấn đề tốt, nhìn ra được điểm riêng của bài toán, là trong HPT có các đại lượng có thể biểu diễn được qua nhau, các em có thể giải HPT đã cho bằng phương pháp đặt ẩn phụ ngay từ đầu như sau:

+ Điều kiện: $x \neq 0, y \neq 0$.

$$+ \text{Đặt } \begin{cases} a = x + \frac{1}{x} \\ b = y + \frac{1}{y} \end{cases}. \text{ Điều kiện: } \begin{cases} |a| \geq 2 \\ |b| \geq 2 \end{cases}. \text{ Suy ra: } \begin{cases} a^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2} \\ b^2 - 2 = y^2 + \frac{1}{y^2} \end{cases}.$$

+ Khi đó, hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 13 \\ a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a + b)^2 - 2ab = 13 \\ a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 5 \\ ab = 6 \end{cases}$$

+ Khi đó a, b là hai nghiệm của phương trình: $X^2 - 5X + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 2 \\ X = 3 \end{cases}$

+ Suy ra: $\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$.

+ Với $\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{x} = 2 \\ y + \frac{1}{y} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ y^2 - 3y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$

+ Với $\begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{x} = 3 \\ y + \frac{1}{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \\ y = 1 \end{cases}$

+ Vậy nghiệm của hệ đã cho là: $\left(1; \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right), \left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}; 1\right)$.

Nhận xét: Thông qua ví dụ này GV đã giúp HS vận dụng linh hoạt các hoạt động trí tuệ như: phân tích, tổng hợp, so sánh, khái quát hóa, trừu tượng hóa (nhìn vào đặc điểm chung của bài toán là hệ đối xứng loại một, nhưng nhìn vào điểm riêng của bài toán, là trong hệ có các đại lượng có thể biểu diễn được qua nhau, (các đại lượng $x + \frac{1}{x}$ và $y + \frac{1}{y}$ khi mang bình phương lên thì xuất hiện $x^2 + \frac{1}{x^2}$ và $y^2 + \frac{1}{y^2}$), từ đó dẫn tới phép đặt ẩn phụ phù hợp như đã xét), HS được rèn luyện khả năng chuyển từ hoạt động trí tuệ này sang hoạt động trí tuệ khác, chuyển từ giải pháp này sang giải pháp khác (chuyển từ cách giải truyền thống của hệ đối xứng loại một sang cách giải mới là phương pháp đặt hai ẩn phụ, theo đặc điểm riêng của bài toán); HS được rèn luyện cách suy nghĩ không dập khuôn, không máy móc, biết vận dụng sáng tạo các kiến thức, kinh nghiệm đã có, vào một tình huống mới, đã có yếu tố thay đổi (giải hệ theo cách truyền thống, cho một lời giải dài dòng, rối rắm, thiếu sáng tạo, thì phải chuyển hướng tìm kiếm một lời giải tốt hơn). Như vậy, với ví dụ này HS đã được rèn luyện tính mềm dẻo của TDST.

+ Tiếp sau đây, chúng ta xét thêm một ví dụ nữa, minh họa cho việc giúp HS rèn luyện tính mềm dẻo của TDST trong dạy học giải HPT. Xin mời thầy cô và các bạn cùng chuyển sang ví dụ 2:

Ví dụ 2: Giải các HPT sau: a) $\begin{cases} x^3 + 1 = 2y \\ y^3 + 1 = 2x \end{cases}$	b) $\begin{cases} x^3 = 2x + y \\ y^3 = 2y + x \end{cases}$
---	---

Quan sát thấy, hai HPT đã cho, đều là hệ đối xứng loại 2, do đó ý tưởng giải ở đây, là ta sẽ thực hiện trừ vế theo vế hai PT của hệ.

+ Đối với câu a), ta có:

Trừ vế theo vế, hai PT của hệ, ta được:

$$x^3 - y^3 = 2(y - x) \Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2 + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = y \quad (\text{do } x^2 + xy + y^2 + 2 > 0, \forall x, y)$$

Thay vào PT thứ nhất của hệ, ta được:

$$x^3 + 1 = 2x \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ là: $\begin{cases} x = y = 1 \\ x = y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$

+ Đối với câu b), ta có:

Trừ vế theo vế, hai PT của hệ, ta được:

$$x^3 - y^3 = x - y \Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 + xy + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

+) $x = y$ thay vào hệ ta được: $x^3 = 3x \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm\sqrt{3}$.

Suy ra, hệ có các nghiệm: $\begin{cases} x = y = 0 \\ x = y = \pm\sqrt{3} \end{cases}$

+) $x^2 + xy + y^2 - 1 = 0 \quad (1)$

Cộng vế theo vế hai PT của hệ, ta có: $x^3 + y^3 - 3(x + y) = 0$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ:
$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 - 1 = 0 \\ x^3 + y^3 - 3(x + y) = 0 \end{cases}$$

Đặt $S = x + y, P = xy$, ($S^2 \geq 4P$), ta có:

$$\begin{aligned} \begin{cases} S^2 - P - 1 = 0 \\ S^3 - 3SP - 3S = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} P = S^2 - 1 \\ S^3 - 3S(S^2 - 1) - 3S = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 0 \\ P = -1 \end{cases} \text{ (TM)} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ xy = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

+ Vậy HPT đã cho có 5 nghiệm phân biệt:

$$(x; y) \in \{(0; 0), (-1; 1), (1; -1), (\sqrt{3}; \sqrt{3}), (-\sqrt{3}; -\sqrt{3})\}$$

Phân tích: Trong lời giải ở ý a) ta thấy, việc trừ vế theo vế hai PT của hệ giúp ta thu được một PT tích là PT hệ quả của hệ ban đầu và rõ ràng việc giải PT hệ quả này cũng không có gì khó khăn với HS. Nhưng trong lời giải ý b), ta thấy câu chuyện đã có sự khác biệt lớn, việc trừ vế với vế hai PT của hệ cũng giúp ta thu được một PT hệ quả là PT tích, song việc xử lý gọn gàng, đẹp mắt đối với PT tích này, để đi tới thành công cho lời giải, lại là một khó khăn lớn đối với đa số HS. Nếu các em không nhận ra được vấn đề mới trong điều kiện quen thuộc, không nhìn thấy chức năng mới của đối tượng quen biết, không có sự sáng tạo trong tư duy giải toán, không có sự điều chỉnh kịp thời để phù hợp với hoàn cảnh mới, không có sự chuyển hướng về giải pháp mà cứ làm theo ý tưởng ở câu a) là chứng minh phương trình $x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$ vô nghiệm thì sẽ mắc phải sai lầm và đưa lời giải bài toán vào ngõ cụt, bởi một lẽ trong thực tế, PT này không vô nghiệm như PT $x^2 + xy + y^2 + 2 = 0$ đã xét trong lời giải ở câu a). Rõ ràng, để giải thành công bài hệ ở câu b) ngoài việc kế thừa phương pháp giải truyền thống của HPT đối xứng loại 2, là trừ vế theo vế hai PT của hệ, đòi hỏi người giải toán phải có sự tìm tòi, sáng tạo, phát hiện ra cái mới trong quá trình giải. Cụ thể ở đây sự sáng tạo được thể hiện qua thao tác, ghép phần còn lại của

phương trình tích thu được, (PT $x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$) với một PT hệ quả khác, được tạo ra nhờ cộng vế với vế hai PT của hệ đã cho (PT $x^3 + y^3 - 3(x + y) = 0$), tiến tới thành lập được một HPT đối xứng loại một quen biết (HPT $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 - 1 = 0 \\ x^3 + y^3 - 3(x + y) = 0 \end{cases}$), có thể giải được dễ dàng.

+ Qua lời giải của câu b) HS đã được rèn luyện khả năng chuyển từ giải pháp này sang giải pháp khác, điều chỉnh kịp thời hướng suy nghĩ khi gặp trở ngại.

Rèn luyện cách suy nghĩ không dập khuôn, không áp dụng một cách máy móc các kiến thức, kỹ năng, kinh nghiệm đã có vào hoàn cảnh mới, điều kiện mới, trong đó có những yếu tố đã thay đổi, có khả năng thoát khỏi ảnh hưởng kìm hãm của những kinh nghiệm, những phương pháp, những cách suy nghĩ đã có từ trước (từ bỏ cách thức đã xử lý đối PT $x^2 + xy + y^2 + 2 = 0$, trong lời giải câu a) đề xuất hướng giải mới cho PT $x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$, trong lời giải câu b) của ví dụ). Như vậy, thông qua ví dụ này, một lần nữa HS đã được rèn luyện với tính mềm dẻo của TDST.

1.1.4.2. Tính nhuần nhuyễn.

Thể hiện ở khả năng tạo ra một cách nhanh chóng sự tổ hợp các yếu tố riêng lẻ của tình huống, hoàn cảnh đưa ra giả thuyết mới và ý tưởng mới. Là khả năng tìm được nhiều giải pháp trên nhiều góc độ và tình huống khác nhau. Tính nhuần nhuyễn được đặc trưng bởi khả năng tạo ra một số lượng nhất định các ý tưởng. Số ý tưởng nghĩ ra càng nhiều thì khả năng xuất hiện ý tưởng độc đáo càng lớn.

Tính nhuần nhuyễn của tư duy có các đặc trưng sau:

- Thứ nhất: Tính đa dạng của các cách xử lý vấn đề, khả năng tìm được nhiều giải pháp trên nhiều góc độ và tình huống khác nhau. Đứng trước một vấn đề phải giải quyết, người có tư duy nhuần nhuyễn sẽ nhanh chóng tìm và đề xuất được nhiều phương án khác nhau, từ đó tìm được phương án tối ưu.

- Thứ hai: Là khả năng xem xét đối tượng dưới nhiều góc độ, khía cạnh khác nhau, có một cái nhìn sinh động từ nhiều phía đối với sự vật và hiện tượng, nhìn thấy vị trí của nó trong tổng thể hệ thống, chứ không phải cái nhìn, bất biến, phiến diện, cứng nhắc. Để minh họa cho các điều đã nói ở trên, chúng ta cùng nhau, xét ví dụ sau:

<p>Ví dụ: Giải HPT: $\begin{cases} x^3 - 3x^2 - 9x + 22 = y^3 + 3y^2 - 9y & (1) \\ x^2 + y^2 - x + y = \frac{1}{2} & (2) \end{cases}$</p>

+ Đây là một HPT hay, có rất nhiều ý tưởng giải dành cho nó, HS có thể tiếp cận từ nhiều góc độ khác nhau và từ đó tìm ra được nhiều cách giải khác nhau.

+ Nếu nhìn hệ đã cho dưới góc độ của hệ đối xứng, thì đây là hệ nửa đối xứng loại 1, từ đó HS có thể tiếp cận bài hệ này bằng phương pháp ẩn phụ, để đưa hệ ban đầu về hệ đối xứng loại 1, rồi giải hệ theo phương pháp giải truyền thống của hệ đối xứng loại 1. Ta có lời giải sau:

Cách 1:

+ Đặt $t = -x$

+ Hệ đã cho trở thành:
$$\begin{cases} t^3 + y^3 + 3t^2 + 3y^2 - 9(t + y) = 22 \\ t^2 + y^2 + t + y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

+ Đặt $S = y + t, P = yt$. Khi đó, hệ trở thành:

$$\begin{cases} S^3 - 3SP + 3(S^2 - 2P) - 9S = 22 \\ S^2 - 2P + S = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^3 - 3SP + 3(S^2 - 2P) - 9S = 22 \\ P = \frac{1}{2}(S^2 + S - \frac{1}{2}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2S^3 + 6S + 45S + 82 = 0 \\ P = \frac{1}{2}(S^2 + S - \frac{1}{2}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = -2 \\ P = \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow (x; y) \in \left\{ \left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2} \right); \left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2} \right) \right\}$$

+ Vậy, nghiệm của hệ là: $\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2} \right), \left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2} \right)$.

Nếu nhìn hệ đã cho dưới góc độ của phương pháp ẩn phụ phối hợp với phương pháp hàm số, cùng với sử dụng ứng dụng của đạo hàm thì HS có thể tiếp cận hệ như sau:

Cách 2: Hệ đã cho trở thành:
$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 - 9x + 22 = y^3 + 3y^2 - 9y \\ \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(y + \frac{1}{2} \right)^2 = 1 \end{cases}$$

$$+ \text{Đặt } \begin{cases} u = x - \frac{1}{2} \\ v = y + \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = u + \frac{1}{2} \\ y = v - \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$+ \text{Hệ đã cho biến đổi được: } \begin{cases} u^3 - \frac{3}{2}u^2 - \frac{45}{4}u = (v+1)^3 - \frac{3}{2}(v+1)^2 - \frac{45}{4}(v+1) (*) \\ u^2 + v^2 = 1 \end{cases}$$

$$+ \text{Xét hàm số } f(t) = t^3 - \frac{3}{2}t^2 - \frac{45}{4}t, \text{ có } f'(t) = 3t^2 - 3t - \frac{45}{4} < 0, \forall t \in [-1; 1]$$

+ Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $[-1; 1]$

+ Do đó PT (*) tương đương:

$$f(u) = f(v+1) \Leftrightarrow u = v+1 \Rightarrow (v+1)^2 + v^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} v = 0 \\ v = -1 \end{cases}$$

$$+ \text{Suy ra: } \begin{cases} u = 1 \\ v = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = 0 \\ v = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$+ \text{Vậy, hệ đã cho có hai nghiệm: } \left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right), \left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right).$$

Tiếp tục sử dụng phương pháp hàm số, kết hợp với đánh giá bất đẳng thức để ràng buộc điều kiện cho biến số, cùng dùng thêm ứng dụng của đạo hàm, HS có thêm cách thể xử lý hệ trên như sau:

Cách 3: Biến đổi PT thứ nhất của hệ đã cho, ta có:

$$x^3 - 3x^2 - 9x + 22 = y^3 + 3y^2 - 9y \Leftrightarrow (x-1)^3 - 12x + 23 = (y+1)^3 - 12y$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^3 - 12(x-1) = (y+1)^3 - 12(y+1) \quad (3)$$

+ Biến đổi PT thứ hai của hệ đã cho, ta có:

Số hóa bởi Trung tâm Học liệu - ĐHTN 13

<http://www.lrc-tnu.edu.vn/>

$$x^2 + y^2 - x + y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 1 \quad (4)$$

+ Từ (4) nhận thấy:
$$\begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 1 \\ \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x - \frac{1}{2} \leq 1 \\ -1 \leq y + \frac{1}{2} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2} \leq x - 1 \leq \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \leq y + 1 \leq \frac{3}{2} \end{cases}$$

+ Nên $x - 1, y + 1$ thuộc $(-2; 2)$.

+ Từ (3), xét $f(t) = t^3 - 12t$ với $t \in (-2; 2) \Rightarrow f'(t) = 3t^2 - 12 < 0, \forall t \in (-2; 2)$

+ Vì $x - 1, y + 1$ thuộc $(-2; 2)$ nên $x = y + 2$.

+ Thay $x = y + 2$ vào (2), ta được:

$$(y + 2)^2 + y^2 - (y + 2) + y = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4y^2 + 8y + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

+ Vậy, hệ có nghiệm là: $\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right), \left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

Nếu chỉ sử dụng công cụ nhẹ nhàng, quen thuộc, là phương pháp cộng đại số thì HS cũng có thể đưa ra một lời giải đầy giản dị, trong sáng và mạch lạc, không kém phần tinh tế như sau:

Cách 4: Lấy (1) trừ (2) về theo vế, ta được: $(x - y - 2)(2xy - 21) = 0$

+ TH1: $x = y + 2$ thay vào (2) ta được:

$$(y + 2)^2 + y^2 - (y + 2) + y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4y^2 + 8y + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

+ TH2: $2xy - 21 = 0$, kết hợp với phương trình thứ 2 của hệ ta được:

$$\begin{cases} 2xy - 21 = 0 \\ x^2 - 2xy + y^2 - (x - y) + 2xy = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x - y)^2 - (x - y) + 21 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(x - y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{81}{4} = 0 \text{ (PT vô nghiệm).}$$

+ Vậy, hệ có hai nghiệm là: $\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right), \left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

Nếu chỉ nhìn hệ dưới góc độ của phương pháp ẩn phụ, HS có thể sử dụng hai ẩn phụ, để biến đổi hệ đã cho như sau:

Cách 5: Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} (x - y)(x^2 + xy + y^2) - 3(x^2 + y^2) - 9(x - y) + 22 = 0 \\ x^2 + y^2 - (x - y) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - y)[(x + y)^2 - xy] - 3[(x + y)^2 - 2xy] - 9(x - y) + 22 = 0 \\ (x + y)^2 - 2xy - (x - y) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

+ Đặt $\begin{cases} a = x + y \\ b = x - y \end{cases} \Rightarrow xy = \frac{a^2 - b^2}{4}$

+ Hệ trở thành: $\begin{cases} b\left(a^2 - \frac{a^2 - b^2}{4}\right) - 3\left(a^2 - \frac{a^2 - b^2}{2}\right) - 9b + 22 = 0 \\ a^2 - \frac{a^2 - b^2}{2} - b = \frac{1}{2} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2b^3 - 6b^2 + 45b - 82 = 0 \\ a^2 = -b^2 + 2b + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

+ TH1: $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$

$$+ \text{TH2: } \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -1 \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$+ \text{Vậy, hệ có nghiệm là: } \left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right), \left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right).$$

Tiếp tục với phương pháp ẩn phụ, nhưng cách chọn ẩn có phần tinh tế hơn, hệ thu được sau khi đổi biến có có phần gọn gàng, giản dị hơn:

Cách 6: Viết lại hệ đã cho dưới dạng:

$$\begin{cases} (x-y)(x^2 + y^2 - xy) - 3(x^2 + y^2) - 9(x-y) + 22 = 0 \\ 2(x^2 + y^2) - 2(x-y) = 1 \end{cases}$$

$$+ \text{Đặt } \begin{cases} a = x^2 + y^2 \\ b = x - y \end{cases} \Rightarrow xy = \frac{a - b^2}{2}$$

$$+ \text{Khi đó ta có: } \begin{cases} b\left(a + \frac{a - b^2}{2}\right) - 3a - 9b + 22 = 0 \\ 2a - 2b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b-2)(2b^2 - 2b + 41) = 0 \\ a = \frac{2b+1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{2} \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{5}{2} \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow (x; y) \in \left\{\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right); \left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)\right\}$$

$$+ \text{Vậy hệ có các nghiệm là: } \left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right), \left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right).$$

Sau đây là hai cách giải nữa, tiếp cận hệ đã cho bằng phương pháp ẩn phụ, mỗi cách có một kiểu xử lý riêng, một vẻ đẹp riêng và đều có một sự tinh tế nhất định:

$$\textbf{Cách 7:} \text{Viết lại hệ dưới dạng: } \begin{cases} (x-1)^3 - 12(x-1) = (y+1)^2 - 12(y+1) \\ x^2 + y^2 - x + y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

+ Đặt $u = x - 1, v = y + 1$.

+ Khi đó PT thứ nhất của hệ trở thành: $(u - v)(u^2 + uv + v^2 - 12) = 0$

+) $u = v \Rightarrow y = x - 2$ thay vào PT thứ hai của hệ ta được: $4x^2 - 8x + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

+) $u^2 + uv + v^2 - 12 = 0$ (*)

+ Phương trình thứ hai của hệ tương đương với:

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 + (x-1) + (y+1) = \frac{1}{2} \Rightarrow u^2 + v^2 + u - v = \frac{1}{2}$$

+ Kết hợp với (*) ta có hệ: $\begin{cases} u^2 + uv + v^2 - 12 = 0 \\ u^2 + v^2 + u - v = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + uv + v^2 - 12 = 0 \\ 2u^2 + 2v^2 + 2u - 2v - 1 = 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} (u-v)^2 + 3uv = 12 \\ 2[(u-v)^2 + 2uv + u - v] = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3uv = 12 - (u-v)^2 \\ 6(u-v)^2 + 4.3uv + 6(u-v) = 3 \end{cases} \\ &\Rightarrow 6(u-v)^2 + 4[12 - (u-v)^2] + 6(u-v) = 3 \Leftrightarrow 2(u-v)^2 + 6(u-v) + 45 = 0 \end{aligned}$$

+ Vì phương trình cuối thu được vô nghiệm theo $u - v$ nên trường hợp này hệ ban đầu không có thêm nghiệm.

+ Vậy, hệ đã cho có hai nghiệm: $\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right), \left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

Cách 8: Hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases} (x-y)[(x-y)^2 + 3xy] - 3[(x-y)^2 + 2xy] - 9(x-y) + 22 = 0 \\ (x-y)^2 + 2xy - (x-y) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$+ \text{Đặt } \begin{cases} a = x - y \\ b = xy \end{cases}, \text{ ta có hệ: } \begin{cases} a(a^2 + 3b) - 3(a^2 + 2b) - 9a + 22 = 0 \\ a^2 + 2b - a = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a^3 + 3a \cdot 4b - 12a^2 - 6 \cdot 4b - 36a + 88 = 0 \\ 4b = -2a^2 + 2a + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4a^3 + 3a(-2a^2 + 2a + 1) - 12a^2 - 6(-2a^2 + 2a + 1) - 36a + 88 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2a^3 - 6a^2 + 45a - 82 = 0 \Leftrightarrow a = 2 \Rightarrow b = -\frac{3}{4}$$

$$+ \text{ Suy ra: } \begin{cases} x - y = 2 \\ xy = -\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + (-y) = 2 \\ x \cdot (-y) = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$+ \text{ Khi đó } x, (-y) \text{ là hai nghiệm của PT: } X^2 - 2X + \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{3}{2} \\ X = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$+ \text{ Suy ra: } \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$+ \text{ Vậy, hệ có hai nghiệm: } \left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right), \left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right).$$

Cuối cùng là một ý tưởng nữa, thể hiện sự phối hợp hài hòa và nhuần nhuyễn giữa đại số và lượng giác, đó là dựa vào đặc điểm riêng của hệ (trong hệ có tiềm ẩn yếu tố lượng giác) nên HS có thể tiếp cận hệ đã cho dưới góc độ của con mắt lượng giác. Trong trường hợp này, ta cũng có một lời giải hết sức gọn gàng và không kém phần đẹp mắt như sau:

Cách 9: Hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} (x - y)(x^2 + y^2 + xy - 9) + 22 = 3(x^2 + y^2) \quad (5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 1 \quad (6) \end{cases}$$

+ Từ (5), suy ra: $\exists a: x - \frac{1}{2} = \cos a, y + \frac{1}{2} = \sin a$ thay vào (5), sau đó đặt

$$t = \cos a - \sin a, |t| \leq \sqrt{2} \text{ ta được phương trình: } 2t^3 + 39t - 41 = 0 \Rightarrow t = 1$$

$$+ \text{ Suy ra: } \sqrt{2} \cos\left(a + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = k2\pi \\ a = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$$+ \text{ Với } a = k2\pi, (k \in \mathbb{Z}), \text{ ta có: } \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } a = -\frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}), \text{ ta có: } \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$+ \text{ Vậy, hệ có nghiệm: } \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Phân tích: Thông qua ví dụ này, HS đã được rèn luyện khả năng xem xét đối tượng dưới nhiều khía cạnh, nhiều góc độ khác nhau, từ đó nhanh chóng đề xuất được nhiều phương án giải khác nhau và tìm được phương án giải tối ưu (ở ví dụ này có nhiều cách giải tối ưu, như cách 2, cách 6, cách 9, vì nó rất gọn gàng, và giản dị, mỗi cách giải đều có một ưu thế riêng, thể hiện được sức mạnh của phương pháp giải, đồng thời cũng cho thấy sự nhuần nhuyễn, sáng tạo, nắm vững các phương pháp giải của người làm toán). Như vậy, HS đã được rèn luyện tính nhuần nhuyễn của TDST.

1.1.4.3. Tính độc đáo

Thể hiện ở khả năng tìm kiếm và giải quyết vấn đề bằng phương pháp lạ, độc đáo hoặc duy nhất. Tính độc đáo của tư duy sáng tạo thể hiện qua cách giải quyết vấn đề.

Tính độc đáo của tư duy có các đặc trưng sau:

- + Khả năng tìm ra những hiện tượng và kết hợp mới.
- + Khả năng tìm ra những mối liên hệ trong những sự kiện mà bên ngoài tưởng chừng không có liên hệ với nhau.

+ Khả năng tìm ra những giải pháp lạ, hiếm gặp dù có thể đã có những giải pháp khác hoặc tìm được giải pháp duy nhất cho vấn đề khó. Ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 1: Giải HPT:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ {}^{2013}\sqrt{x} - {}^{2013}\sqrt{y} = ({}^{2015}\sqrt{y} - {}^{2015}\sqrt{x})(x + y + xy + 2014) \end{cases}$$

+ Nhìn vào PT thứ nhất của hệ, ta thấy tiềm ẩn yếu tố lượng giác, nhưng nếu lượng giác hóa hệ trên bằng ẩn phụ là các hàm số lượng giác thì ta sẽ gặp vô vàn khó khăn khi phải giải quyết PT thứ hai với các căn có bậc khá lớn, trên chất liệu là các hàm số lượng giác. Như thế, ý tưởng lượng giác hóa hệ trên có thể đưa lời giải bài toán vào con đường bế tắc. Ta phải làm sao bây giờ? Quan sát hệ trên ta thấy, hệ có hình thức đẹp mắt và cũng rất đặc biệt, đặc biệt ở chỗ, hệ có sự xuất hiện của các hàm số khác nhau là các hàm căn thức không đồng bậc và các hàm đa thức, hơn nữa các hàm căn thức lại có bậc rất cao. Khi gặp các hệ có hình thức như thế này, HS muốn xử lý được thường phải sử dụng đến các phương pháp mạnh, như phương pháp đánh giá bất đẳng thức, hoặc phương pháp hàm số, hoặc là sự phối hợp hài hòa của nhiều phương pháp.

Với bài hệ này, HS có cách giải quyết bằng phương pháp đánh giá bất đẳng thức, ngắn gọn như sau:

+ Từ PT đầu của hệ, suy ra: $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$.

+ Ta có: $x + y + xy + 2014 = (x+1)(y+1) + 2013 \geq 2013 > 0$.

+ Do đó phương trình thứ hai suy ra: $x = y$.

+ Thay vào PT đầu của hệ ta được: $x = y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ hoặc $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$

+ Vậy hệ đã cho có hai nghiệm: $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Phân tích: Qua nhận định và lời giải trên, ta thấy đây là một bài hệ khá khó, lời giải được đề xuất cho nó dựa trên đặc điểm riêng của hệ, kết hợp với sự vận dụng tinh tế, kỹ thuật đánh giá bất đẳng thức. Rõ ràng, đây là một lời giải hết sức gọn gàng, sáng sủa, thể hiện được tính độc đáo cho kết quả đẹp.

Tiếp sau đây là một ví dụ nữa minh họa cho tính độc đáo của TDST trong dạy học giải hệ PT.

Ví dụ 2: Giải HPT: $\begin{cases} x+y + x-y \leq 2 & (1) \\ x^2+y^2=1 & (2) \end{cases}$

Vì PT (2) $x^2+y^2=1$ gợi liên tưởng đến công thức lượng giác quen thuộc $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$. Từ đó HS có thể tiếp cận bài hệ này theo hướng của phương pháp lượng giác hóa:

+ Đặt $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$, ta có: $\begin{cases} x+y = \cos t + \sin t = \sqrt{2} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \\ x-y = \cos t - \sin t = \sqrt{2} \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$

+ Suy ra: $|x+y|+|x-y| = \sqrt{2} \left(\left| \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \right| + \left| \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \right| \right)$

+ Do đó hệ đã cho trở thành: $\left| \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \right| + \left| \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \right| \leq \sqrt{2} \quad (3)$

+ Hai vế của PT đều không âm, bình phương hai vế, ta có:

$$PT(3) \Leftrightarrow \cos^2\left(t - \frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(t - \frac{\pi}{4}\right) + \left| \sin\left(2t - \frac{\pi}{2}\right) \right| \leq 2 \Leftrightarrow \left| \sin\left(2t - \frac{\pi}{2}\right) \right| \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \left| \sin\left(2t - \frac{\pi}{2}\right) \right| \leq 1 \Leftrightarrow |\cos 2t| \leq 1 \quad (\text{đúng } \forall t)$$

+ Kết luận: HPT đã cho có nghiệm: $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$

Ở ví dụ này, điểm mấu chốt, bước đột phá đưa đến lời giải đẹp cho bài toán là ý tưởng lượng giác hóa hệ đã cho. Việc giải hệ được thực hiện trên các phép biến đổi lượng giác, kết hợp với kỹ thuật đáng giá bất đẳng thức nhuần nhuyễn, tinh tế, dựa trên miền giá trị của hai hàm số lượng giác sin và cos. Qua ví dụ này HS được rèn luyện:

Thứ nhất, là khả năng tìm ra những mối liên hệ trong những sự kiện mà bên ngoài tưởng chừng không có liên hệ gì với nhau (tìm ra mối liên hệ giữa x và y trong đẳng thức $x^2 + y^2 = 1$ có tiềm ẩn yếu tố lượng giác).

Thứ hai, là khả năng tìm kiếm và giải quyết vấn đề khó bằng phương pháp lạ (giải HPT đại số không phải bằng công cụ của đại số mà bằng công cụ của lượng giác). Với bài hệ này, một lần nữa HS đã được rèn luyện tính độc đáo của TDST.

1.1.4.4. Tính hoàn thiện.

Tính hoàn thiện thể hiện ở khả năng lập kế hoạch, phối hợp các ý nghĩ và hành động, phát triển ý tưởng, kiểm tra và kiểm chứng ý tưởng. Đối với HS tính hoàn thiện của tư duy được hiểu là khả năng lập kế hoạch giải cho một bài toán, khả năng phối hợp giữa các giả thiết của bài toán với những tri thức đã biết để tìm ra lời giải của bài toán, khả năng tìm ra lời giải mới hoàn thiện hơn hoặc khả năng phát triển bài toán mới và có thể kiểm chứng được các ý tưởng mới đó.

Ví dụ: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} xy + x + 1 = 7y \\ x^2y^2 + xy + 1 = 13y^2 \end{cases}$

GV yêu cầu HS nhận xét về lời giải sau: Từ PT(1), ta có: $x(y+1)+1=7y$

$$\Leftrightarrow x(y+1)=7y-1 \Leftrightarrow x=\frac{7y-1}{y+1}, (y \neq -1), \text{ do } y=-1 \text{ không thỏa mãn hệ.}$$

+ Thế vào PT(2), ta được: $\left(\frac{7y-1}{y+1}\right)^2 \cdot y^2 + \frac{7y-1}{y+1} \cdot y + 1 = 13y^2$

$$\Leftrightarrow (7y-1)^2 y^2 + (7y-1)y(y+1) + (y+1)^2 = 13y^2(y+1)^2$$

$$\Leftrightarrow 36y^4 - 33y^3 - 5y^2 + y + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (y-1)(3y-1)(12y^2+5y+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \Rightarrow x=3 \\ y=\frac{1}{3} \Rightarrow x=1 \end{cases}$$

+ Vậy hệ đã cho có hai nghiệm: $\left(1; \frac{1}{3}\right), (3; 1)$.

HS nhận xét: Lời trên trên có ý tưởng giải là rõ ràng, (trong một hệ PT có một PT là bậc nhất theo ẩn x hoặc ẩn y , thì ta rút x theo y hoặc y theo x và thế vào PT còn lại), cho kết quả đúng nhưng việc rút x theo y từ PT (1) thế vào PT (2) dẫn đến thu

được một PT bậc cao làm cho lời giải có phần dài, việc tính toán cũng khá phức tạp, đòi hỏi người giải phải có kĩ năng tính toán tốt và cẩn thận trong quá trình giải, thì mới cho kết quả chính xác.

+ GV: Em có ý tưởng gì mới để khắc phục hạn chế của lời giải trên không?

+ HS: Với HPT trên, nếu sử dụng phương pháp biến đổi theo hướng ẩn phụ sẽ cho một lời giải đơn giản và ngắn gọn.

+ GV: Em hãy giải bài toán theo ý tưởng đó (kiểm chứng ý tưởng).

+ HS: Hệ đã cho tương đương:

$$\begin{cases} x + \frac{x}{y} + \frac{1}{y} = 7 \\ x^2 + \frac{x}{y} + \frac{1}{y^2} = 13 \end{cases} \quad (\text{do } y=0 \text{ không thỏa mãn hệ đã cho})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \frac{1}{y}\right) + \frac{x}{y} = 7 \\ \left(x + \frac{1}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \frac{1}{y}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{y}\right) - 20 = 0 \\ \frac{x}{y} = 7 - \left(x + \frac{1}{y}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{y} = -5 \\ x = 12y \end{cases} (I) \text{ hoặc } \begin{cases} x + \frac{1}{y} = 4 \\ x = 3y \end{cases}$$

$$+ \text{ Giải hệ (I): } \begin{cases} x + \frac{1}{y} = -5 \\ x = 12y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12y^2 + 5y + 1 = 0 \\ x = 12y \end{cases} \quad (\text{VN})$$

$$+ \text{ Giải hệ (II): } \begin{cases} x + \frac{1}{y} = 4 \\ x = 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y^2 - 4y + 1 = 0 \\ x = 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

+ Kết luận: Hệ có hai nghiệm: $(3;1), \left(1; \frac{1}{3}\right)$.

Phân tích: Thông qua hoạt động dạy và học ở trên HS đã được rèn luyện khả năng phát triển ý tưởng, kiểm chứng ý tưởng và tìm cách giải mới hoàn thiện hơn cách giải cũ. Như vậy HS đã được rèn luyện tính hoàn thiện của TDST.

1.1.4.5. Tính nhạy cảm vấn đề

Tính nhạy cảm vấn đề thể hiện ở khả năng nhanh chóng phát hiện vấn đề, tức là thấy cái sai lầm, cái thiếu logic để hoàn thiện; nhìn thấy cái mâu thuẫn để thay đổi, để cấu trúc lại, để phát triển ý tưởng mới.

Ví dụ: Tìm a để hệ PT sau có nghiệm:
$$\begin{cases} x + y + xy = 3 \\ x^2 y + xy^2 = a \end{cases}$$

GV đưa ra lời giải và yêu cầu HS phát hiện sai lầm:

+ Đặt $u = x + y$ và $v = xy$, ta có:
$$\begin{cases} u + v = 3 \\ uv = a \end{cases}$$

+ Theo định lý Vi-ét đảo thì u, v là các nghiệm của PT: $t^2 - 3t + a = 0(*)$

+ Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow (*)$ có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta_t' \geq 0 \Leftrightarrow 9 - 4a \geq 0 \Leftrightarrow a \leq \frac{9}{4}$

+ HS: Lời giải trên mới chỉ đảm bảo cho sự tồn tại u và v . Cũng theo định lý Vi-ét thì x, y là các nghiệm của PT $z^2 - uz + v = 0$.

+ Do đó hệ hai ẩn x, y có nghiệm \Leftrightarrow Hệ hai ẩn u, v có nghiệm thỏa mãn $u^2 - 4v \geq 0$

\Leftrightarrow Hệ
$$\begin{cases} u + v = 3 & (1) \\ uv = a & (2) \\ u^2 - 4v \geq 0 & (3) \end{cases}$$
 có nghiệm.

+ GV yêu cầu HS khắc phục sai lầm và giải lại bài toán.

+ HS: Đặt $u = x + y, v = xy$. Điều kiện: $u^2 - 4v \geq 0$, ta có hệ:
$$\begin{cases} u + v = 3 \\ uv = a \end{cases}$$

+ Hệ hai ẩn x, y có nghiệm \Leftrightarrow Hệ hai ẩn u, v có nghiệm thỏa mãn $u^2 - 4v \geq 0$

\Leftrightarrow Hệ
$$\begin{cases} u + v = 3 & (1) \\ uv = a & (2) \\ u^2 - 4v \geq 0 & (3) \end{cases}$$
 có nghiệm.

+ Từ (1) có $v = 3 - u$.

+ Thay vào (3): $u^2 - 4(3 - u) \geq 0 \Leftrightarrow u^2 - 4u - 12 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u \leq -6 \\ u \geq 2 \end{cases}$

+ Thế $v = 3 - u$ vào (2) ta có: $u \cdot (3 - u) = a$ (4).

+ Giá trị a thỏa mãn \Leftrightarrow (4) có nghiệm $u \notin (-6; 2)$.

+ Lập BBT của hàm số $f(u) = -u^2 + 3u, u \in (-6; 2)$, ta được kết quả $a \leq 2$

Nhận xét: Qua việc phát hiện sai lầm và sửa chữa sai lầm trong lời giải bài toán trên, HS đã được rèn luyện tính nhạy cảm vấn đề của TDST.

Như vậy các đặc trưng cơ bản trên của TDST không tách rời nhau mà trái lại chúng có quan hệ mật thiết với nhau, hỗ trợ bổ sung cho nhau. Khả năng dễ dàng chuyển từ hoạt động trí tuệ này sang hoạt động trí tuệ khác (tính mềm dẻo) tạo điều kiện để cho việc tìm được nhiều giải pháp trên nhiều góc độ khác nhau và khía cạnh khác nhau (tính nhuần nhuyễn) và nhờ đó đề xuất được nhiều phương án khác nhau mà có thể tìm được giải pháp lạ đặc sắc (tính độc đáo). Tất cả các yếu tố đặc trưng trên góp phần tạo nên TDST, đỉnh cao nhất trong các hoạt động trí tuệ của con người.

1.2. TIỀM NĂNG CỦA CHỦ ĐỀ HPT TRONG VIỆC PHÁT TRIỂN TDST KHI BỒI DƯỠNG HSG.

Trong nhiều năm qua, cũng như là các năm gần đây, câu HPT thường xuyên xuất hiện trong các kì thi tuyển sinh vào lớp 10, thi học sinh giỏi cấp tỉnh, thi học sinh giỏi quốc gia, đặc biệt nó là một trong những câu có tính phân loại cao trong đề thi tuyển sinh đại học hàng năm. Do đó chủ đề HPT luôn luôn là một chủ đề hấp dẫn, dành được sự quan tâm đặc biệt của cả học sinh và giáo viên. Các bài toán về HPT là sự tích hợp của hai hay nhiều phương trình khác nhau và trong mỗi PT của hệ người ta có thể đưa vào nhiều nội dung kiến thức khác nhau như căn thức, lượng giác, mũ, lôgarít,.... Vì vậy các HPT thường rất phong phú, đa dạng, chứa đựng nhiều độ phức tạp, độ khó và có tính phân loại cao đối với học sinh.

Tìm hiểu sâu những HPT xuất hiện trong các kì thi hiện nay, ta thấy chúng đều là những HPT không mẫu mực, không có dạng quen thuộc, không có một phương pháp giải cụ thể nào dành cho chúng, các cách giải được đề xuất, đều là sự phối hợp hài hòa của nhiều phương pháp khác nhau, điều này đòi hỏi người giải phải có một nền tảng kiến thức vững vàng, cũng như có khả năng tư duy nhạy bén, xem xét đối tượng dưới nhiều góc độ, ở nhiều khía cạnh khác nhau, nhanh chóng tìm và đề xuất được các phương án khác nhau, từ đó tìm được phương án giải tối ưu. Do đó dạy học giải HPT có nhiều cơ hội để rèn luyện khả năng xem xét đối tượng dưới nhiều góc độ, ở nhiều khía cạnh khác nhau từ đó tìm được nhiều cách giải và tìm được cách giải độc đáo.

Hay nói cách khác rèn luyện được tính nhuần nhuyễn, tính độc đáo của TDST.

Các bài toán về HPT tiềm ẩn những thách thức đối với HS. Có thể hình thức bài toán rất quen thuộc, nhưng khi bắt tay vào giải thì lại gặp khó khăn, vướng mắc mà với lối tư duy thông thường, với cách làm cũ sẽ không giải quyết được. Để giải được chúng HS cần vận dụng linh hoạt các tri thức, phương pháp khác nhau và phối hợp nhiều hoạt động như phân tích, tổng hợp, so sánh, khái quát hóa, tương tự hóa... để có thể chuyển hướng tư duy, điều chỉnh kịp thời hướng suy nghĩ, tìm thấy ý tưởng mới, cách giải quyết mới từ những tri thức, kinh nghiệm đã có. Ta xét ví dụ sau:

$$\text{Ví dụ: Giải HPT: } \begin{cases} (4x^2 + 1)x + (y - 1)\sqrt{5 - 2y} = 0 & (1) \\ 4x^2 + y^2 + 2\sqrt{3 - 4y} = 7 & (2) \end{cases}, (x, y \in \mathbb{R})$$

Quan sát HPT trên, HS có thể nhận thấy hệ có hình thức khá quen thuộc ngoài hàm đa thức thì trong hệ còn có sự xuất hiện của hàm căn thức, nhưng các biểu thức trong cả hai PT của hệ đều khá là xấu, nên nếu suy nghĩ theo hướng truyền thống là chuyển về cô lập căn rồi bình phương thì sẽ gặp khó khăn (vì khi đó ta vấp phải các phương trình bậc cao đối với x và y). Vì vậy ở đây ta phải có sự điều chỉnh về hướng nghĩ và ý tưởng giải. Trước tiên ta sẽ ẩn phụ hóa cho PT thứ nhất của hệ với mong muốn làm gọn và đẹp PT. Cụ thể ta có:

$$+ \text{ Điều kiện: } x \leq \frac{3}{4}, y \leq \frac{5}{2}.$$

$$+ \text{ Đặt } u = 2x \Rightarrow u \leq \frac{3}{2}, v = \sqrt{5 - 2y} \Rightarrow y = \frac{5 - v^2}{2}.$$

$$+ \text{ Khi đó PT (1) của hệ trở thành: } (u^2 + 1)\frac{u}{2} - \frac{v^2 + 1}{2}v = 0 \Leftrightarrow (u - v)(u^2 + uv + v^2 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow u = v \text{ (do } u^2 + uv + v^2 + 1 > 0, \forall u, v \in \mathbb{R} \text{)}.$$

$$+ \text{ Với } u = v \Leftrightarrow 2x = \sqrt{5-2y} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{3}{4} \\ y = \frac{5-4x^2}{2} (*) \end{cases}.$$

$$+ \text{ Đến đây, thế } (*), \text{ vào PT (2) ta được: } 4x^2 + \left(\frac{5-4x^2}{2}\right)^2 + 2\sqrt{3-4x} = 7 \quad (3).$$

+ PT (3) khá phức tạp, khó có thể giải quyết được bằng các phương pháp thông thường. Lúc này, ý tưởng giải của ta là sử dụng công cụ hàm số để xử lý:

+ Vì $x=0, x=\frac{3}{4}$ không là nghiệm của PT (3).

+ Xét hàm số: $g(x) = 4x^2 + \left(\frac{5-4x^2}{2}\right)^2 + 2\sqrt{3-4x} - 7$ liên tục trên khoảng $\left(0; \frac{3}{4}\right)$.

$$+ \text{ Ta có: } g'(x) = 4x(4x^2 - 3) - \frac{4}{\sqrt{3-4x}} < 0, \forall x \in \left(0; \frac{3}{4}\right).$$

+ Suy ra $g(x)$ nghịch biến trên $\left(0; \frac{3}{4}\right)$ và $g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

+ Vậy PT (3) có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{2}$. Do đó $y = 2$.

+ Kết luận: HPT có nghiệm duy nhất : $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

Phân tích: Qua lời giải trên ta thấy, để đi tới được đáp số của bài hệ, đòi hỏi HS phải có nền tảng kiến thức vững vàng, tư duy linh hoạt, nhạy bén, sáng tạo, có khả năng điều chỉnh kịp thời khi gặp trở ngại (gặp khó khăn vướng mắc với lối tư duy thông thường, với cách làm cũ không giải quyết được thì phải tìm ý tưởng mới, cách giải quyết mới từ những tri thức, kinh nghiệm đã có), có khả năng vận dụng kiến thức ở mức độ cao, phối hợp nhiều hoạt động như phân tích, tổng hợp, so sánh,..., đồng thời cũng phải có khả năng phối hợp nhịp nhàng nhiều phương pháp giải hệ khác nhau như phương pháp thế, phương pháp đặt ẩn phụ, pháp pháp hàm số tiến đến giải quyết thành công bài hệ. Do đó thông qua dạy học giải toán về HPT, HS sẽ được rèn luyện tính mềm dẻo của TDST.

Trong quá trình giải, HS phải thực hiện nhiều phép biến đổi, phức tạp như biến đổi hệ quả, biến đổi tương đương để đưa về PT, HPT quen biết; phép rút thế hoặc tạo ra

các lượng liên hợp để làm xuất hiện nhân tử chung, chuyển HPT về PT tích hoặc PT đẳng cấp; phép đặt ẩn phụ để hữu tỉ hóa HPT hoặc làm đơn giản, làm gọn đẹp HPT; sử dụng phép lượng giác hóa, hình học hóa.... Nếu HS không nắm vững kiến thức, kỹ năng thì rất dễ mắc sai lầm trong quá trình biến đổi giải toán. Do đó việc dạy học giải HPT sẽ có cơ hội tốt để rèn luyện khả năng phát hiện ra mâu thuẫn, sai lầm,... trong lời giải và sửa chữa hoàn thiện, tối ưu hóa lời giải. Qua đó sẽ rèn luyện được cho HS tính nhạy cảm vấn đề và tính hoàn thiện của TDST.

1.3. TÌNH HÌNH DẠY VÀ HỌC HPT VỚI ĐỐI TƯỢNG HSG THPT.

1.3.1. Mục tiêu và nội dung dạy học chủ đề hệ phương trình ở trường trung học phổ thông.

1.3.1.1 Mục tiêu của chủ đề hệ phương trình.

Mục tiêu của chủ đề là giúp HS hệ thống được các dạng toán hay về HPT, thường gặp trong các kì thi tuyển sinh vào lớp 10, thi HSG cấp tỉnh, thi HSG quốc gia, thi tuyển sinh đại học cao đẳng. Đồng thời cung cấp cho HS các phương pháp giải và kỹ thuật xử lý HPT trong quá trình học tập của mình ở trường THPT.

Góp phần quan trọng vào việc phát triển các năng lực trí tuệ cho HS như năng lực phân tích, tổng hợp, so sánh, trừu tượng hóa, khái quát hóa, xét tương tự, đặc biệt..., hình thành khả năng suy luận, lập luận đặc trưng của toán học, cần thiết cho cuộc sống.

Góp phần hình thành và phát triển các phẩm chất, phong cách lao động khoa học, biết hợp tác lao động, có ý chí và thói quen tự học thường xuyên, tự học suốt đời.

1.3.1.2 Nội dung dạy học của chủ đề hệ phương trình ở trường THPT.

Như ta đã biết, HPT là một trong những nội dung cơ bản nhất của chương trình môn toán ở trường phổ thông. Sau đây, chúng ta cùng nhau tìm hiểu và xem xét mạch kiến thức về HPT được đưa vào chương trình toán THPT như thế nào? Từ đó giúp chúng ta thấy rõ được nội dung dạy học của chủ đề HPT ở trường THPT.

a) Bậc tiểu học.

Trước khi học tường minh về HPT, HS đã làm quen một cách ẩn tàng với những HPT, kể cả việc giải chúng ngay từ bậc tiểu học, chẳng hạn: HS lớp 5 phải giải

bài toán sau: Tổng của hai số là 121. Tỉ số của hai số đó là $\frac{5}{6}$. Tìm hai số đó.

Hoặc bài toán: Tuổi của con gái bằng $\frac{1}{4}$ tuổi mẹ, tuổi của con trai bằng $\frac{1}{5}$ tuổi mẹ. Tuổi của con gái cộng với tuổi của con trai là 18 tuổi. Hỏi mẹ bao nhiêu tuổi?

b) Bậc trung học cơ sở.

Ở bậc THCS, HPT được đưa vào trong chương trình SGK toán 9. Cụ thể trong Chương 3 Đại số 9, HS được học về HPT bậc nhất hai ẩn, HPT tương đương và phép biến đổi tương đương đối với HPT. Các phương pháp giải HPT (phương pháp thế, phương pháp cộng đại số). Giải bài toán bằng cách lập HPT.

c) Bậc trung học phổ thông.

+ Tổng kết và nâng cao các kiến thức về HPT mà HS đã được học ở bậc THCS và Tiểu học. Cụ thể:

+ Trong SGK Đại số 10, Chương 3 PT và HPT, HS được học tương đối đầy đủ và chặt chẽ các kiến thức PT và HPT. HS được học giải hệ hai PT bậc nhất hai ẩn, hệ hai PT bậc hai hai ẩn, hệ nhiều PT bậc nhất nhiều ẩn và một số HPT đưa về PT bậc hai. Trong khi ở trường THCS, HS chủ yếu làm việc với các HPT không chứa tham số thì ở lớp 10 các em đã được làm việc với các HPT chứa tham số, đòi hỏi HS giải và biện luận trong khi giải.

+ Trong SGK toán 11, HPT được tích hợp trong Chương 2 Tổ hợp - Xác suất, Chương 3 Dãy số - Cấp số cộng và Cấp số nhân. HS phải giải các HPT liên quan đến công thức số các hoán vị, số các chỉnh hợp, số các tổ hợp; cấp số cộng và cấp số nhân.

+ Trong SGK toán 12, HPT được tích hợp trong Chương Hàm số lũy thừa – Hàm số mũ – Hàm số lôgarit, Chương 4 Số phức. HS phải giải các bài toán về HPT như giải HPT mũ và lôgarit, giải HPT trên tập hợp số phức.

Như vậy, từ mạch kiến thức về HPT ta thấy, các tác giả viết sách giáo khoa đã xây dựng nội dung HPT trong chương trình toán THPT tương đối đầy đủ, từ đơn giản đến phức tạp, từ mức độ thấp đến mức độ cao, từ chỗ chưa chặt chẽ đến chỗ chặt chẽ.

- *Thông qua chủ đề này:*

HS được củng cố và đào sâu một số kiến thức về tập hợp và logic toán, cụ thể là những khái niệm về tập hợp, phần tử, quan hệ bao hàm, quan hệ giao nhau giữa các tập hợp, các phép toán hợp, giao của hai tập hợp, các phép toán logic “kéo theo” và “tương đương”.

HS được rèn luyện các kỹ năng giải HPT, biết các phương pháp giải HPT như phương pháp thế, phương pháp cộng đại số, phương pháp đặt ẩn phụ, phương pháp vectơ, phương pháp đồ thị, phương pháp hàm số, phương pháp lượng giác hóa, phương pháp bất đẳng thức,..., qua đó thấy được mối quan hệ giữa HPT với PT, giữa HPT với biểu thức, đẳng thức và các phép biến đổi đồng nhất, giữa HPT với hình học tọa độ, giữa HPT với hàm số...

HS được phát triển về mặt tư duy thuật giải trong việc giải một số HPT theo thuật giải hoặc theo một hệ quy tắc xác định, được rèn luyện về tính linh hoạt và khả năng sáng tạo, thông qua việc giải những HPT không mẫu mực.

HS được rèn luyện về tính quy củ, tính có kế hoạch, tính kỉ luật trong việc giải một số HPT theo một hệ thống quy tắc biến đổi xác định, được giáo dục về tính cẩn thận, tính chính xác và thói quen tự kiểm tra trong việc giải HPT nói chung, đó là những phẩm chất không thể thiếu của con người lao động trong thời kỳ mới.

HS thấy rõ được ý nghĩa thực tế của HPT thông qua việc giải những bài toán có nội dung như giải bài toán bằng cách lập HPT hoặc xác định miền nghiệm của hệ bất PT bậc nhất nhiều ẩn,...

Mặt khác thông qua mạch kiến thức về HPT ta cũng thấy được mặc dù nội dung HPT, HS được học ở bậc THPT tương đối đầy đủ và chặt chẽ. Khối lượng kiến thức và yêu cầu truyền đạt theo SGK thì nhiều nhưng thời lượng phân phối chương trình dành cho nội dung này thì ít, (5 tiết chính khóa đối với SGK Đại số 10 nâng cao), đây là một khó khăn lớn đối với GV trong việc truyền tải đầy đủ và sâu rộng các kiến thức về HPT đến với HS. Thiết nghĩ chương trình đổi mới căn bản và toàn diện giáo dục phổ thông sắp tới đây được thực hiện, SGK phổ thông được viết lại nên có sự điều chỉnh hợp lý và kịp thời về thời lượng phân phối chương trình cho nội dung HPT để góp phần tạo điều kiện thuận lợi cho việc dạy và học nội dung này hiệu quả hơn, thiết thực hơn.

1.3.2. Thực trạng việc phát triển tư duy sáng tạo khi bồi dưỡng HSG trong dạy học HPT.

Qua quá trình giảng dạy của bản thân và tham khảo ý kiến của các bạn đồng nghiệp chúng tôi nhận thấy:

+ *Đối với giáo viên:*

- Đã áp dụng các phương pháp dạy học khác nhau với yêu cầu đổi mới phương pháp dạy học khi giảng dạy nhưng còn chưa nhiều, thiếu tài liệu về tổ chức dạy học tích cực nên GV còn lúng túng trong việc tổ chức dạy học theo phương pháp mới nhằm phát triển TDST trong học toán cho HS.

- Trong dạy học, đa số GV nặng về phân dạng toán dựa theo phương pháp giải chúng, rồi cho HS làm bài tập theo các phương pháp được định hướng trước, điều này phần nào cũng làm hạn chế khả năng sáng tạo của các em. GV chưa quan tâm tới việc giúp HS tự mình phát hiện, khám phá, tự mình vận dụng kiến thức tìm tòi mở rộng các vấn đề, chưa đặt vấn đề tự học vào đúng vị trí của nó, do đó HS học tập một cách thụ động, máy móc, ít có sự linh hoạt, sáng tạo trong tư duy của mình. Những điều này ảnh hưởng nghiêm trọng đến chất lượng học tập của HS.

- Các bài toán HPT thường khá phức tạp do nó chứa đựng nhiều nội dung kiến thức khác nhau. Để giải được thành công một HPT đi đến đáp số cuối cùng, đòi hỏi người giải phải sử dụng nhiều phép biến đổi phức tạp. Do đó khi giải toán về HPT, HS còn mắc không ít sai lầm, do áp dụng sai quy tắc, định lý hoặc hiểu không đúng các khái niệm, định nghĩa, sai lầm về các phép biến đổi,..., nhất là đối với các HPT có chứa căn thức, hoặc có sự tích hợp với lượng giác, mũ, lôgarit. Tuy nhiên đối với đa số GV thì chỉ khi nào HS mắc sai lầm thì mới sửa chữa, uốn nắn.

Họ chưa chủ động tập luyện cho HS thói quen, kỹ năng phát hiện và sửa chữa sai lầm.

- Để có thể tìm được nhiều cách giải và cách giải độc đáo cho một HPT thì ngoài việc phải có nền tảng kiến thức, kỹ năng cơ bản vững chắc HS còn phải hiểu biết một cách sâu rộng các tri thức. Nhưng một số GV chưa chú ý đến việc củng cố, mở rộng, đào sâu các tri thức Toán học cho HS. Điều này dẫn đến nền tảng kiến thức, kỹ năng, vốn tri thức của HS bị hạn chế, ảnh hưởng tới sự sáng tạo của các em.

- Hầu hết GV chưa biết cách xây dựng các bài toán mới nhằm phát triển TDST cho HSG, mà chủ yếu sử dụng bài tập trong SGK và các sách, tài liệu tham khảo sẵn có. Bên cạnh đó, các bài tập trong sách giáo khoa chưa có nhiều bài tập hay và khó đòi hỏi HS tư duy nhiều trong quá trình giải, đặc biệt là đối với HSG, điều này cũng góp phần làm hạn chế việc phát triển TDST của HS.

- Đa số các GV đều cho rằng các bài toán giải HPT là những bài toán khó đối với HS do đó các giáo viên giảng dạy thường không chú trọng cho HS vấn đề này.

- Như vậy, việc phát triển TDST cho HS trong dạy học giải HPT còn nhiều bất cập, hạn chế. Nguyên nhân chủ yếu là nhiều GV chưa hiểu rõ và sâu sắc về TDST, chưa quan tâm, chưa nắm được các biện pháp để phát triển TDST cho HS.

+ *Đối với học sinh:*

HPT đại số là mảng kiến thức quan trọng, phong phú và đa dạng có nhiều phương pháp giải khác nhau và rất thường gặp trong các kì thi HSG cũng như kỳ thi tuyển sinh Đại học, cao đẳng. Mặc dù HS được cạo xát phần này khá nhiều song phần lớn các em vẫn thường lúng túng trong quá trình tìm ra cách giải, chưa thể hiện được nhiều khả năng sáng tạo cũng như năng lực giải toán của mình. Nguyên nhân là vì:

Thứ nhất, HPT là mảng kiến thức phong phú và khó, đòi hỏi người học phải có tư duy sâu sắc, có sự kết hợp nhiều mảng kiến thức khác nhau.

Thứ hai, SGK trình bày phần này khá đơn giản, tài liệu tham khảo đề cập đến phần này khá nhiều song sự phân loại chưa dựa trên cái gốc của bài toán nên khi học, HS chưa có sự liên kết, định hình và chưa có cái nhìn tổng quát về HPT.

Thứ ba, đa số HS đều học một cách máy móc, chưa có thói quen tìm ra bài toán xuất phát, chưa biết được bài toán trong đề thi do đâu mà có.

Thứ tư, một số không ít HS còn gặp lúng túng khi giáo viên thay đổi một vài yếu tố của bài toán đã biết; khó khăn khi không có sự gợi ý của giáo viên; không linh hoạt khi chuyển từ dạng bài tập này sang dạng bài tập khác.

Thứ năm, hầu hết học sinh sau khi giải xong một bài toán không có thói quen khai thác lời giải, tìm nhiều lời giải và chọn lời giải tối ưu, tìm bài toán tổng quát, lật ngược vấn đề... Khi gặp bài toán mới chưa biết cách giải các em ít khi xem xét các trường hợp riêng để tự mò mẫm, dự đoán kết quả, từ đó tìm lời giải mà thường đợi sự gợi ý của giáo viên.

+ *Tình hình dạy và học hệ phương trình nhìn nhận từ yêu cầu phát triển tư duy sáng tạo.*

- Có một bộ phận không nhỏ GV chưa ý thức được vai trò của việc bồi dưỡng và phát triển TDST cho HS hoặc không có phương pháp để bồi dưỡng TDST cho HS.

Họ chưa thường xuyên đặt ra các yêu cầu đối với HS như: tìm nhiều cách giải cho một bài toán, từ đó tìm được cách giải độc đáo của bài toán hoặc chưa tập luyện cho HS tính linh hoạt, mềm dẻo trong giải toán, chưa chủ động giúp HS khai thác mở rộng bài toán, tìm kiếm sai lầm và chỉ ra nguyên nhân sai lầm trong lời giải bài toán ... nhằm phát triển TDST cho

các em. Dạy học còn thiên về kỹ năng giải toán mà nhẹ về rèn luyện tư duy giải toán cho HS, nhất là TDST.

- Do cách dạy của một bộ phận không nhỏ giáo viên như đã nói ở trên đã làm cho HS học tập một cách thụ động, năng lực tư duy độc lập và sáng tạo bị hạn chế.

- HPT là sự tích hợp của hai hay nhiều PT khác nhau, trong HPT thường có sự xuất hiện của nhiều nội dung kiến thức khác nhau, tạo ra độ phức tạp, độ khó cao đối với HS nên khi học toán về HPT đa số các em chưa có hứng thú trong học tập, khả năng tự học còn kém, đa số HS thường chỉ học những nội dung mà giáo viên giảng dạy trên lớp, chứ chưa chịu khó tự học, tự tìm tòi khám phá, sáng tạo thêm kiến thức cho bản thân.

- + Tóm lại HPT là một nội dung hay và khó của môn Toán trong chương trình THPT, nó đòi hỏi cả GV và HS không ngừng bồi dưỡng nâng cao kiến thức về nội dung này. Để làm tốt việc giảng dạy, bồi dưỡng HSG, GV cần phải xây dựng và áp dụng được các biện pháp sư phạm nhằm phát triển TDST trong giải toán HPT nói riêng và trong toán học nói chung cho HS. Để làm tốt nhiệm vụ học tập, lĩnh hội tri thức mới, HS cần nỗ lực không ngừng theo định hướng của GV và luôn cố gắng hoàn thiện mình bằng con đường học tập tự giác, tự nghiên cứu, tích cực chiếm lĩnh tri thức.

1.4. NHỮNG BIỂU HIỆN CỦA HỌC SINH GIỎI VỀ TOÁN VÀ NĂNG KHIẾU TOÁN HỌC.

1.4.1. Những biểu hiện của học sinh giỏi về toán

Học sinh giỏi về toán thường có những biểu hiện rõ rệt các mặt sau:

- Có khả năng tiếp thu và vận dụng kiến thức nhanh.
- Biểu hiện ở sự linh hoạt trong quá trình tư duy như:
 - + Dễ dàng chuyển từ hoạt động trí tuệ này sang hoạt động trí tuệ khác, không bị gò ép bởi những suy nghĩ rập khuôn có sẵn.
 - + Có khả năng nhìn nhận vấn đề theo nhiều khía cạnh khác nhau, kết hợp sự liên tưởng tốt, tìm ra cách giải quyết vấn đề một cách sáng tạo.
 - + Biết nhìn nhận những cái khác biệt của vấn đề, lựa chọn phương tiện, cách thức tốt nhất để giải quyết vấn đề đó.
 - + Lý luận chặt chẽ, hợp logic, có các thao tác tư duy nhanh trong giải toán.

- Biểu hiện ở cách ghi nhớ kiến thức Toán học cô đọng, nhanh chóng, chính xác và bền vững, giúp học sinh giỏi về toán nhớ được nhiều kiến thức mà không tốn quá nhiều sức lực và trí tuệ khi giải toán.

Các biểu hiện của học sinh trên đây là những biểu hiện cụ thể về những mặt khác nhau của một cấu trúc năng lực hoàn chỉnh, một tư chất của Toán học trí tuệ, người ta gọi đó là năng khiếu Toán học.

1.4.2. Năng khiếu toán học

Năng khiếu, theo định nghĩa của từ điển Tiếng Việt là năng lực trội, năng lực đặc biệt của con người xuất hiện từ khi còn nhỏ. Như vậy, năng khiếu Toán học có thể coi như một tổ hợp những năng lực Toán học, mà ở lứa tuổi học sinh thể hiện rõ nhất ở năng lực toán. Nhà tâm lý học V.A.Korutecxki cho rằng “Năng lực học tập Toán học là những đặc điểm tâm lý cá nhân (trước hết là các đặc điểm hoạt động trí tuệ), đáp ứng yêu cầu hoạt động học toán và giúp cho việc nắm giáo trình toán một cách tương đối nhanh, dễ dàng và sâu kiến thức, kỹ năng và kỹ xảo Toán học”.

Theo quan điểm tâm lý học, trong mỗi con người đều tiềm tàng một năng khiếu, một tài năng, tất nhiên ở mức độ khác nhau. Đó là một kết luận quan trọng. Trong quá trình dạy học toán, người thầy cần có những biện pháp phát hiện những năng khiếu Toán học ở học trò, từ đó chúng ta có thể tạo ra môi trường và tổ chức các hoạt động thích hợp giúp các em phát triển năng lực đó.

1.5. KẾT LUẬN CHƯƠNG 1.

Trong chương 1, chúng tôi đã tiến hành:

- + Tìm hiểu khái niệm về tư duy, TDST thể hiện ở việc phân tích những đặc điểm của tư duy và đặc trưng cơ bản của TDST.
- + Làm rõ biểu hiện của TDST trong quá trình học giải toán về HPT của HS và tiềm năng của chủ đề HPT trong việc phát triển TDST khi bồi dưỡng HSG.
- + Tìm hiểu thực trạng việc phát triển TDST cho HSG trong dạy học HPT ở trường THPT.
- + Làm rõ những biểu hiện của HSG về toán và năng khiếu toán học.

Có thể nói rằng, HPT là một chủ đề quan trọng trong đại số của chương trình toán THPT, là một chủ đề thường xuyên xuất hiện trong các đề thi tuyển sinh vào lớp 10, trong các đề thi HSG cấp tỉnh thành phố, thi HSG quốc gia, thi tuyển sinh vào các

trường cao đẳng đại học hàng năm, đây cũng là một chủ đề khó đối với GV và HS trong quá trình luyện, ôn thi HSG. Nếu được quan tâm xứng đáng thì chủ đề HPT là một trong những công cụ hiệu quả trong việc bồi dưỡng và phát triển TDST cho HSG ở trường THPT. Từ những kết quả nghiên cứu ở chương 1, là cơ sở để chúng tôi đề xuất một số biện pháp sư phạm nhằm phát triển TDST cho HSG thông qua dạy học HPT ở trường THPT ở chương 2.

CHƯƠNG 2 - MỘT SỐ BIỆN PHÁP SỬ DỤNG ĐỂ PHÁT TRIỂN TƯ DUY SÁNG TẠO CHO HSG THÔNG QUA DẠY HỌC HPT Ở TRƯỜNG THPT

2.1. ĐỊNH HƯỚNG XÂY DỰNG BIỆN PHÁP SỬ DỤNG.

a) Đáp ứng được mục đích của việc dạy và học bộ môn Toán ở trường phổ thông.

Dạy học theo định hướng phát triển TDST trước hết phải đáp ứng được mục đích của dạy học môn Toán. Cụ thể là:

- Hình thành, củng cố tri thức, kỹ năng, kỹ xảo ở những giai đoạn khác nhau của quá trình dạy học, kể cả những kỹ năng ứng dụng Toán học vào thực tế.
- Phát triển năng lực trí tuệ, rèn luyện các thao tác tư duy, trong đó có TDST.
- Bồi dưỡng thể giới quan duy vật biện chứng, hình thành những phẩm chất đạo đức của con người lao động mới

b) Khai thác chương trình và SGK hiện hành.

Nội dung HPT trong chương trình SGK hiện nay chủ yếu trình bày những khái niệm, những định lý, quy tắc cơ bản. Đối với phần bài tập cũng khá đơn giản, chỉ đòi hỏi HS tư duy ở mức độ thấp. Tuy nhiên có rất nhiều dạng bài tập HPT có thể khai thác để phát triển TDST cho HS. Thực tế là trong các đề thi chọn HSG, thi tuyển sinh đại học cao đẳng luôn có những bài toán HPT hay và khó, đòi hỏi sự sáng tạo rất lớn của HS. Vì vậy ngoài việc khai thác triệt để các cơ hội sẵn có trong SGK, GV còn phải chú trọng mở rộng, đào sâu các tri thức trong SGK để bồi dưỡng TDST cho HS.

c) Bám sát định hướng đổi mới PPDH môn Toán ở THPT hiện nay.

Định hướng đổi mới PPDH môn Toán trong giai đoạn hiện nay đã được xác định là: “ Phương pháp dạy học toán trong nhà trường các cấp phải phát huy tính tích cực, tự giác, chủ động của người học hình thành và phát triển năng lực tự học, trau dồi các phẩm chất linh hoạt, độc lập, sáng tạo của tư duy” (Chương trình Giáo dục phổ thông môn Toán của Bộ giáo dục và Đào tạo ban hành theo quyết định số 16/2006/QĐ-BGD&ĐT ngày 5 tháng 5 năm 2006).

Theo định hướng dạy học này, GV là người thiết kế, tổ chức, hướng dẫn, điều khiển quá trình học tập còn HS là chủ thể nhận thức, biết cách tự học, tự rèn luyện, từ đó hình thành phát triển nhân cách và các năng lực cần thiết của con người lao động.

+ *Dạy học thông qua tổ chức các hoạt động của HS:*

Trong hoạt động đó, HS cần phải được cuốn hút vào những hoạt động học tập do GV tổ chức và chỉ đạo, thông qua đó HS tự khám phá những điều mình chưa biết chứ không phải thụ động tiếp thu những tri thức đã sắp đặt sẵn. Theo tinh thần này, trong các tiết lên lớp GV là người tổ chức và chỉ đạo HS tiến hành các hoạt động học tập: củng cố kiến thức cũ, tìm tòi phát hiện kiến thức mới, luyện tập vận dụng kiến thức vào các tình huống khác nhau, thông qua các hoạt động để phát hiện và chiếm lĩnh tri thức, hình thành thói quen vận dụng kiến thức toán học vào thực tiễn cuộc sống.

+ *Dạy học chú trọng rèn luyện phương pháp tự học:*

Trong hoạt động dạy học theo phương pháp mới, GV giúp HS chuyển từ thói quen học tập thụ động sang tự học chủ động. Muốn vậy, GV cần rèn luyện cho HS những tri thức phương pháp để HS biết cách học, biết cách suy luận, biết cách tự tìm lại những điều đã quên, biết cách tìm tòi để phát hiện kiến thức mới. Việc nắm vững phương pháp sẽ giúp HS có thể tự đọc tài liệu, tự làm được bài tập, nắm vững và hiểu sâu các kiến thức cơ bản đồng thời phát huy được tiềm năng sáng tạo của bản thân.

+ *Tăng cường học tập cá thể phối hợp với học tập hợp tác:*

PPDH đổi mới yêu cầu HS phải “nghĩ nhiều hơn, làm nhiều hơn, thảo luận nhiều hơn”. Điều này có nghĩa HS phải có sự cố gắng trí tuệ và nghị lực cao trong quá trình tự lực tiếp nhận kiến thức mới, phải thực sự suy nghĩ và làm việc một cách tích cực, độc lập đồng thời phải có mối quan hệ hợp tác cá nhân trên con đường tìm tòi phát hiện kiến thức mới.

+ *Kết hợp đánh giá của thầy với tự đánh giá của trò:*

Để phát huy vai trò tích cực chủ động của HS, GV cần hướng dẫn HS phát triển kỹ năng tự đánh giá để tự điều chỉnh cách học của mình. GV có thể yêu cầu HS tự đánh giá bài làm của mình, nhận xét góp ý bài làm, cách phát biểu của bạn, phê phán các sai lầm và tìm nguyên nhân sai lầm, nêu cách sửa chữa sai lầm...

2.2. MỘT SỐ BIỆN PHÁP SỬ DỤNG.

2.2.1. Biện pháp 1: Củng cố tri thức, đào sâu, mở rộng các khái niệm, tính chất, các quy tắc phương pháp có liên quan, tập luyện kỹ năng giải HPT để tạo điều kiện nền tảng cho phát triển TDST ở HSG.

a) Cơ sở và ý nghĩa của biện pháp:

Việc HS nắm vững các kiến thức, thành thạo các kỹ năng và phương pháp giải để làm tốt các bài toán về HPT là hết sức quan trọng. Bởi vì chỉ có nắm vững các kiến thức, kỹ năng và phương pháp giải đó thì HS mới có “vốn” để sáng tạo trong quá trình học tập. Thực tế giảng dạy hiện nay cho thấy, ngay cả với HSG không phải em nào cũng nắm vững kiến thức cơ bản, thành thạo kỹ năng giải toán.

Do vậy việc củng cố tri thức, đào sâu, mở rộng các định nghĩa, khái niệm, tính chất, quy tắc phương pháp có liên quan cũng như tập luyện các kỹ năng giải các bài toán HPT là hết sức cần thiết.

b) Cách thực hiện:

+ Khi dạy học giải toán về HPT, theo năng lực trình độ của HS và nội dung bài toán, GV có thể tổ chức những hoạt động dạy học phù hợp để củng cố tri thức đồng thời giúp HS tập luyện các kỹ năng cần thiết trong giải HPT tạo điều kiện nền tảng cho việc phát triển TDST cho HS.

Chẳng hạn trong dạy học bài mới (dạy lý thuyết) GV thực hiện dạy chắc chắn lý thuyết đồng thời củng cố kiến thức, kỹ năng cơ bản cho HS thông qua các câu hỏi có tính chất tổng hợp kiến thức cao hoặc thông qua các bài tập ngắn nhưng đòi hỏi HS phải hiểu sâu, hiểu chắc lý thuyết mới có thể trả lời được. Ví dụ GV có thể đưa ra các câu hỏi sau đây, khi dạy học về lý thuyết HPT.

+ GV: Em hãy cho biết, một HPT có bao giờ vô nghiệm không? Khi nào thì một HPT vô nghiệm? Có phải khi từng PT của hệ đều có nghiệm thì HPT có nghiệm hay không?

Hoặc khi dạy học luyện tập trước khi dạy, GV có thể giao cho HS một vài bài tập về nhà ở mức độ dễ và vừa phải, nhưng các bài tập đó sẽ được sử dụng và làm nền cho việc giải các bài tập khó trong giờ học luyện tập ngày hôm sau.

Hoặc khi dạy học ôn tập chương, GV có thể đưa ra các bài tập có tính chất tổng hợp các kiến thức của chương, nhưng trong các bài tập đó tiềm ẩn những yếu tố mà HS có thể mắc sai lầm trong quá trình giải. Khi đó GV sẽ tổ chức các hoạt động dạy và học nhằm giúp HS phát hiện và sửa chữa sai lầm của mình, củng cố kiến thức vững chắc cho các em.

GV có thể giúp HS mở rộng, đào sâu kiến thức của mình, thông qua việc tổ chức, hướng dẫn HS sử dụng các kiến thức cũ, các kinh nghiệm đã có vào giải các bài toán mới mà tưởng chừng với những kiến thức và kinh nghiệm ấy sẽ không giải quyết được.

+ HS tự giác, tích cực, nhiệt tình, hăng hái, tham gia trả lời các câu hỏi và các hoạt động học tập do giáo viên tổ chức, chịu sự chỉ đạo, hướng dẫn của GV.

c) Một số ví dụ:

Ví dụ 1: Dạy học giải và biện luận HPT dạng bậc nhất hai ẩn.

Trong dạy học giải và biện luận HPT dạng bậc nhất hai ẩn, thực tế là có không ít HS, kể cả HSG cũng có thể bị mắc sai lầm trong việc kết luận về nghiệm của hệ, dẫn đến lời giải không chính xác.

+ Chẳng hạn có HS giải và biện luận HPT
$$\begin{cases} (a+b)x + (a-b)y = 1 \\ (2a-b)x + (2a+b)y = 1 \end{cases} \quad (I)$$

như sau:

+ Ta có: $D = \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ 2a-b & 2a+b \end{vmatrix} = 6ab$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & a-b \\ 1 & 2a+b \end{vmatrix} = a+2b; D_y = \begin{vmatrix} a+b & 1 \\ 2a-b & 1 \end{vmatrix} = -a+2b$$

+ Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0$ và $b \neq 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{a+2b}{6ab}; y = \frac{D_y}{D} = \frac{-a+2b}{6ab}$$

+ Nếu $\begin{cases} a=0 \\ b \neq 0 \end{cases}$ thì khi đó $D=0; D_x = D_y = 2b$ nên hệ vô nghiệm.

+ Nếu $\begin{cases} b=0 \\ a \neq 0 \end{cases}$ thì khi đó $D=0; D_x = -D_y = a$ nên hệ vô nghiệm.

+ Nếu $\begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$ thì khi đó $D=0; D_x = D_y = 0$ nên hệ có vô số nghiệm

+ Dễ thấy lời giải trên của HS bị sai vì:

+ Nếu $\begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$ thì khi đó hệ $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 0.x + 0.y = 1 \\ 0.x + 0.y = 1 \end{cases}$, hệ này vô nghiệm.

+ GV có thể giúp HS khắc phục sai lầm trong lời giải trên, để được lời giải đúng như sau:

+ Ta có: $D = \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ 2a-b & 2a+b \end{vmatrix} = 6ab$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & a-b \\ 1 & 2a+b \end{vmatrix} = a+2b; D_y = \begin{vmatrix} a+b & 1 \\ 2a-b & 1 \end{vmatrix} = -a+2b$$

+ Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0$ và $b \neq 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{a+2b}{6ab}; y = \frac{D_y}{D} = \frac{-a+2b}{6ab}$$

+ Nếu $\begin{cases} a=0 \\ b \neq 0 \end{cases}$ thì khi đó $D=0; D_x = D_y = 2b \neq 0$ nên hệ vô nghiệm.

+ Nếu $\begin{cases} b=0 \\ a \neq 0 \end{cases}$ thì khi đó $D=0; D_x = -D_y = a \neq 0$ nên hệ vô nghiệm.

+ Nếu $\begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$ thì khi đó $D=0; D_x = D_y = 0; c_1 = c_2 = 1 \neq 0$ nên hệ vô nghiệm.

+ Kết luận:

+ Nếu $a \neq 0$ và $b \neq 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất: $x = \frac{a+2b}{6ab}; y = \frac{-a+2b}{6ab}$.

+ Nếu $a=0, b \neq 0$ hoặc $a \neq 0, b=0$ hoặc $a=b=0$ thì hệ vô nghiệm.

Như vậy việc HS không nắm chắc các bước giải và biện luận HPT dạng bậc nhất hai ẩn cũng như chưa thành thạo việc kết luận nghiệm tương ứng cho mỗi trường hợp đã dẫn đến xảy ra sai lầm trong lời giải. Để khắc phục điều này GV có thể tổ chức các hoạt động dạy và học để củng cố các bước giải và biện luận HPT bậc nhất hai ẩn, đồng thời củng cố cách kết luận nghiệm cho từng trường hợp tương ứng như sau:

Hoạt động 1: Củng cố các bước giải và biện luận HPT dạng bậc nhất hai ẩn, cách kết luận nghiệm cho mỗi bước tương ứng:

+ GV: Ghi các bước giải và biện luận HPT dạng bậc nhất hai ẩn lên bảng và yêu cầu HS điền vào dấu: ... để được kết luận đúng.

+ Cho HPT (chứa tham số) dạng bậc nhất hai ẩn: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

+ Ta có: $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$

+ Nếu $D \neq 0$ thì hệ ...

+ Nếu $\begin{cases} D = 0 \\ D_x \neq 0 \text{ thì hệ ...} \\ D_y \neq 0 \end{cases}$

+ Nếu $\begin{cases} D = 0 \\ D_x = D_y = 0 \text{ thì hệ ...} \\ a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 \neq 0 \end{cases}$

+ Nếu $\begin{cases} D = 0 \\ D_x = D_y = 0 \text{ thì hệ ...} \\ a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0 \\ c_1^2 + c_2^2 \neq 0 \end{cases}$

+ Nếu $\begin{cases} D = 0 \\ D_x = D_y = 0 \text{ thì hệ ...} \\ a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0 \\ c_1 = c_2 = 0 \end{cases}$

+ HS: Suy nghĩ và lên bảng điền kết quả (Mỗi HS điền kết quả của một trường hợp)

+ GV: Nhận xét, sửa chữa cho HS làm sai (nếu có). Yêu cầu HS ghi nhớ và viết các kết quả sau vào vở:

+ Cho HPT (chứa tham số) dạng bậc nhất hai ẩn: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

+ Ta có: $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$

+ Nếu $D \neq 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất $x = \frac{D_x}{D}; y = \frac{D_y}{D}.$

+ Nếu $\begin{cases} D = 0 \\ D_x \neq 0 \text{ thì hệ vô nghiệm.} \\ D_y \neq 0 \end{cases}$

+ Nếu $\begin{cases} D = 0 \\ D_x = D_y = 0 \text{ thì hệ có vô số nghiệm.} \\ a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 \neq 0 \end{cases}$

$$+ \text{ Nếu } \begin{cases} D = 0 \\ D_x = D_y = 0 \\ a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0 \\ c_1^2 + c_2^2 \neq 0 \end{cases} \text{ thì hệ vô nghiệm.}$$

$$+ \text{ Nếu } \begin{cases} D = 0 \\ D_x = D_y = 0 \\ a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0 \\ c_1 = c_2 = 0 \end{cases} \text{ thì hệ có vô số nghiệm.}$$

Hoạt động 2: Vận dụng vào giải toán:

GV cho HS giải các bài toán sau:

Bài toán: Giải và biện luận HPT sau:
$$\begin{cases} (1 - \sin \alpha)x + \cos \alpha y = \cos \alpha \\ \cos \alpha x + (1 - \sin \alpha)y = \sin \alpha \end{cases} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

Với bài toán này GV có thể hướng dẫn để HS nhận dạng được HPT trên.

+ GV: HPT trên có phải là HPT bậc nhất hai ẩn đối với hai biến x và y không?

+ HS: Suy nghĩ, dựa vào định nghĩa HPT hai ẩn x và y để đưa ra câu trả lời, từ đó HS đưa ra được lời giải sau:

Lời giải: Ta có:

$$D = \begin{vmatrix} 1 - \sin \alpha & \cos \alpha \\ \cos \alpha & 1 - \sin \alpha \end{vmatrix} = 2 \sin \alpha (\sin \alpha - 1)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \alpha \\ \sin \alpha & 1 - \sin \alpha \end{vmatrix} = \cos \alpha (1 - 2 \sin \alpha)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 - \sin \alpha & \cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix} = \sin \alpha - 1$$

+ Biện luận:

$$+ \text{ Nếu } D \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \alpha \neq 0 \\ \sin \alpha \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \neq k\pi \\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{thì hệ có nghiệm duy nhất: } \begin{cases} x = \frac{\cos \alpha (1 - 2 \sin \alpha)}{2 \sin \alpha (\sin \alpha - 1)} \\ y = \frac{1}{2 \sin \alpha} \end{cases}$$

$$+ \text{ Nếu } D=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \alpha = 0 \\ \sin \alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = k\pi \\ \alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$$+ \text{ Nếu } \alpha = k\pi \text{ thì hệ đã cho trở thành: } \begin{cases} x + (-1)^k = (-1)^k \\ (-1)^k x + y = 0 \end{cases}$$

+ Ta thấy dù k chẵn hay k lẻ thì hệ trên luôn vô nghiệm.

$$+ \text{ Nếu } \alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi \text{ thì hệ đã cho trở thành: } \begin{cases} 0.x + 0.y = 0 \\ 0.x + 0.y = 1 \end{cases} \text{ hệ này vô nghiệm.}$$

+ Kết luận:

$$+ \text{ Nếu } \begin{cases} \alpha \neq k\pi \\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \text{ thì hệ có nghiệm duy nhất: } \begin{cases} x = \frac{\cos \alpha (1 - 2 \sin \alpha)}{2 \sin \alpha (\sin \alpha - 1)} \\ y = \frac{1}{2 \sin \alpha} \end{cases}$$

$$+ \text{ Nếu } \alpha = k\pi \text{ và } \alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}) \text{ thì hệ vô nghiệm.}$$

Ví dụ 2: Dạy học giải HPT bằng phương pháp đưa về HPT bậc nhất hai ẩn.

Hoạt động 1: Mở rộng, đào sâu phương pháp giải HPT bậc nhất hai ẩn vào giải các dạng HPT khác.

+ GV nêu vấn đề:

Ta đã biết một HPT bậc nhất hai ẩn luôn giải được bằng phương pháp thế, phương pháp cộng đại số hoặc thông qua công cụ định thức cấp hai. Khi đứng trước một HPT nào đó, nếu tinh ý quan sát, ta có thể đưa một HPT phức tạp về một HPT bậc nhất hai ẩn đơn giản hơn, từ đó sử dụng được các phương pháp giải hệ bậc nhất hai ẩn quen biết để xử lý bài toán.

+ GV đưa ra câu hỏi: Em hãy nêu một vài dấu hiệu nhận biết một HPT bất kỳ có thể đưa được về một HPT bậc nhất hai ẩn?

+ HS: Suy nghĩ vận dụng định nghĩa HPT bậc nhất hai ẩn và lấy một vài ví dụ để trả lời câu hỏi.

+ GV: Nhận xét câu trả lời của HS và đưa ra một số dấu hiệu nhận biết một HPT bất kỳ có thể đưa được về HPT bậc nhất hai ẩn:

+ Có một nhân tử lặp lại ở cả hai PT của hệ (một căn thức, hoặc một biểu thức của x và y, \dots) và các thành phần còn lại chỉ có dạng bậc nhất của x và y .

+ GV đưa ra ví dụ:

+ Hệ
$$\begin{cases} (x+y)\sqrt{2xy+8} = 4xy-3y+7 \\ (x+2y)\sqrt{2xy+8} = x-7y+6xy+3 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$
 có thể đưa về HPT bậc nhất hai

ẩn do có đại lượng $\sqrt{2xy+8}$ lặp lại ở cả hai PT của hệ, các thành phần còn lại đều có dạng bậc nhất theo x và y .

+ GV: Thật vậy, đặt $u = \sqrt{2xy+8} \geq 0 \Rightarrow xy = \frac{u^2-8}{2}$, ta được HPT bậc nhất hai ẩn x

và y là:
$$\begin{cases} ux + (u+3)y = 2u^2 - 9 \\ (1-u)x - (7+2u)y = 21 - 3u^2 \end{cases}$$

+ Có hai nhân tử lặp lại ở cả hai PT của hệ (có hai căn thức, hoặc hai biểu thức của x và y, \dots).

+ GV: Lấy ví dụ: Hệ
$$\begin{cases} x^2 + y + x^3y + xy^2 + xy = -\frac{5}{4} \\ x^4 + y^2 + xy(1+2x) = -\frac{5}{4} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$
 có thể đưa về HPT bậc

nhất hai ẩn do cả hai PT của hệ đều có hai đại lượng y và y^2 .

+ GV: Thật vậy, viết lại HPT trên dưới dạng:
$$\begin{cases} xy^2 + (x^3 + x + 1)y = -x^2 - \frac{5}{4} \\ y^2 + (2x^2 + x)y = -x^4 - \frac{5}{4} \end{cases}$$

+ Đặt $a = y^2, b = y$, ta được HPT bậc nhất hai ẩn a và b :
$$\begin{cases} xa + (x^3 + x + 1)b = -x^2 - \frac{5}{4} \\ a + (2x^2 + x)b = -x^4 - \frac{5}{4} \end{cases}$$

Hoạt động 2: Vận dụng vào giải toán:

+ GV: Yêu cầu HS giải bài toán sau:

Bài toán 1: Giải HPT: $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0 & (1) \\ 2x^2 + xy - y^2 - 5x + y + 2 = 0 & (2) \end{cases}$
--

GV: Hướng dẫn (nếu cần):

+ Hệ PT đã cho gồm hai PT bậc hai đối với x và y . Với hệ này HS có thể giải bằng phương pháp biến đổi một trong hai PT của hệ về dạng tích nhờ phân tích đa thức thành nhân tử hoặc xem một trong hai PT của hệ là PT bậc hai theo x hoặc y .

+ Trong trường hợp này ẩn còn lại đóng vai trò tham số. Thực hiện tính biệt thức Δ . Nếu Δ là chính phương thì sẽ tìm được mối liên hệ giữa x và y . Sau đó thực hiện rút thế x theo y hoặc y theo x và thế vào PT còn lại của hệ.

HS: Thực hiện theo yêu cầu của GV:

+ Xét PT (2) của hệ ta có:

$$2x^2 + xy - y^2 - 5x + y + 2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + (y-5)x - y^2 + y + 2 = 0(*)$$

+ Ta có: $\Delta_x = (y-5)^2 - 8(-y^2 + y + 2) = (3y-3)^2 \geq 0$.

+ Suy ra PT (*) có hai nghiệm: $x = \frac{y+1}{2}$ và $x = 2-y$.

+ Tiến hành rút thế vào PT(1), HS sẽ tìm được nghiệm của hệ.

+ GV: Ngoài cách giải trên, các em còn cách nào khác để giải HPT này hay không?

+ HS: Có thể giải HPT này bằng cách đưa về HPT bậc nhất hai ẩn theo x và y .

+ GV: Em hãy thực hiện:

+ HS: Đặt $t = x^2$. Khi đó hệ trở thành:
$$\begin{cases} t + x = -y^2 - y + 4 \\ 2t + (y-5)x = y^2 - y - 2 \end{cases}$$

+ Xét hệ bậc nhất hai ẩn t và x có:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & y-5 \end{vmatrix} = y-7; \quad D_x = \begin{vmatrix} 1 & -y^2 - y + 4 \\ 2 & y^2 - y - 2 \end{vmatrix} = 3y^2 + y - 10$$

$$D_t = \begin{vmatrix} -y^2 - y + 4 & 1 \\ y^2 - y - 2 & y-5 \end{vmatrix} = -y^3 + 3y^2 + 10y - 8$$

+ Vì $y=7$ không là nghiệm của hệ nên suy ra $D \neq 0$.

+ Khi đó hệ có nghiệm duy nhất:
$$\begin{cases} t = \frac{D_t}{D} \\ x = \frac{D_x}{D} \end{cases}$$

+ Vì $t = x^2 \Rightarrow \frac{D_t}{D} = \left(\frac{D_x}{D}\right)^2$

$$\Leftrightarrow D_t \cdot D = D_x^2 \Leftrightarrow (y-7)(-y^3 + 3y^2 + 10y - 8) = (3y^2 + y - 10)^2$$

$$\Leftrightarrow 5y^4 - 2y^3 - 24y^2 + 34y - 13 = 0 \Leftrightarrow (y-1)^2(5y^2 + 8y - 13) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \Rightarrow x=1 \\ y=-\frac{13}{5} \Rightarrow x=-\frac{4}{5} \text{ (TM)} \end{cases}$$

+ Vậy hệ có hai nghiệm: $(1;1), \left(-\frac{4}{5}; -\frac{13}{5}\right)$.

Nhận xét: Như vậy với sự hướng dẫn của GV, HS đã tìm ra thêm một cách giải nữa cho bài hệ. Ở bài hệ này cách đưa về HPT bậc nhất hai ẩn có vẻ việc tính toán trở nên nặng nề phức tạp. Nhưng cái mà HS thu được trong lời giải này là sự sáng tạo độc đáo khi vận dụng được công thức giải hệ bậc nhất hai ẩn vào giải HPT bậc hai hai ẩn. Như thế, khi đứng trước một HPT, HS sẽ có nhiều sự lựa chọn khác nhau về mặt phương pháp, tạo nên sự linh hoạt, mềm dẻo trong giải toán.

Tiếp tục củng cố tri thức, mở rộng, đào sâu việc sử dụng phương pháp giải HPT bậc nhất hai ẩn vào giải các HPT khác, GV yêu cầu HS giải bài toán sau:

<p>Bài toán 2: Giải HPT: (I) $\begin{cases} (x+y)\sqrt{x^2+7} + y\sqrt{2y^2+1} = xy + 2y^2 \\ 2x\sqrt{x^2+7} + (x+y)\sqrt{2y^2+1} = 3xy - x^2 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$</p>
--

GV: HPT trên có thể đưa về HPT bậc nhất hai ẩn theo hai biến mới được không? Nếu được, em hãy thực hiện?

+ HS: Suy nghĩ, vận dụng các dấu nhận biết ở trên để trả lời câu hỏi, từ đó đưa ra được lời giải sau:

Lời giải: Với điều kiện $(x, y \in \mathbb{R})$, ta đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x^2+7} \geq 0 \\ b = \sqrt{2y^2+1} \geq 0 \end{cases}$

+ Khi đó HPT trở thành: $\begin{cases} (x+y)a + yb = xy + 2y^2 \\ 2xa + (x+y)b = 3xy - x^2 \end{cases} \quad \text{(II)}$

+ Xem HPT (II) là hệ bậc nhất hai ẩn a, b . Khi đó ta tính được các định thức:

$$D = \begin{vmatrix} x+y & y \\ 2x & x+y \end{vmatrix} = x^2 + y^2; D_x = \begin{vmatrix} xy + 2y^2 & y \\ 3xy - x^2 & x+y \end{vmatrix} = 2y(x^2 + y^2)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} x+y & xy + 2y^2 \\ 2x & 3xy - x^2 \end{vmatrix} = -x(x^2 + y^2)$$

+ Nếu $D = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$ (TM)

$$+ \text{ Nếu } D \neq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \neq 0 \text{ ta có } \begin{cases} a = \frac{D_x}{D} = 2y \\ b = \frac{D_y}{D} = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + 7} = 2y \\ \sqrt{2y^2 + 1} = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases}$$

+ Vậy HPT (I) có hai nghiệm là $(0;0)$ và $(-3;2)$.

Nhận xét: Với bài toán này việc HS nhận ra dạng của hệ đã cho có thể đưa được về HPT bậc nhất hai ẩn là vô cùng hợp lý! Có thể nói đây là điểm mấu chốt, bước đột phá dẫn đến một lời giải đẹp mắt cho bài toán. Rõ ràng lời giải trên hết sức tự nhiên, trong sáng và không kém phần độc đáo. Qua hai bài toán trên HS đã được củng cố, đào sâu, mở rộng và tập luyện kỹ năng giải HPT bằng phương pháp chuyển HPT trình đã cho về HPT bậc nhất hai ẩn và sử dụng phương pháp giải truyền thống của HPT bậc nhất hai ẩn là công cụ định thức cấp hai, tiến đến giải quyết bài toán.

2.2.2. Biện pháp 2: Tập luyện cho HS thói quen không suy nghĩ cứng nhắc theo những quy tắc đã học, không máy móc áp dụng những mô hình đã gặp để ứng xử linh hoạt trước những tình huống mới.

a) Cơ sở và ý nghĩa của biện pháp:

Một trong các thuộc tính quan trọng của TDST là tính mềm dẻo. Tính mềm dẻo thể hiện ở khả năng dễ dàng chuyển từ giải pháp này sang giải pháp khác, không suy nghĩ cứng nhắc theo những quy tắc đã học, không máy móc áp dụng những mô hình đã gặp để ứng xử linh hoạt trước những tình huống mới. Vì vậy biện pháp này nhằm mục đích rèn luyện tính mềm dẻo cho HS. Từ đó tạo điều kiện thuận lợi cho việc phát triển TDST cho HS.

b) Cách thực hiện:

+ GV: Tổ chức các hoạt động dạy và học mà qua đó HS phải suy nghĩ linh hoạt, mềm dẻo, không rập khuôn máy móc, phải thực hiện các hoạt động trí tuệ chung như: phân tích, so sánh, liên tưởng,... để tìm ra cách thức mới, vấn đề mới.

+ Thông thường GV yêu cầu HS làm các bài tập mà thoát nhìn HS nghĩ là có thể làm được bằng cách đã biết, quen thuộc. Tuy nhiên khi bắt tay vào làm thì gặp khó khăn, thậm chí là không thể giải nổi theo cách đó. Hoặc GV đưa ra cho HS các bài tập có thể giải theo cách đã học (cách cũ) nhưng GV yêu cầu HS không giải theo

cách đó (cách đã biết) mà hãy tìm lời giải mới cho bài toán. Khi đó đòi hỏi HS phải chuyển hướng tư duy để tìm cách giải mới. Ví dụ GV yêu cầu HS giải một HPT bằng phương pháp của hình học, mặc dù HPT đó HS có thể giải tốt bằng phương pháp của đại số, trong trường hợp này các em phải chuyển hướng tư duy để kiếm tìm lời giải mới bằng phương pháp hình học cho bài toán.

+ Khi thực hiện biện pháp này, GV phải linh hoạt, mềm dẻo trong gợi ý vấn đề để HS có thể tổng hợp được các công cụ đã học để giải quyết bài toán, không áp đặt để HS có thể phát triển được thói quen không suy nghĩ cứng nhắc hay máy móc bắt chước theo một hướng giải quyết nào đó. GV cũng cần để HS sáng tạo và khích lệ sự sáng tạo của HS khi đưa ra các hướng giải quyết chứ không liệt kê ra cụ thể tất cả các phương pháp mà nên đưa ra các dấu hiệu tương ứng của bài toán rồi gợi ý dần dần đến khi HS phát hiện ra phương pháp.

Ta cùng nhau xét các ví dụ sau:

c) Một số ví dụ:

Ví dụ 1: Dạy học giải HPT : (I) $\begin{cases} x^4 + y^4 = 1 & (1) \\ x^{10} + y^{10} = 1 & (2) \end{cases}$

GV có thể tổ chức dạy học như sau:

+ GV: HPT này thuộc dạng cơ bản nào? Cách giải ?

+ HS : Đây là HPT thuộc dạng hệ đối xứng loại 1. Đặt $x+y=S$ $xy=P$.

+ GV: Các em hãy tìm cách giải HPT trên?

+ HS: Đến đây HS sẽ tìm cách biến đổi HPT đã cho về HPT mới mà các PT trong hệ có chứa tổng $x+y$ và tích xy . Tuy nhiên các em vấp phải một trở ngại không nhỏ, khi số mũ của x và y trong hệ là quá lớn nên việc đưa về tổng và tích của x và y là không hề đơn giản. Như vậy HS đã gặp phải khó khăn khi vận dụng cách giải truyền thống của HPT đối xứng loại 1. Các em cần phải chuyển hướng tư duy tìm cách giải khác cho bài toán.

+ GV có thể gợi ý cho HS như sau (nếu cần): Với HPT trên x và y có số mũ là khá cao và đều là bậc chẵn. Hơn nữa tổng của chúng bằng 1. Điều này lên gợi ý tưởng ta có thể đánh giá hệ đã cho trên miền giá trị của x và y . Sau đó xét dấu đẳng thức xảy ra để suy ra nghiệm của hệ.

+ HS: Từ (1) có: $0 \leq x^4 \leq 1, 0 \leq y^4 \leq 1$. Suy ra: $|x| \leq 1, |y| \leq 1$.

$$+ \text{ Với } 0 \leq |x| \leq 1 \Rightarrow x^{10} \leq x^4$$

$$+ \text{ Với } 0 \leq |y| \leq 1 \Rightarrow y^{10} \leq y^4$$

$$+ \text{ Nên: } x^{10} + y^{10} \leq x^4 + y^4 \quad (3)$$

$$+ \text{ Từ (1), (2) và (3) ta suy ra: } \begin{cases} x^{10} = x^4 \\ y^{10} = y^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4(x^6 - 1) = 0 \\ y^4(y^6 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ y = 0 \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

+ Thay vào hệ và kiểm tra thì nhận được nghiệm như sau:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Nhận xét: Như vậy qua hoạt động tìm tòi lời giải HPT (I), HS đã được tập luyện với việc suy nghĩ linh hoạt, không rập khuôn máy móc, không áp dụng cứng nhắc theo những quy tắc đã học, những mô hình đã gặp. HS đã nhận xét được miền giá trị của x và y , dựa vào đặc điểm riêng của HPT, dẫn đến phép đánh giá bất đẳng thức đầy tinh tế, tạo nên một lời giải đẹp cho bài toán. HS cũng đã nhìn thấy chức năng mới (giải hệ phương trình) của một đối tượng quen thuộc (là công cụ bất đẳng thức). Như vậy hoạt động này đã rèn luyện được tính mềm dẻo linh hoạt của TDST cho HS. GV tiếp tục đưa ra ví dụ sau:

Ví dụ 2: Dạy học giải HPT:	$\begin{cases} 2013x^{2014} + 2014x^{2015} + 2015x^{2016} = 2014 \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y + 6z - 7 = 0 \\ 2x + y + 4z - 5 = 0 \end{cases}$
-----------------------------------	--

Khi gặp bài toán này HS sẽ nghĩ ngay đến những cách giải quen thuộc như phương pháp thế, phương pháp biến đổi tương đương, phương pháp đặt ẩn phụ, hoặc phương pháp đánh giá,...Tuy nhiên nếu áp dụng một cách rập khuôn máy móc những cách đó thì sẽ gặp khó khăn, bế tắc. Đến đây đòi hỏi HS phải tư duy linh hoạt, mềm dẻo, phải chuyển sang hướng khác để tìm lời giải. GV có thể hướng dẫn HS chuyển hướng tư duy sang phương pháp hình học như sau:

+ GV: Trong không gian Oxyz, PT thứ hai và thứ ba trong hệ là PT của các mặt nào?

+ HS: PT thứ hai và thứ ba trong hệ lần lượt là PT của mặt cầu (S) và PT của mặt phẳng (P).

+ GV: Em hãy xác định tâm và bán kính của mặt cầu (S)?

+ HS: Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; -2; -3)$, bán kính $R = \sqrt{21}$.

+ GV: Em hãy tính khoảng cách từ tâm I của mặt cầu (S) đến mặt phẳng (P)?

$$+ \text{HS: } d(I, (P)) = \frac{|2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) + 4 \cdot (-3) - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 4^2}} = \sqrt{21}$$

+ GV: Hãy so sánh khoảng cách từ tâm của mặt cầu (S) đến mặt phẳng (P) với bán kính của mặt cầu (S)? Từ đó rút ra nhận xét về vị trí tương đối của mặt cầu (S) và (P) trong không gian Oxyz?

+ HS: Khoảng cách từ tâm của mặt cầu (S) đến mặt phẳng (P) bằng bán kính của mặt cầu (S). Do đó mặt phẳng (P) tiếp xúc mặt cầu (S).

+ GV: Em hãy nêu cách xác định tọa độ tiếp điểm của (P) và (S)?

+ HS: Viết PT tham số của đường thẳng d qua tâm I của mặt cầu (S) và vuông góc với mặt phẳng (P). Tọa độ tiếp điểm của (P) và (S) là nghiệm của hệ tạo bởi PT của đường thẳng d và PT của mặt phẳng (P).

+ GV: Em hãy thực hiện?

+ HS: Phương trình tham số của đường thẳng d qua tâm I của (S) và vuông

$$\text{góc với (P) là: } \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -2 + t \\ z = -3 + 4t \end{cases}$$

Tham số t ứng với giao điểm M của d và (P) là nghiệm của PT:

$$2(-1 + 2t) + (-2 + t) + 4(-3 + 4t) - 5 = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

Thay $t = 1$ vào PT tham số của d ta tìm được: $M(1; -1; 1)$.

+ GV: Em hãy thay tọa độ của điểm M vào PT thứ nhất của hệ xem có thỏa mãn hay không? Từ đó hãy kết luận về nghiệm của hệ?

+ HS: Thay tọa độ của điểm M vào PT thứ nhất của hệ thấy thỏa mãn.

+ Vậy HPT đã cho có nghiệm duy nhất: $(1; -1; 1)$.

Nhận xét: Như vậy bằng cách tổ chức hướng dẫn HS tìm tòi lời giải như trên GV đã giúp HS tập luyện thói quen không suy nghĩ cứng nhắc theo những quy tắc đã học, không máy móc áp dụng những mô hình đã gặp để ứng xử linh hoạt trước những tình huống mới. Qua đó rèn luyện được tính mềm dẻo của TDST cho HS.

2.2.3. Biện pháp 3: Hướng dẫn và luyện tập cho học sinh khả năng nhìn bài toán giải hệ phương trình dưới nhiều góc độ khác nhau để có thể tìm được nhiều cách giải khác nhau.

a) Cơ sở và ý nghĩa của biện pháp:

Một trong những thuộc tính quan trọng của TDST là tính nhuần nhuyễn. Tính nhuần nhuyễn thể hiện ở khả năng tìm được nhiều giải pháp trên nhiều góc độ và tình huống khác nhau. Tính nhuần nhuyễn được đặc trưng bởi khả năng tạo ra một số lượng nhất định các ý tưởng. Số ý tưởng nghĩ ra càng nhiều thì khả năng xuất hiện ý tưởng độc đáo càng lớn.

Vì vậy, biện pháp này nhằm rèn luyện cho HS tính nhuần nhuyễn, tính độc đáo của TDST.

b) Cách thực hiện:

- + GV đưa ra các bài toán về HPT có thể giải bằng nhiều cách, nhiều phương pháp khác nhau. Yêu cầu HS giải các HPT đó bằng nhiều cách khác nhau, nhận xét về ưu nhược điểm của từng cách giải, lợi thế của mỗi phương pháp sử dụng trong mỗi cách.
- + GV: Hướng dẫn HS xem xét bài toán ở nhiều hướng khác nhau, dưới nhiều góc độ, nhiều khía cạnh khác nhau, từ đó tìm được nhiều cách giải và cách giải tối ưu cho bài toán.
- + HS phân tích được ưu điểm, nhược điểm, lợi thế của từng cách giải và lựa chọn được cách giải tối ưu, cách giải độc đáo cho bài toán.

c) Một số ví dụ:

Ví dụ 1: Trong giờ học bồi dưỡng HSG, GV dùng phiếu học tập sau:

1) Em hãy nêu các phương pháp giải HPT mà em biết?

2) Em hãy giải HPT: (I)
$$\begin{cases} x\sqrt{12-y} + \sqrt{y(12-x^2)} = 12 & (1) \\ x^3 - 8x - 1 = 2\sqrt{y-2} & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

bằng các cách khác nhau?

3) Trong các cách giải tìm được, em thích cách nào nhất? Vì sao?

+) **Ý 1:** Có các phương pháp giải hệ như: Phương pháp thế (thế một ẩn theo ẩn kia, thế biểu thức của biến, thế hằng số), phương pháp biến đổi tương đương, phương pháp đặt ẩn phụ, phương pháp đưa một PT của hệ về PT tích hoặc PT đẳng cấp,

phương pháp đánh giá bất đẳng thức, phương pháp hàm số, phương pháp lượng giác hóa, phương pháp đồ thị và hình học,...

+) **Ý 2:**

$$+ \text{Điều kiện : } \begin{cases} 2 \leq y \leq 12 \\ 12 - x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq y \leq 12 \\ -2\sqrt{3} \leq x \leq 2\sqrt{3} \end{cases}$$

+) **Cách 1:**

$$+ \text{Ta có: } x\sqrt{12-y} \leq \frac{x^2+12-y}{2} \text{ và } \sqrt{y(12-x^2)} \leq \frac{y+12-x^2}{2} \text{ nên:}$$

$$x\sqrt{12-y} + \sqrt{y(12-x^2)} \leq 12. \text{ Do đó (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y = 12 - x^2 \end{cases}$$

+ Thay $y = 12 - x^2$ vào (2) ta được:

$$x^3 - 8x - 1 = 2\sqrt{10 - x^2} \Leftrightarrow x^3 - 8x - 3 + 2(1 - \sqrt{10 - x^2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3) \left(x^2 + 3x + 1 + \frac{2(x+3)}{1 + \sqrt{10 - x^2}} \right) = 0 \quad (3)$$

$$+ \text{Do } x \geq 0 \text{ nên } x^2 + 3x + 1 + \frac{2(x+3)}{1 + \sqrt{10 - x^2}} > 0. \text{ Thế thì (3)} \Leftrightarrow x = 3.$$

+ Thay vào HPT và đối chiếu với điều kiện ta được nghiệm: (3;3).

+) **Cách 2:** Đặt $tx = \sqrt{12-y} \geq 0$. Suy ra: $t^2x^2 = 12-y$.

$$+ \text{PT (1) được viết lại như sau: } tx^2 + \sqrt{(12-t^2x^2)(12-x^2)} = 12$$

$$\Leftrightarrow tx^2 + \sqrt{144 - 12x^2 - 12x^2t^2 + t^2x^4} = 12$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{144 - 12x^2 - 12x^2t^2 + t^2x^4} = 12 - tx^2$$

+ Bình phương hai vế và thu gọn ta thu được PT hệ quả:

$$x^2 + x^2t^2 - 2tx^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(1+t^2-2t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ t = 1 \end{cases}$$

+ Nếu $x = 0$ thì $y = 12$, không thỏa mãn hệ phương trình.

$$+ \text{Nếu } t = 1 \text{ thì } x = \sqrt{12-y} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 = 12-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y = 12-x^2 \end{cases}$$

+ Đến đây thực hiện giải tương tự như ở **cách 1**.

+) **Cách 3:** Đặt $12 - x^2 = u^2, 12 - y = v^2, y = \omega^2$ với $u, v, \omega \geq 0$.

+ Ta thiết lập được HPT sau:
$$\begin{cases} xv + u\omega = 12 \\ x^2 + u^2 = 12 \Rightarrow (x^2 + u^2) + (v^2 + \omega^2) = 2(xv + u\omega) \quad (*) \\ v^2 + \omega^2 = 12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2xv + v^2) + (u^2 - 2u\omega + \omega^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - v)^2 + (u - \omega)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = v \\ u = \omega \end{cases}$$

+ Khi đó
$$\begin{cases} x = \sqrt{12 - y} \\ \sqrt{12 - x^2} = \sqrt{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y = 12 - x^2 \end{cases}$$

+ Đến đây, thực hiện giải tương tự **cách 1**.

+) **Cách 4:** Việc đặt ẩn phụ hoàn toàn giống cách 3 và ta có hệ:
$$\begin{cases} xv + u\omega = 12 \\ x^2 + u^2 = 12 \\ v^2 + \omega^2 = 12 \end{cases}$$

+ Lại đặt $\vec{a} = (x; u), \vec{b} = (v; \omega)$.

+ Áp dụng bất đẳng thức $\vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$, ta có: $12 = xv + u\omega \leq \sqrt{x^2 + u^2} \cdot \sqrt{v^2 + \omega^2} = 12$

+ Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \vec{a}$ và \vec{b} cùng phương $\Leftrightarrow \frac{x}{v} = \frac{u}{\omega}$. Điều này dẫn đến:

$$\frac{x}{\sqrt{12 - y}} = \frac{\sqrt{12 - x^2}}{\sqrt{y}} \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{12 - x^2}} = \frac{\sqrt{12 - y}}{\sqrt{12 - (\sqrt{12 - y})^2}} (**)$$

+ Xét hàm số $f(t) = \frac{t}{\sqrt{12 - t^2}}, t \in (0; 2\sqrt{3})$.

+ Ta có: $f'(t) = \frac{12}{(12 - t^2)\sqrt{12 - t^2}} > 0, \forall t \in (0; 2\sqrt{3})$.

+ Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $(0; 2\sqrt{3})$.

+ Khi đó PT (**) $\Leftrightarrow f(x) = f(\sqrt{12 - y})$ nên $x = \sqrt{12 - y} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y = 12 - x^2 \end{cases}$

+ Đến đây, thực hiện giải tương tự **cách 1**.

+) **Cách 5:** Do $y \geq 2$ và $y(12 - x^2) \geq 0$ nên $12 - x^2 \geq 0$.

+ Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có:

$$x\sqrt{12-y} + \sqrt{y(12-x^2)} = x\sqrt{12-y} + \sqrt{12-x^2} \cdot \sqrt{y} \leq \sqrt{(x^2+12-x^2)(12-y+y)} = 12$$

+ Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi:

$$\frac{x}{\sqrt{12-y}} = \frac{\sqrt{12-x^2}}{\sqrt{y}} \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{12-x^2}} = \frac{\sqrt{12-y}}{\sqrt{y}} \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{12-x^2}} = \frac{\sqrt{12-y}}{\sqrt{12-(\sqrt{12-y})^2}}$$

+ Đến đây giải tương tự **cách 4** bằng cách sử dụng tính đơn điệu của hàm số.

+ **Cách 6:** Đặt $t = \sqrt{12-y} \geq 0$. Suy ra: $y = 12 - t^2$.

+ Khi đó PT (1) được viết thành: $xt + \sqrt{(12-t^2)(12-x^2)} = 12$

$$\Leftrightarrow \sqrt{144 - 12x^2 - 12t^2 + t^2x^2} = 12 - xt.$$

+ Bình phương hai vế và thu được PT hệ quả: $x^2 + t^2 - 2xt = 0 \Leftrightarrow t = 0$.

+ Suy ra: $x = \sqrt{12-y} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y = 12 - x^2 \end{cases}$

+ Thay $y = 12 - x^2$ vào PT(2) ta được:

$$x^3 - 8x - 1 = 2\sqrt{10-x^2} \Leftrightarrow x(x^2 - 8) - 1 = 2\sqrt{10-x^2}$$

+ Đặt $t = \sqrt{10-x^2} \geq 0$. Suy ra: $t^2 = 10 - x^2$, ta được PT:

$$\begin{cases} x(10-t^2-8)-1=2t \\ t^2+x^2=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2t+1}{2-t^2} \\ t^2+x^2=10 \end{cases}, t \neq \pm\sqrt{2}.$$

+ Khi đó $t^2 + \left(\frac{2t+1}{2-t^2}\right)^2 = 10 \Leftrightarrow t^6 - 14t^4 + 48t^2 + 4t - 39 = 0$

$$\Leftrightarrow (t-1)(t^5 + t^4 - 13t^3 - 13t^2 + 35t + 39) = 0 (***)$$

+ Ta có: $t^5 + t^4 - 13t^3 - 13t^2 + 35t + 39 = t^3(t^2 - 13) + t^2(t^2 - 13) + 3(t+1) + 4$

$$= (t+1)(t^4 - 13t^2 + 35) + 4 > 0, \forall t \in [0; \sqrt{10}]$$

+ Do đó: PT (***) $\Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow \sqrt{10-x^2} = 1 \Leftrightarrow x = \pm 3$.

+ So điều kiện, suy ra: $x = 3$. Vì thế $y = 3$.

+ Vậy HPT có nghiệm duy nhất: $(3;3)$.

+ **Cách 7:** Thực hiện tương tự như các cách giải trên ta đi đến PT:

$$x^3 - 8x - 1 - 2\sqrt{10-x^2} = 0.$$

+ Xét hàm số: $f(x) = x^3 - 8x - 1 - 2\sqrt{10 - x^2}, x \in [0; \sqrt{10}]$.

+ Ta sẽ tính đến đạo hàm cấp hai:

$$f'(x) = 3x^2 - 8 + \frac{2x}{\sqrt{10 - x^2}}, x \in [0; \sqrt{10})$$

$$f''(x) = 6x + \frac{2\sqrt{10 - x^2} + \frac{2x^2}{\sqrt{10 - x^2}}}{(\sqrt{10 - x^2})} > 0, \forall x \in [0; \sqrt{10})$$

+ Suy ra $f'(x)$ đồng biến trên $(0; \sqrt{10})$. Do đó $f(x)$ có tối đa hai nghiệm.

+ Lại thấy $x = -1$ và $x = 3$ là hai nghiệm của PT $f(x) = 0$.

+ Nhưng do $x \in [0; \sqrt{10}]$ nên chỉ có nghiệm $x = 3$ thỏa mãn.

+ Với $x = 3$ ta cũng tính được $y = 3$.

+ Vậy hệ có nghiệm duy nhất: $(3; 3)$.

+) **Cách 8:** Thực hiện tương tự như các cách giải trên ta đi đến PT:

$$x^3 - 8x - 1 - 2\sqrt{10 - x^2} = 0 \quad (1)$$

$$+ \text{ PT (1)} \Leftrightarrow x^3 - 8x - 1 = 2\sqrt{10 - x^2} \quad (2)$$

+ Điều kiện để PT (2) có nghiệm là:

$$x^3 - 8x - 1 \geq 0 \Rightarrow x^3 \geq 8x + 1 > 8x \Rightarrow x(x^2 - 8) > 0 \Rightarrow x > 2\sqrt{2}, \text{ do } x \geq 0.$$

$$+ \text{ Xét hàm số } f(x) = x^3 - 8x - 1 - 2\sqrt{10 - x^2}$$

$$+ \text{ Đạo hàm: } f'(x) = 3x^2 - 8 + \frac{2x}{\sqrt{10 - x^2}} > 0, \forall x > 2\sqrt{2}.$$

+ Mà $f(3) = 0$ nên $x = 3$ là nghiệm duy nhất của PT(2).

+ Vậy HPT đã cho có nghiệm duy nhất: $(3; 3)$.

+) **Cách 9:** Đặt $t = \sqrt{12 - y} \geq 0 \Rightarrow y = 12 - t^2$. PT (1), được viết thành:

$$xt + \sqrt{(12 - t^2)(12 - x^2)} = 12 \Leftrightarrow xt + \sqrt{144 - 12(x^2 + t^2) + x^2t^2} = 12.$$

$$+ \text{ Ta có: } xt + \sqrt{144 - 12(x^2 + t^2) + x^2t^2} \leq xt + \sqrt{144 - 24xt + t^2x^2}$$

$$+ \text{ Xét biểu thức: } P = xt + \sqrt{144 - 24xt + x^2t^2} = xt + |xt - 12|$$

$$+ \text{ Lại vì } xt + \sqrt{(12 - t^2)(12 - x^2)} = 12 \text{ nên } xt \leq 12. \text{ Dẫn đến } |xt - 12| = 12 - xt.$$

+ Khi đó: $P = 12$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi:

$$x^2 + t^2 = 2xt \Leftrightarrow x = t \Leftrightarrow x = \sqrt{12 - y} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y = 12 - x^2 \end{cases}$$

+ Đến đây giải tương tự **cách 1**.

+) **Ý 3:** Mỗi em có thể thích một cách giải với những lý do các em đưa ra.

+ GV gọi lần lượt một số HS lên trình bày kết quả của mình. Cho cả lớp thảo luận, đóng góp ý kiến.

+ GV nhận xét, đánh giá (có thể cho điểm theo tiêu chí: số cách làm được nhiều hay ít). Sau đó GV củng cố hệ thống các phương pháp giải cho HS.

Nhận xét: Cách tổ chức hoạt động dạy học như trên đã rèn luyện cho HS biết nhìn nhận, tiếp cận bài toán theo nhiều hướng khác nhau, từ đó đề xuất được nhiều cách giải khác nhau. Việc HS thích cách nào không quan trọng, điều quan trọng là thông qua việc bày tỏ quan điểm của mình, HS được luyện tập các hoạt động trí tuệ như phân tích, so sánh, đánh giá, tổng hợp. Đồng thời HS cũng có thể thấy cách giải 1, là trong sáng, giản dị nhất nhưng cách giải độc đáo thì phải kể đến cách 3, cách 7 vì nó có cách suy nghĩ sáng tạo là dựa vào bất đẳng thức vector và ứng dụng của đạo hàm cấp hai. Như vậy HS đã được rèn luyện tính mềm dẻo, tính nhuần nhuyễn, tính hoàn thiện, tính độc đáo của TDST.

<p>Ví dụ 2: Giải HPT : $\begin{cases} (y-2)\sqrt{x+2} - x\sqrt{y} = 0 & (1) \\ \sqrt{x+1}(\sqrt{y}+1) = (y-3)(1+\sqrt{x^2+y-3x}) & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$</p>

GV có thể hướng dẫn cho HS tiếp cận bài toán từ nhiều hướng để tìm được nhiều cách giải khác nhau như sau:

+ GV: Quan sát HPT ta thấy, PT (2) khá phức tạp, biểu thức của x và y tương đối xấu nên chưa khai thác được gì. Do đó định hướng của ta là xuất phát từ PT (1), thực hiện biến đổi để tìm mối liên hệ giữa x và y .

➤ *Hướng tiếp cận thứ nhất:*

+ GV: Để tìm được mối liên hệ giữa x và y từ PT (1), ta sẽ thực hiện bình phương hai vế với mong muốn loại bỏ được căn thức. Làm thế nào có thể loại bỏ ngay được căn thức khi bình phương?

+ HS: Chuyển mỗi căn thức về một vế.

+ GV: Để phép bình phương hai vế là tương đương, ta cần thêm điều kiện gì?

+ HS: Ta cần thêm điều kiện hai vế cùng dấu.

+ GV: Em hãy thực hiện:

+ HS: Làm theo gợi ý của GV.

$$+ \text{Điều kiện: } \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ x^2 + y - 3x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ y \geq 0 \\ x^2 + y - 3x \geq 0 \end{cases} \quad (3)$$

+ Từ PT (2) ta thấy, PT (2) có nghiệm thì $y - 3 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 3$ (4).

$$+ \text{Từ (3) và (4), ta được: } \begin{cases} x \geq -1, y \geq 3 \\ x^2 + y - 3x \geq 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$+ \text{Ta có: PT (1)} \Leftrightarrow (y-2)\sqrt{x+2} = x\sqrt{y} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 2 \\ x \geq 0 \\ (y-2)^2(x+2) = x^2y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 2 \\ x \geq 0 \\ y^2x - 4xy + 4x + 2y^2 - 8y + 8 = x^2y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 2 \\ x \geq 0 \\ xy(y-x-2) + 2y(y-x-2) - 4(y-x-2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 2 \\ (y-x-2)(xy+2y-4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 2 \\ \begin{cases} y-x-2=0 \\ xy+2y-4=0 \end{cases} \end{cases}$$

+ GV: Như vậy tới đây HS đã tìm được mối liên hệ giữa x và y . Các em tiếp tục xét từng trường hợp và thực hiện rút thế vào (2).

+ Với $y-x-2=0 \Leftrightarrow y=x+2$. Do $y \geq 3$ nên $x \geq -1$.

+ Thế $y = x + 2$ vào (2), ta được: $\sqrt{x+1}(\sqrt{x+2}+1) = (x-1)(\sqrt{x^2-2x+2}+1)$ (*)

+ GV: PT (*) có thể giải được bằng phương pháp hàm số. Em hãy biến đổi để hai vế của PT (*) có cùng hàm số đặc trưng?

+ HS: Thực hiện theo gợi ý của GV.

$$+ \text{PT (*)} \Leftrightarrow \sqrt{x+1} \left(\sqrt{(\sqrt{x+1})^2 + 1} + 1 \right) = (x-1) \left(\sqrt{(x-1)^2 + 1} + 1 \right) (**)$$

+ Xét hàm số đặc trưng: $f(t) = t(\sqrt{t^2+1}+1) = t\sqrt{t^2+1} + t, t \in [-1; +\infty)$

+ Đạo hàm: $f'(t) = \sqrt{t^2+1} + \frac{t^2}{2\sqrt{t^2+1}} + 1 > 0, \forall t \in [-1; +\infty)$

+ Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[-1; +\infty)$.

+ Khi đó PT (**) $\Leftrightarrow f(\sqrt{x+1}) = f(x-1)$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 3x = 0 \end{cases} \begin{cases} x \geq 1 \\ x = 0 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow y = 5 \text{ (TM).} \\ x = 3 \end{cases}$$

+ Với $xy + 2y - 4 = 0$, ta có:

+ Do $x \geq 0, y \geq 3$ nên $xy + 2y - 4 \geq 0 + 6 - 4 = 2 > 0$.

+ Suy ra PT: $xy + 2y - 4 = 0$ (VN)

+Kết luận: Hệ có nghiệm duy nhất: (3;5).

➤ *Hướng tiếp cận thứ hai:*

+ GV: Sử dụng phương pháp bình phương hai vế ta đã tìm được mối quan hệ giữa x và y . Ngoài cách làm trên ta có thể tìm được mối quan hệ giữa x và y bằng những cách nào?

+ HS: Ta có thể dùng phương pháp đặt ẩn phụ, đưa về phương trình tích.

+ GV: Em hãy thực hiện:

+ HS: Tiến hành giải hệ bằng PP đặt ẩn phụ:

$$+ \text{Điều kiện: } \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ x^2+y-3x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ y \geq 0 \\ x^2+y-3x \geq 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$+ \text{Đặt } \begin{cases} a = \sqrt{x+2}, a \geq 0 \\ b = \sqrt{y}, b \geq 0 \end{cases}$$

$$+ \text{Khi đó PT (1) trở thành: } (b^2 - 2)a - (a^2 - 2)b = 0 \Leftrightarrow ab^2 - a^2b - 2a + 2b = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(-2-ab) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ ab = -2 \end{cases}$$

+ Với $ab = -2$ (loại), do $a \geq 0, b \geq 0$.

$$+ \text{Với } a = b \Rightarrow \sqrt{x+2} = \sqrt{y} \Leftrightarrow y = x+2.$$

+ Đến đây HS giải như hướng thứ nhất.

➤ *Hướng tiếp cận thứ ba:*

+ GV: Với hai hướng truyền thống là bình phương hai vế và đặt ẩn phụ ta đã loại bỏ được căn thức, từ đó tìm được mối quan hệ giữa x và y . Hai hướng đó đều thể hiện được ưu điểm đối với bài toán này là cho lời giải gọn gàng, tường minh. Các em còn hướng xử lý nào khác mà hay nữa không?

+ HS: Ta có thể tìm được mối liên hệ giữa x và y nhờ xử lý PT (1) bằng phương pháp hàm số.

+ GV: Em hãy tìm lời giải theo hướng này?

$$+ \text{HS: Điều kiện: } \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ x^2+y-3x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ y \geq 0 \\ x^2+y-3x \geq 0 \end{cases} \quad (3)$$

+ Xét $y=0, x=-2$ không là nghiệm của hệ phương trình.

+ Xét $y \neq 0, x \neq -2$, ta có:

$$+ \text{PT (1)} \Leftrightarrow \frac{y-2}{\sqrt{y}} = \frac{x}{\sqrt{x+2}} \Leftrightarrow \frac{y-2}{\sqrt{y}} = \frac{(\sqrt{x+2})^2 - 2}{\sqrt{x+2}} \quad (***)$$

+ Xét hàm số: $f(t) = \frac{t^2 - 2}{t} = t - \frac{2}{t}$ trên $(0; +\infty)$

+ Đạo hàm: $f'(t) = 1 + \frac{2}{t^2} > 0, \forall t > 0$.

+ Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

+ Do đó PT (***) $\Leftrightarrow f(\sqrt{y}) = f(\sqrt{x+2}) \Leftrightarrow \sqrt{y} = \sqrt{x+2} \Leftrightarrow y = x+2$.

+ Đến đây, giải như hướng 1 và hướng 2.

➤ *Hướng tiếp cận thứ tư:*

+ GV: Với ba cách làm trên em đều tìm được mối liên hệ giữa x và y từ PT (1) là: $y = x+2$.

+ Nói khác đi PT (1) có một nhân tử là: $y - x - 2$. Đối với một PT bậc hai bất kỳ theo một ẩn nào đó, có thể đưa về dạng tích được, chứng tỏ biệt thức Δ của nó có dạng chính phương. Vì vậy ta có thể xem PT (1) của hệ là PT bậc hai ẩn \sqrt{y} , tham số x . Các em có thể tiếp cận PT (1) theo hướng của phương pháp tam thức bậc hai, để tìm mối liên hệ giữa x và y .

+ HS: thực hiện theo hướng dẫn của GV:

$$+ \text{ĐK: } \begin{cases} x \geq -1 \\ y \geq 0 \\ x^2 + y - 3x \geq 0 \end{cases}$$

+ Từ phương trình:

$$(y-2) \cdot \sqrt{x+2} - x \cdot \sqrt{y} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} \cdot y - x \cdot \sqrt{y} - 2\sqrt{x+2} = 0 \quad (*)$$

+ Ta có $\Delta_{\sqrt{y}} = (x+4)^2$ khi đó nghiệm của (*) là:

$$\sqrt{y} = \frac{2x+4}{2\sqrt{x+2}} \text{ và } \sqrt{y} = -\frac{2}{4\sqrt{x+2}} \text{ (loại)}$$

$$+ \text{Với } \sqrt{y} = \frac{2x+4}{2\sqrt{x+2}} \Leftrightarrow \sqrt{y} = \sqrt{x+2} \Leftrightarrow y = x+2.$$

+ Thế vào phương trình thứ hai ta được:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1}(\sqrt{x+2}+1) &= (x-1)(1+\sqrt{x^2-2x+2}) \\ \Leftrightarrow \sqrt{x+1}(\sqrt{x+2}+1) &= (x-1)\left(\sqrt{(x-1)^2+1}+1\right) \quad (**) \end{aligned}$$

+ Xét hàm $f(t) = t(\sqrt{t^2 + 1} + 1), \forall t \geq -1$

$$\Rightarrow f'(t) = \sqrt{t^2 + 1} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 1}} + 1 > 0, \forall t \geq -1$$

+ Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[-1; +\infty)$.

+ Khi đó (**) có dạng:

$$f(\sqrt{x+1}) = f(x-1) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x+1 = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$$

+ Với $x = 3 \Rightarrow y = 5$ (TM).

+ Vậy nghiệm của hệ phương trình $(x; y) = (3; 5)$.

➤ *Hướng tiếp cận thứ năm:*

+ GV: Bốn cách giải quyết trên đều hay và có thể áp dụng cho các PT có dạng phức tạp hơn. Trong bài hệ trên, PT (1) nhìn không mấy phức tạp, điều này gợi cho ta ý tưởng có thể biến đổi trực tiếp PT (1) về dạng tích bằng phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử.

+ HS: Suy nghĩ, tìm lời giải của bài toán theo gợi ý của GV:

$$+ \text{PT (1): } (y-2)\sqrt{x+2} - x\sqrt{y} = 0$$

$$\Leftrightarrow (y-x-2)\sqrt{x+2} + x\sqrt{x+2} - x\sqrt{y} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{y} - \sqrt{x+2})(\sqrt{y} + \sqrt{x+2}) \cdot \sqrt{x+2} - x(\sqrt{y} - \sqrt{x+2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{y} - \sqrt{x+2})(\sqrt{y(x+2)} + x + 2 - x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{y} - \sqrt{x+2})(\sqrt{(x+2)y} + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y} = \sqrt{x+2} \\ \sqrt{(x+2)y} + 2 = 0 \text{ (VN)} \end{cases}$$

$$+ \text{Với } \sqrt{y} = \sqrt{x+2} \Leftrightarrow y = x+2.$$

+ Đến đây thực hiện giải như **cách 4**.

Nhận xét: Cách tổ chức dạy học như trên đã giúp cho HS tiếp cận bài toán từ nhiều hướng khác nhau bằng nhiều phương pháp khác nhau và tìm được nhiều lời giải cho bài toán.

Đồng thời cũng giúp HS so sánh được ưu điểm, nhược điểm của từng cách giải, lợi thế của từng phương pháp, từ đó có sự nhuần nhuyễn, mềm dẻo, linh hoạt trong giải toán để tìm ra cách giải quyết vấn đề hay nhất, độc đáo nhất.

2.2.4. Biện pháp 4: Hướng dẫn và luyện tập cho học sinh khả năng phát hiện, đề xuất các bài toán mới và phương pháp giải mới cho các HPT, từ các bài toán HPT quen thuộc đã biết.

a) Cơ sở và ý nghĩa của biện pháp:

Đặc trưng cơ bản của TDST là tìm ra cái mới từ những cái quen thuộc, đã biết. Cái mới ở đây có thể là một tri thức mới, một phương pháp mới. Mỗi vấn đề mà một bài toán đặt ra (gồm cả nội dung và phương pháp) đều có thể mở rộng, khái quát hóa, tương tự hóa,... thành những vấn đề mới.

Để có thể phát hiện và đề xuất được bài toán mới, phương pháp mới từ bài toán đã cho, HS sẽ phải thực hiện các hoạt động trí tuệ chung như: tổng hợp, phân tích, so sánh, khái quát hóa, đặc biệt hóa, xét tương tự, liên tưởng,

Qua đó rèn luyện được cho HS tính mềm dẻo, nhuần nhuyễn, hoàn thiện, độc đáo của TDST.

b) Cách thực hiện: Khi dạy mỗi bài toán HPT ngoài việc dạy HS tìm ra lời giải, GV và HS phải làm được các việc sau:

+ GV cần đặt ra các vấn đề:

- Bài toán đã cho tương tự với các bài toán nào đã biết nào?
- Có là trường hợp đặc biệt của bài toán nào đã biết không?
- Có thể mở rộng bài toán này theo các hướng nào?
- Phương pháp giải bài toán này có thể áp dụng cho các dạng toán nào khác?
- Vấn đề ngược lại của bài toán này là gì?
- Bài toán này có nêu lên vấn đề nào mới không?

+ Sau đó GV hướng dẫn HS giải quyết các câu hỏi nêu trên.

+ HS tự giác, tích cực, suy nghĩ, tìm kiếm các câu trả lời. Chủ động, nhiệt tình, sôi nổi tham gia giải quyết các vấn đề do GV đặt ra.

c) Một số ví dụ:

Ví dụ 1: Khi dạy bài toán: Giải HPT (I) $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 3 & (1) \\ x\sqrt{y+1} + y\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} + \sqrt{x+1} = 6 & (2) \end{cases}$

GV có thể hướng dẫn, luyện tập cho HS phát hiện và đề xuất được các bài toán mới, phương pháp mới. Cụ thể có nhiều cách như sau:

Cách thứ nhất: Khái quát hóa để được bài toán mới.

+ GV: Cho HS giải HPT (I). GV hướng dẫn HS hoàn thiện lời giải (nếu cần)

+ HS: Giải HPT (I):

+ Điều kiện: $x \geq -1, y \geq -1$.

+ Khi đó HPT đã cho tương đương với
$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 3 \\ \sqrt{y+1}(x+1) + \sqrt{x+1}(y+1) = 6 \end{cases}$$

+ Đặt
$$\begin{cases} u = \sqrt{x+1}, u \geq 0 \\ v = \sqrt{y+1}, v \geq 0 \end{cases}$$

+ Ta có HPT:
$$\begin{cases} u + v = 3 \\ uv^2 + u^2v = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 3 \\ (u + v)uv = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 3 \\ uv = 2 \end{cases}$$

+ Suy ra: u, v là hai nghiệm của PT: $X^2 - 3X + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 1 \\ X = 2 \end{cases}$

+ Do đó:
$$\begin{cases} u = 1 \\ v = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases}$$

+ Với
$$\begin{cases} u = 1 \\ v = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+1 = 1 \\ y+1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}$$

+ Với
$$\begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+1 = 4 \\ y+1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

+ Hệ có hai nghiệm: $(0;3), (3;0)$.

+ GV nêu vấn đề: Vừa rồi các em đã giải được HPT (I) với vế phải của PT (2) bằng 6. Bây giờ nếu VP của PT (2) là một số m bất kỳ thì liệu HPT có giải được không?

Bài toán giải HPT (I) (với vế phải của PT (2) thay bằng số m bất kỳ) được phát biểu như thế nào?

+ HS trả lời: Giải và biện luận HPT (II) $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 3 \\ x\sqrt{y+1} + y\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} + \sqrt{x+1} = m \end{cases}$.

Cách thứ 2: Đặc biệt hóa để được bài toán mới.

+ GV: Cho HS giải bài toán: Tìm tham số m để HPT (II) có nghiệm.

+ GV hướng dẫn (nếu cần).

+ HS: Tìm m để HPT (II) có nghiệm:

+ Điều kiện: $x \geq -1, y \geq -1$.

+ Khi đó HPT (II) $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 3 \\ \sqrt{y+1}(x+1) + \sqrt{x+1}(y+1) = m \end{cases} \quad (*)$

+ Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x+1} \geq 0 \\ v = \sqrt{y+1} \geq 0 \end{cases}$

+ Hệ phương trình (*) trở thành: $\begin{cases} u + v = 3 \\ uv(u + v) = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 3 \\ uv = \frac{m}{3} \end{cases} \quad (**)$

+ Suy ra u, v là hai nghiệm của PT: $t^2 - 3t + \frac{m}{3} = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 9t + m = 0 \quad (***)$

+ Hệ đã cho có nghiệm $(x; y)$ thỏa $x \geq -1, y \geq -1$

\Leftrightarrow HPT (**) có nghiệm $(u; v)$ thỏa $u \geq 0, v \geq 0$

\Leftrightarrow PT (***) có hai nghiệm $t \geq 0$.

+ Xét PT: $3t^2 - 9t + m = 0, t \geq 0$

$\Leftrightarrow 3t^2 - 9t = -m, t \geq 0$.

+ Xét $f(t) = 3t^2 - 9, t \geq 0$

$+ f'(t) = 6t - 9, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{2}$

+ Bảng biến thiên:

t	0	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	
$f'(t)$		–	0	+
$f(t)$	0		$-\frac{27}{4}$	$+\infty$

+Nhìn BBT ta thấy, PT (***) có hai nghiệm $t \geq 0$

$$\Leftrightarrow -\frac{27}{4} \leq -m \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{27}{4}.$$

+ Vậy HPT (*) có nghiệm khi: $0 \leq m \leq \frac{27}{4}$.

+ GV nêu vấn đề: Nhìn vào bảng biến thiên trong lời giải bài toán trên, ta biết được thêm các thông tin gì?

+ HS trả lời: Ta biết được với những giá trị nào của m thì HPT vô nghiệm, với những giá trị nào của m thì HPT có nghiệm, với giá trị nào của m thì HPT có nghiệm duy nhất.

+ GV: Em có thể đề xuất thêm một bài toán mới, từ kết quả thu được của bài toán trên không?

+ HS: Ta có bài toán mới như sau:

+ Tìm m để HPT (II) $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 3 \\ \sqrt{y+1}(x+1) + \sqrt{x+1}(y+1) = m \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

+ GV: Với bài toán này, nhìn bảng biến thiên đã có, em hãy xác định giá trị của m để HPT có nghiệm duy nhất.

+ HS: Nhìn bảng biến thiên, ta thấy $m = \frac{27}{4}$ thì HPT có nghiệm duy nhất.

+ GV: Em trả lời hoàn toàn chính xác.

Cách thứ 3 : Xét tương tự hóa.

+ GV: Việc tìm m để HPT (II) có nghiệm thực chất là bài toán tìm tập giá trị của hàm số : $y = x\sqrt{y+1} + y\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} + \sqrt{x+1}$, với x, y thỏa mãn: $\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 3$.

+ GV: Việc tìm tập giá trị của một hàm số giúp ta giải quyết được bài toán tương ứng là, tìm GTNN, GTLN của hàm số.

+ GV: Vậy từ bài toán “Tìm m để HPT $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 3 \\ \sqrt{y+1}(x+1) + \sqrt{x+1}(y+1) = m \end{cases}$

có nghiệm” ta có thể phát triển thành bài toán tương tự nào trong hàm số.

+ HS : Ta có thể phát triển thành bài toán mới:

+ Tìm GTNN, GTLN của hàm số $y = x\sqrt{y+1} + y\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} + \sqrt{x+1}$ với x, y thỏa: $\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 3$.

+ GV: Với bài toán này, dựa vào điều kiện hệ $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 3 \\ \sqrt{y+1}(x+1) + \sqrt{x+1}(y+1) = m \end{cases}$

có nghiệm, em hãy xác định tập giá trị của hàm số y ? Từ đó suy ra $\max y$, $\min y$?

+ HS: Tập giá trị của hàm số y là: $\left[0; \frac{27}{4}\right]$. Từ đó suy ra $\max y = \frac{27}{4}$, $\min y = 0$.

+ GV: Như thế với việc xét tương tự hóa trong bài toán trên HS đã được khám phá đồng thời đề xuất được hai phương pháp giải mới cho hai bài toán quen thuộc.

+ Thứ nhất: Với bài toán tìm m để hệ $\begin{cases} G(x; y) = 0 \\ F(x; y) = m \end{cases}$ có nghiệm, ta có thể quy về bài

toán tìm tập giá trị của hàm số $m = F(x; y)$, với x, y thỏa mãn: $G(x; y) = 0$.

+ Thứ hai: Với bài toán tìm GTNN, GTLN của biểu thức $P = F(x; y)$ với x, y thỏa mãn: $G(x; y) = 0$, ta có thể làm như sau:

+ Gọi T là tập giá trị của biểu thức P .

+ Khi đó m là một giá trị của T khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm $(x; y)$: $\begin{cases} G(x; y) = 0 \\ F(x; y) = m \end{cases}$

+ Dựa vào điều kiện hệ có nghiệm $(x; y)$ ta xác định được tất cả các giá trị của tham số m .

Từ đó suy ra miền giá trị T của P , rồi suy ra GTNN, GTLN của P (nếu có).

+ Để giúp HS hiểu rõ về phương pháp này GV đưa ra bài toán sau:

Bài toán: Cho hai số thực x, y thỏa mãn: $\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x}-1) + \sqrt[3]{y}(\sqrt[3]{y}-1) = \sqrt[3]{xy}$

Tìm GTNN, GTLN của $F = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{xy}$

+ GV có thể hướng dẫn HS đưa ra được lời giải cho bài toán (nếu cần):

+ Gọi T là miền giá trị của F . Ta có $m \in T \Leftrightarrow$ HPT sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x}-1) + \sqrt[3]{y}(\sqrt[3]{y}-1) = \sqrt[3]{xy} \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{xy} = m \end{cases}$$

+ Đặt $\begin{cases} S = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} \\ P = \sqrt[3]{xy} \end{cases}$. Ta có $\exists x, y \Leftrightarrow \exists S, P: S^2 \geq 4P$

+ Hệ trên $\Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - S - 3P = 0 \\ S + P = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 + S = 3m \\ P = m - S \end{cases}$

+ Ta có: $S^2 \geq 4P \Leftrightarrow S^2 \geq \frac{4(S^2 - S)}{3} \Leftrightarrow S^2 - 4S \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq S \leq 4$

+ Từ đó HPT đầu có nghiệm $\Leftrightarrow f(S) = S^2 + 2S = 3m$ có nghiệm $0 \leq S \leq 4$.

+ Vì hàm bậc hai $f(S)$ đồng biến trên $[0; 4]$ nên PT $f(S) = 3m$ có nghiệm

$$0 \leq S \leq 4 \Leftrightarrow f(0) \leq 3m \leq f(4) \Leftrightarrow 0 \leq 3m \leq 24 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 8.$$

+ Do đó: $T = [0; 8]$. Vậy $\min F = 0, \max F = 8$.

+ Tương tự như vậy GV có thể hướng dẫn gợi mở cho HS để phát hiện và đề xuất được một số bài toán mới (mỗi bài toán là một vấn đề mới) từ HPT:

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 3 \\ \sqrt{y+1}(x+1) + \sqrt{x+1}(y+1) = m \end{cases}$$

+ Chẳng hạn như:

+ Tìm m để HPT $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 3 \\ \sqrt{y+1}(x+1) + \sqrt{x+1}(y+1) \leq m \end{cases}$ có nghiệm.

+ Tìm m để HPT $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 3 \\ \sqrt{y+1}(x+1) + \sqrt{x+1}(y+1) \geq m \end{cases}$ nghiệm đúng $\forall x, y \geq -1$

Nhận xét: Bằng cách tổ chức hoạt động dạy học như trên GV đã làm được các việc:

Thứ nhất: Hướng dẫn và tập luyện cho HS, từ một bài toán cụ thể cho trước, mở rộng thành bài toán tổng quát, nhìn thấy các bài toán liên quan, từ đó đề xuất được các bài toán mới.

Thứ hai: Hướng dẫn và tập luyện cho HS nhìn thấy chức năng mới, tri thức mới, phương pháp mới, của các vấn đề, các đối tượng quen thuộc đã biết.

Ví dụ 2: GV hướng dẫn cho HS tìm tòi, phát hiện cách giải tổng quát cho các HPT sau:

<p>a) $\begin{cases} x^2\sqrt{y+1} - 2xy - 2x = 1 \\ x^3 - 3x - 3xy = 6 \end{cases}$</p>	<p>b) $\begin{cases} \frac{1}{3x} + \frac{2x}{3y} = \frac{x+\sqrt{y}}{2x^2+y} & (1) \\ 2(2x+\sqrt{y}) = \sqrt{2x+6} - y & (2) \end{cases}$</p>
<p>c) $\begin{cases} \sqrt{x^2+2y+3} + 2y - 3 = 0 & (1) \\ 2(2y^3+x^3) + 3y(x+1)^2 + 6x(x+1) + 2 = 0 & (2) \end{cases}$</p>	<p>d) $\begin{cases} 3x^3 - y^3 = \frac{1}{x+y} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$</p>

HS lần lượt đưa ra được các lời giải sau. GV hướng dẫn (nếu cần):

a) Điều kiện: $y \geq -1$. Ta viết lại hệ thành:
$$\begin{cases} x^2\sqrt{y+1} - 2x(y+1) = 1 \\ x^3 - 3x(y+1) = 6 \end{cases}$$

+ Ta thấy các PT của hệ đều là PT đẳng cấp bậc 3 đối với $x, \sqrt{y+1}$.

+ Dễ thấy $y = -1$ không phải là nghiệm của HPT.

+ Xét $y > -1$. Đặt $x = t\sqrt{y+1}$ thay vào hệ ta có:

$$\begin{cases} \sqrt{(y+1)^3} [t^2 - 2t] = 1 \\ \sqrt{(y+1)^3} [t^3 - 3t] = 6 \end{cases} \Rightarrow t^3 - 3t - 6(t^2 - 2t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 3 \end{cases}$$

+ Nếu $t = 0$ thì $x = 0$, không thỏa mãn hệ.

+ Nếu $t = 3 \Leftrightarrow 27\sqrt{(y+1)^3} - 9\sqrt{(y+1)^3} = 6 \Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt[3]{9}} - 1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{9}$.

+ Vậy hệ có một cặp nghiệm duy nhất: $\left(\sqrt[3]{9}; \frac{1}{\sqrt[3]{9}} - 1\right)$.

b) Dễ thấy PT (1) của hệ là PT đẳng cấp của x và \sqrt{y} .

+ Điều kiện: $y > 0, -3 \leq x \neq 0$.

+ Đặt $\sqrt{y} = tx \Rightarrow y = t^2 x^2$ thay vào (1) ta được: $\frac{1}{3x} + \frac{2x}{3t^2 x^2} = \frac{x + tx}{2x^2 + t^2 x^2}$

+ Rút gọn biến x ta đưa về PT ẩn $t: (t-2)^2(t^2+t+1) = 0$

$$\Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow \sqrt{y} = 2x \geq 0$$

+ Thay vào (2) ta được: $4x^2 + 8x = \sqrt{2x+6}$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 10x + \frac{25}{4} = 2x + 6 + \sqrt{2x+6} + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(2x + \frac{5}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{2x+6} + \frac{1}{2}\right)^2$$

+ Giải ra được: $x = \frac{\sqrt{17}-3}{4} \Rightarrow y = \frac{13-3\sqrt{17}}{2}$.

+ Vậy hệ có nghiệm duy nhất: $\left(\frac{\sqrt{17}-3}{4}; \frac{13-3\sqrt{17}}{2}\right)$.

c) Điều kiện: $x^2 + 2y + 3 \geq 0$.

+ PT (2) tương đương:

$$2(2y^3 + x^3) + 3y(x+1)^2 + 6x^2 + 6x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2(x+1)^3 + 3y(x+1)^2 + 4y^3 = 0$$

+ Đây là PT đẳng cấp bậc 3, theo y và $x+1$.

+ Xét $y=0$ hệ vô nghiệm.

+ Xét $y \neq 0$. Đặt $x+1 = ty$, ta thu được PT: $2t^3 + 3t^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow t = -2$

+ Suy ra: $x+1 = -2y$. Thay vào PT (1) ta được:

$$\sqrt{x^2 - x + 2} = x + 4 \Leftrightarrow x = -\frac{14}{9} \Rightarrow y = \frac{5}{18}.$$

+ Vậy hệ có một cặp nghiệm: $\left(-\frac{14}{9}; \frac{5}{18}\right)$.

d) Ta có thể viết lại hệ thành:
$$\begin{cases} (3x^3 - y^3)(x+y) = 1 & (1) \\ x^2 + y^2 = 1 & (2) \end{cases}$$

+ Ta thấy vế trái của PT (1) là bậc 4, còn vế phải của nó là hằng số.

+ Để tạo ra PT đẳng cấp ta sẽ thay vế phải thành: $(x^2 + y^2)^2$

+ Như vậy ta có:

$$(3x^3 - y^3)(x + y) = (x^2 + y^2)^2 \Leftrightarrow 2x^4 + 3x^3y - 2x^2y^2 - xy^3 - 2y^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)(x + 2y)(2x^2 + xy + y^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = -2y \\ 2x^2 + xy + y^2 = 0 \end{cases}$$

$$+ \text{ Nếu } 2x^2 + xy + y^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{7}{4}x^2 + \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0 \text{ (KTM)}$$

$$+ \text{ Nếu } x = y \text{ ta có: } 2x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$+ \text{ Nếu } x = -2y \Leftrightarrow 5y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$$

+ Vậy hệ đã cho có 4 nghiệm:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}; -\frac{\sqrt{5}}{5}\right), \left(-2\frac{\sqrt{5}}{5}; \frac{\sqrt{5}}{5}\right).$$

Sau khi HS giải được 4 HPT như trên GV hướng dẫn giúp HS phát hiện và đề xuất được cách giải tổng quát cho một lớp bài toán có dạng trên:

+ GV: Các HPT các em vừa tiến hành giải có đặc điểm gì chung?

+ HS: Là các hệ chứa các PT đẳng cấp hoặc các PT của hệ có thể đưa được về PT đẳng cấp sau khi thực hiện một số phép biến đổi cơ bản như nhân hoặc chia vế theo vế hai PT của hệ.

+ GV: Các HPT có đặc điểm như các em vừa nêu, gọi là hệ có yếu tố đẳng cấp.

+ Ta thường gặp dạng hệ này ở các hình thức sau:

$$+ \begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = d \\ ex^2 + gxy + hy^2 = k \end{cases}; \begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = dx + ey \\ gx^2 + hxy + ky^2 = lx + my \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = d \\ gx^3 + hx^2y + kxy^2 + ly^3 = mx + ny \end{cases}, \dots$$

+ Một số hệ PT có tính đẳng cấp được giấu kín trong các biểu thức chứa căn đòi hỏi người giải cần tinh ý để phát hiện.

+ GV: Em hãy nêu phương pháp chung để giải các hệ dạng này?

+ HS: Từ các PT của hệ, ta nhân hoặc chia cho nhau để tạo ra phương trình đẳng cấp bậc n (chỉ nhân hoặc chia khi các vế của các PT trong hệ đã khác 0):

$$a_1x^n + \dots + a_kx^{n-k}y^k + \dots + a_nx^n = 0.$$

- + Từ đó xét hai trường hợp: $y=0$ thay vào để tìm x . Khi $y \neq 0$, ta đặt $x = ty$ thì thu được PT: $a_1 t^n + \dots + a_k t^{n-k} + \dots + a_n = 0$
- + Giải PT tìm t sau đó thế vào hệ ban đầu tìm x, y .
- + GV: Chú ý (Ta cũng có thể đặt $y = tx$).

Nhận xét: Như vậy thông qua hai ví dụ trên, HS đã được luyện tập với việc phát hiện, đề xuất được bài toán mới và cách giải tổng quát cho bài toán mới đó.

2.2.5. Biện pháp 5: Tổ chức những tình huống để rèn luyện cho học sinh thói quen, kỹ năng phê phán, tìm ra sai lầm, chưa hợp lý trong lời giải các hệ phương trình, từ đó tìm ra lời giải tối ưu.

a) Cơ sở và ý nghĩa của biện pháp:

Một trong những thuộc tính quan trọng của TDST là tính nhạy cảm của vấn đề. Tính nhạy cảm của vấn đề thể hiện ở khả năng nhanh chóng phát hiện ra vấn đề, tức là thấy cái sai lầm, cái thiếu logic, cái chưa tối ưu, ..., để hoàn thiện, thay đổi, cấu trúc lại, để phát triển ý tưởng mới.

Vì vậy, biện pháp này nhằm rèn luyện cho HS tư duy phê phán và tính nhạy cảm vấn đề, tính hoàn thiện của của TDST.

b) Cách thực hiện:

- + GV: Tổ chức các hoạt động dạy học mà qua đó HS có nhiệm vụ phải phân biệt được cái đúng, cái sai.
- + HS: Phải tìm ra được những sai lầm trong các lời giải. Hiểu rõ được nguyên nhân sai lầm và đưa ra được cách khắc phục sai lầm. Hoàn thiện lời giải theo yêu cầu.

c) Một số ví dụ:

Ví dụ 1: GV đưa ra bài toán sau:

<p>Bài toán: Tìm m để hệ sau có nghiệm:</p> $\begin{cases} x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} = 5 \\ x^3 + \frac{1}{x^3} + y^3 + \frac{1}{y^3} = 15m - 10 \end{cases}$

+ *Bạn An giải như sau:* Đặt
$$\begin{cases} a = x + \frac{1}{x} \\ b = y + \frac{1}{y} \end{cases} \Rightarrow a \geq 2, b \geq 2.$$

+ Hệ đã cho trở thành: $\begin{cases} a+b=5 \\ a^3+b^3-3(a+b)=15m-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=5 \\ ab=8-m \end{cases}$

+ Suy ra a, b là nghiệm của PT: $X^2-5X+8-m=0 \Leftrightarrow X^2-5X+8=m$ (1)

+ Hệ đã cho có nghiệm thực \Leftrightarrow (1) có hai nghiệm thỏa mãn $X \geq 2$.

+ Xét tam thức bậc hai $f(X)=X^2-5X+8, X \geq 2$, ta có bảng biến thiên:

X	2	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$f(X)$	2	$\frac{7}{4}$	$+\infty$

+ Dựa vào bảng biến thiên thấy, (1) có hai nghiệm thỏa mãn $X \geq 2 \Leftrightarrow \frac{7}{4} \leq m \leq 2$.

+ Kết luận: Hệ có nghiệm khi: $\frac{7}{4} \leq m \leq 2$.

+ Bạn Bình giải như sau:

+ Đặt $\begin{cases} a=x+\frac{1}{x} \\ b=y+\frac{1}{y} \end{cases} \Rightarrow |a| \geq 2, |b| \geq 2$.

+ Hệ đã cho trở thành: $\begin{cases} a+b=5 \\ a^3+b^3-3(a+b)=15m-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=5 \\ ab=8-m \end{cases} (*)$

+ Suy ra a, b là nghiệm của PT: $X^2-5X+8-m=0 \Leftrightarrow X^2-5X+8=m$ (1)

+ Hệ đã cho có nghiệm thực

\Leftrightarrow (1) có nghiệm thỏa mãn $|X| \geq 2$.

+ Xét tam thức bậc hai $f(X)=X^2-5X+8, X \geq 2$

+ Ta có bảng biến thiên:

X	$-\infty$	-2	2	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$f(X)$					

Số hóa bởi Trung tâm Học liệu - <http://www.lrc-tnu.edu.vn/>

	$+\infty$		2		$+\infty$
$f(X)$		22		$\frac{7}{4}$	

+ Dựa vào bảng biến thiên thấy (1) có nghiệm thỏa $|X| \geq 2 \Leftrightarrow m \geq \frac{7}{4}$.

+ Kết luận: Hệ có nghiệm khi: $m \geq \frac{7}{4}$.

+ *Bạn Quân giải như sau:*

+ Đặt $\begin{cases} a = x + \frac{1}{x} \\ b = y + \frac{1}{y} \end{cases} \quad (|a| \geq 2, |b| \geq 2).$

+ Hệ đã cho trở thành: $\begin{cases} a+b=5 \\ a^3+b^3-3(a+b)=15m-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=5 \\ ab=8-m \end{cases}$

+ Suy ra a, b là nghiệm của PT: $X^2 - 5X + 8 - m = 0 \Leftrightarrow X^2 - 5X + 8 = m$ (1)

+ Hệ đã cho có nghiệm thực \Leftrightarrow PT (1) có hai nghiệm thỏa mãn $|X| \geq 2$

(hai nghiệm không nhất thiết phân biệt).

+ Xét tam thức bậc hai $f(X) = X^2 - 5X + 8, |X| \geq 2$, ta có bảng biến thiên:

X	$-\infty$	-2	2	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$f(X)$	$+\infty$	22	2	$\frac{7}{4}$	$+\infty$

+ Dựa vào bảng biến thiên trên ta thấy:

+ PT (1) có hai nghiệm thỏa $|X| \geq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7}{4} \leq m \leq 2 \\ m \geq 22 \end{cases}.$

+ **Kết luận:** Hệ có nghiệm khi: $\frac{7}{4} \leq m \leq 2$ hoặc $m \geq 22$.

+ GV: Em hãy cho biết trong ba bạn An, Bình, Quân, Ai giải đúng? Ai giải sai?

Vì sao? Em hãy sửa sai cho bạn (nếu có) để được lời giải đúng.

+ Trước yêu cầu của GV, HS phải xem xét, nghiên cứu kỹ từng lời giải để phát hiện sai lầm và tìm cách sửa chữa sai lầm.

+ Cách giải của An bị sai, vì chưa tìm đúng điều kiện đủ của ẩn phụ a và b , dẫn đến sai lầm trong lập bảng biến thiên. Cần sửa lại là:

$$+ \text{Đặt } \begin{cases} a = x + \frac{1}{x} \\ b = y + \frac{1}{y} \end{cases} \text{ thì } |a| \geq 2, |b| \geq 2.$$

+ Cách giải của Bình cũng bị sai vì nắm chưa vững mối quan hệ tương ứng giữa nghiệm của hệ ban đầu và nghiệm của PT (1). Cần sửa lại là:

Hệ ban đầu có nghiệm $(x; y)$ thỏa $x \neq 0, y \neq 0$

\Leftrightarrow HPT (*) có hai nghiệm a, b thỏa $|a| \geq 2, |b| \geq 2$

\Leftrightarrow PT (1) có hai nghiệm X thỏa: $|X| \geq 2$.

+ Cách giải của Bạn Quân hoàn toàn đúng.

Ví dụ 2: GV nêu ra bài toán sau:

Bài toán : Giải HPT sau $\begin{cases} x + y + xy(2x + y) = 5xy \\ x + y + xy(3x - y) = 4xy \end{cases}$

+ GV: Đưa ra lời giải sau:

+ Chia cả hai vế của mỗi PT trong hệ cho $xy \neq 0$.

+ Ta được:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 2x + y = 5 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 3x - y = 4 \end{cases} \Rightarrow 5 - 2x - y = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 4 - 3x + y \Rightarrow x = 2y - 1$$

+ Thay $x = 2y - 1$ vào PT thứ 2 của hệ ban đầu ta được:

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} x = 2y - 1 \\ 2y - 1 + y + (2y - 1)y[3(2y - 1) - y] = 4y(2y - 1) \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 1 \\ 10y^3 - 19y^2 + 10y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 1 \\ (y - 1)(10y^2 - 9y + 1) = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 1 \\ y = 1 \\ y = \frac{9 + \sqrt{41}}{20} \\ y = \frac{9 - \sqrt{41}}{20} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{\sqrt{41} - 1}{10} \\ y = \frac{9 + \sqrt{41}}{20} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{-\sqrt{41} - 1}{10} \\ y = \frac{9 - \sqrt{41}}{20} \end{cases}
\end{aligned}$$

+ Vậy hệ đã cho có 3 nghiệm là: $(1; 1), \left(\frac{\sqrt{41} - 1}{10}; \frac{9 + \sqrt{41}}{20}\right), \left(\frac{-\sqrt{41} - 1}{10}; \frac{9 - \sqrt{41}}{20}\right)$.

+ GV: Em hãy cho biết lời giải trên đúng hay sai. Giải thích?

+ HS: Trước yêu cầu của GV, HS suy nghĩ tìm câu trả lời.

+ GV: Nếu các em không tìm được câu trả lời đúng (GV có thể gợi ý)

+ GV: Lời giải trên mới chỉ xét trường hợp $xy \neq 0$.

Trường hợp $xy = 0$ có phải xét không? Tại sao?

+ HS: Có ạ! Xét như vậy mới đủ hết các trường hợp có thể xảy ra ạ!

+ GV: Em trả lời hoàn toàn đúng. Từ đây GV yêu cầu HS xét bổ sung thêm trường hợp $xy = 0$ vào lời giải trên, để được lời giải chính xác.

Nhận xét: Thông qua hoạt động này GV đã hướng dẫn HS tìm được sai lầm của lời giải, hiểu được nguyên nhân sai lầm và đưa ra được lời giải đúng cho bài toán. Đồng thời HS cũng đã được rèn luyện tư duy phê phán, tính nhạy cảm của vấn đề, tính hoàn thiện của TDST.

2.2.6. Biện pháp 6: Xây dựng các bài toán HPT nhằm phát triển TDST cho HS giỏi THPT.

Trong thực tế, những tồn tại, hạn chế của việc phát triển TDST cho HS trong dạy học có một nguyên nhân từ phía GV. Đó là đa số GV dạy Toán ở THPT hiện nay vẫn chủ yếu khai thác và sử dụng các bài tập có sẵn trong SGK và các sách, tài liệu tham khảo. Họ chưa chú ý và chưa biết cách xây dựng các bài toán mới cho HS.

Chính việc đó trước hết làm cho GV đánh mất sự sáng tạo của mình, mà muốn dạy HS sáng tạo thì trước hết GV phải là người biết sáng tạo. Hiện nay các SGK, cũng như các sách tham khảo chủ yếu cung cấp các kiến thức, các bài tập rèn luyện kỹ năng cho HS, đồng thời các sách được viết chủ yếu cho nhiều đối tượng HS khác nhau, các bài tập đòi hỏi HS phải TDST không nhiều. Do đó nếu chỉ khai thác, sử dụng các bài tập sẵn có thì các bài giảng, các ví dụ của GV sẽ không phong phú, thiếu sinh động, nghèo nàn về ý tưởng hay nói cách khác GV không tạo được cho HS các cơ hội để tập sáng tạo, từ đó phát triển TDST. Nguyên nhân chủ yếu là bản thân công việc xây dựng các bài tập là rất vất vả và khó khăn, hơn nữa với không ít GV thì họ cũng không biết phải làm việc đó như thế nào.

Vì vậy, theo chúng tôi để các biện pháp sư phạm đã nêu ở trên có hiệu quả thì cần phải có một biện pháp đối với GV là: Xây dựng các bài toán HPT nhằm phát triển TDST cho HSG THPT. Khi tiến hành xây dựng các bài toán, GV sẽ nắm vững và hiểu sâu sắc yếu tố TDST trong bài toán, trong hướng giải bài toán, từ đó GV có thể hướng dẫn HS biết cách sáng tạo ra các bài toán HPT hay và khó, giúp các em hiểu được nguồn gốc của bài toán, phương pháp giải dành cho bài toán đó, điều này thật là quan trọng và có ý nghĩa trong việc phát triển TDST cho HS.

Về nguyên tắc từ bất kỳ nội dung toán học nào cũng có thể xây dựng thành các bài toán về HPT tùy vào ý tưởng và sự sáng tạo của người GV. Sau đây chúng tôi giới thiệu một số phương pháp xây dựng các bài toán HPT theo hướng phát triển TDST cho HS, từ các nội dung toán học điển hình.

2.2.6.1. Xây dựng các bài toán về HPT đối xứng loại 1.

a) Ý tưởng và cách thức xây dựng.

Xuất phát từ hai số thực a và b (thường chọn a và b là các số thực “đẹp”). Thay hai số thực a và b này vào hai biểu thức khác nhau, đối xứng đối với x và y ta sẽ nhận được hai giá trị thực. Ghép hai giá trị thực này với hai biểu thức đối xứng của x và y tương ứng vừa tạo ra nó, ta sẽ nhận được hai phương trình đối xứng đối với hai ẩn x và y . Kết hợp hai phương trình thu được, ta có được một hệ phương trình đối xứng loại một đối với hai ẩn x và y .

Chú ý: Tùy vào độ khó, độ phức tạp của HPT cần xây dựng và mức độ tư duy của HS, GV cần lựa chọn các biểu thức đối xứng đối với x và y một cách phù hợp. Có thể tăng độ phức tạp cho hệ bằng cách xây dựng một hệ đối xứng loại một với u và v sau đó chọn $u = f(x; y), v = g(x; y)$ để được một hệ mới.

b) Một số ví dụ:

Ví dụ 1: GV thiết kế ra bài toán sau:

Bài toán 1: Giải HPT $\begin{cases} xy + x + y = 3 \\ x^2 + y^2 + x + y = 12 \end{cases}$
--

+ GV: Đưa ra cho HS giải:

+ HS: Suy nghĩ, nghiên cứu, tìm tòi lời giải. HS sẽ nhận dạng được đây là HPT đối xứng loại 1. Từ đó HS đưa ra được lời giải sau:

Lời giải:

+ Đặt $S = x + y, P = xy$, điều kiện: $S^2 \geq 4P$. Khi đó ta có hệ:

$$\begin{cases} S + P = 3 \\ S^2 + S - 2P = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 3 - S \\ S^2 + 3S - 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (S, P) = (3; 0) \\ (S, P) = (-6; 9) \end{cases} \text{ (TM)}$$

+ Khi $(S, P) = (3; 0)$, ta có: $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x, y) = (3; 0) \\ (x, y) = (0; 3) \end{cases}$

+ Khi $(S, P) = (-6; 9)$, ta có: $\begin{cases} x + y = -6 \\ xy = 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = -3$

+ Kết luận: Hệ có 3 nghiệm: $(0; 3), (3; 0), (-3; -3)$.

+ GV: Tổ chức cho HS phân tích lời giải và tìm hiểu cơ sở của lời giải.

+ GV: Tại sao ta có lời như trên? Lời giải trên được đưa ra dựa trên cơ sở nào?

+ HS: Lời giải trên, dựa trên cơ sở HPT đã cho là HPT đối xứng loại 1.

+ GV: Vậy HPT đối xứng loại 1 được xây dựng như thế nào? Cụ thể HPT trên?

+ HS: Suy nghĩ tìm kiếm câu trả lời. Nếu các em chưa tìm ra được cách xây dựng của HPT trên, GV có thể hướng dẫn.

+ GV: HPT trên được xây dựng như sau:

Xét $x=3, y=0$. Cần có một hệ thức bậc hai đối với S và P, rất đơn giản chỉ cần tính: $xy+x+y=3, x^2+y^2+x+y=12$. Kết hợp hai PT này ta có được HPT mà thầy vừa đưa ra cho các em giải.

+ GV: Với cách làm như trên em hãy xây dựng các HPT đối xứng loại 1 khác?

+ HS : Xây dựng được các HPT đối xứng loại 1 khác theo yêu cầu của GV.

+ GV : Quan sát quá trình các em xây dựng các HPT mới, nếu các em gặp khó khăn, GV có thể trợ giúp.

+ Nhận xét: Thông qua ví dụ này ta thấy được, GV không những biết cách xây dựng nên một HPT mới mà GV còn làm được một việc tốt hơn nữa là tổ chức và hướng dẫn thành công cho HS, biết cách sáng tạo ra những HPT mới giống như mình, đây là một điều rất có ý nghĩa, nó giúp HS hiểu rõ nguồn gốc của một bài toán mà mình giải đồng thời hiểu được sâu sắc phương pháp giải dành cho bài toán đó, góp phần to lớn vào việc phát triển TDST cho HS.

Với cách làm tương tự GV có thể giúp HS sáng tạo ra nhiều HPT mới, hay và khó.

Ví dụ 2: Muốn HPT đối xứng loại một cần xây dựng trở nên phức tạp hơn. GV có thể hướng dẫn HS xây dựng một hệ đối xứng loại một đối với u và v. Sau đó chọn $u=f(x,y), v=g(x,y)$ để được một HPT mới.

+ Chẳng hạn : Xét $u=1, v=1$. Khi đó :
$$\begin{cases} u+uv+v=3 \\ u^2v+uv^2=2 \end{cases}$$

+ Sau khi đặt $S=u+v, P=uv$ ta được một hệ bậc hai đối với S và P, trong đó có một PT bậc nhất theo S và P, hơn nữa do đã chọn $u=1, v=1$ nên ta biết chắc chắn hệ đó luôn có một nghiệm là $(S, P)=(2;1)$.

+ Vậy chắc chắn ta sẽ giải được hệ
$$\begin{cases} u+uv+v=3 \\ u^2v+uv^2=2 \end{cases}$$

+ Chọn $u=\sqrt{x}, v=\frac{1}{y-1}$, được :
$$\begin{cases} \sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{y-1}+\frac{1}{y-1}=3 \\ \frac{x}{y-1}+\frac{\sqrt{x}}{(y-1)^2}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}(y-1)+\sqrt{x}+1=3y-3 \\ \frac{x}{y-1}+\frac{\sqrt{x}}{(y-1)^2}=2 \end{cases}$$

+ Ta có bài toán sau :

$$\text{Bài toán 2: Giải HPT } \begin{cases} \sqrt{x}(y-1) + \sqrt{x} + 1 = 3y - 3 \\ \frac{x}{y-1} + \frac{\sqrt{x}}{(y-1)^2} = 2 \end{cases}$$

+ Hướng dẫn: Để giải bài toán 3, HS có thể đi ngược lại quy trình tìm ra bài toán.

2.2.6.2. Xây dựng các bài toán về HPT đối xứng loại 2.

a) Ý tưởng và cách thức xây dựng.

Xuất phát từ hai số thực a và b (thường chọn a và b là hai số thực có hình thức "đẹp") thay vào một biểu thức hai biến đối với x và y (biểu thức hai biến đối với x và y do ta lựa chọn), ta sẽ tính được một giá trị thực nào đó. Ghép giá trị này với biểu thức hai biến của x và y ta thu được một phương trình. Ta có thể biến đổi phương trình này để giấu ý tưởng của tác giả hoặc để nó có hình thức gọn và đẹp. Sau đó thay x bởi y và y bởi x ta được thêm một phương trình nữa. Kết hợp hai phương trình vừa có, ta sẽ được một HPT đối xứng loại 2. Ngoài cách làm trên ta có thể xuất phát từ một hàm số đơn điệu trên một miền cho trước hoặc xuất phát từ một hàm số ngược hoặc xuất phát từ một PT nào đó. Để có thể hiểu rõ hơn về vấn đề này chúng ta cùng nhau xem xét một số ví dụ ở phần b) ngay sau đây.

b) Một số ví dụ :

Ví dụ 1: Xét $x=2$ và $y=2$. Khi đó $x^2 - xy + 3y = 6 \Leftrightarrow x^2 - xy = 3(2 - y)$.

+ Thay x bởi y và thay y bởi x ta được PT: $y^2 - xy = 3(2 - x)$.

+ Ta có bài toán sau :

$$\text{Bài toán 1: Giải HPT } \begin{cases} x^2 - xy = 3(2 - y) \\ y^2 - xy = 3(2 - x) \end{cases}$$

+ Hướng dẫn: Thực hiện trừ vế theo vế hai PT của hệ, ta dễ dàng giải được hệ trên.

Ví dụ 2: Xét hàm số $g(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2x + \ln(3x+1)$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$

và thỏa mãn $g(0) = 0$. Khi đó $g(x) = y$ tương đương :

$$\frac{3}{2}x^2 + 2x + \ln(3x+1) = y \Leftrightarrow 3x^2 + 4x + 2\ln(3x+1) = 2y.$$

+ Từ PT cuối này thay x bởi y và thay y bởi x ta được hệ đối xứng loại hai.

+ Ta có bài toán sau :

Bài toán 2: Giải HPT $\begin{cases} 3x^2 + 4x + 2\ln(3x+1) = 2y \\ 3y^2 + 4y + 2\ln(3y+1) = 2x \end{cases}$
--

Lời giải: Điều kiện: $x > -\frac{1}{3}$; $y > -\frac{1}{3}$.

+ Lấy PT trên trừ PT dưới về theo vế, ta được :

$$3x^2 + 4x + 2\ln(3x+1) - 3y^2 - 4y - 2\ln(3y+1) = 2y - 2x \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 6x + 2\ln(3x+1) = 3y^2 + 6y + 2\ln(3y+1) \quad (2)$$

+ Xét hàm số : $f(t) = 3t^2 + 6t + 2\ln(3t+1)$ trên khoảng $\left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$

+ Ta có : $f'(t) = 6t + 6 + \frac{6}{3t+1} > 0, \forall t \in \left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

+ Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

+ Từ đó PT (2) xảy ra khi và chỉ khi $x = y$. Thay vào PT thứ nhất của hệ ta được :

$$3x^2 + 4x + 2\ln(3x+1) = 2x \Leftrightarrow 3x^2 + 2x + 2\ln(3x+1) = 0 \quad (3)$$

+ Dễ thấy $x=0$ thỏa mãn (3). Xét hàm số $g(x) = 3x^2 + 2x + 2\ln(3x+1)$.

+ Ta có: $g'(x) = 6x + 2 + \frac{6}{3x+1} > 0, \forall x > -\frac{1}{3}$. Vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trên

$\left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$. Suy ra $x=0$ là nghiệm duy nhất của PT (3).

+ Vậy HPT ban đầu có nghiệm duy nhất $(0;0)$.

2.3. KẾT LUẬN CHƯƠNG 2.

Trong chương 2, luận văn đã đề xuất một số biện pháp sư phạm nhằm phát triển TDST cho HSG trong dạy học HPT ở trường THPT. Các biện pháp đó là:

Củng cố tri thức, tập luyện kỹ năng giải hệ phương trình để tạo điều kiện nền tảng cho phát triển tư duy sáng tạo ở HSG; Tập luyện cho HS thói quen không suy

ngữ cứng nhắc theo những quy tắc đã học, không máy móc áp dụng những mô hình đã gặp để ứng xử linh hoạt trước những tình huống mới; Hướng dẫn và luyện tập cho HS khả năng nhìn bài toán giải hệ phương trình dưới nhiều góc độ khác nhau để có thể tìm được nhiều cách giải khác nhau; Hướng dẫn và luyện tập cho HS khả năng phát hiện, đề xuất các bài toán mới và phương pháp giải mới cho các hệ phương trình, từ các vấn đề, bài toán quen thuộc, đã biết; Tổ chức những tình huống để rèn luyện cho HS thói quen, kỹ năng phê phán, tìm ra sai lầm, chưa hợp lý trong lời giải các hệ phương trình, từ đó tìm ra lời giải tối ưu; Xây dựng các bài toán HPT nhằm phát triển TDST cho HSG THPT. Các biện pháp này cần được thực hiện đồng bộ trong quá trình dạy học, biện pháp này sẽ bổ sung hỗ trợ cho biện pháp kia trong việc phát triển TDST cho HS. Qua đây chúng tôi muốn nói rằng hoàn toàn có thể phát triển TDST cho HSG trong dạy học HPT ở trường THPT.

CHƯƠNG 3 - THỰC NGHIỆM SƯ PHẠM

3.1. MỤC ĐÍCH VÀ KẾ HOẠCH THỰC NGHIỆM.

3.1.1. Mục đích thực nghiệm.

Thực nghiệm để kiểm chứng tính khả thi và hiệu quả của các biện pháp phát triển tư duy sáng tạo cho HSG thông qua dạy học HPT đã được trình bày trong luận văn.

3.1.2. Kế hoạch thực nghiệm

a) GV và HS tham gia thực nghiệm

Thực nghiệm được tiến hành tại trường THPT Phương Xá và THPT Cẩm Khê, huyện Cẩm Khê, tỉnh Phú Thọ.

Lớp thực nghiệm: Lớp 10A1 (có 35 HS), trường THPT Phương Xá.

Lớp đối chứng: Lớp 10A4 (có 35 HS), trường THPT Cẩm Khê.

Cả hai lớp đều học Toán theo chương trình SGK - Nâng cao.

Trình độ HS của các lớp thực nghiệm và đối chứng là tương đương nhau, các em đều là những HS có học lực giỏi về môn toán, được tuyển chọn từ đầu năm học.

Các tiết dạy thực nghiệm do thầy giáo Nguyễn Ngọc Thư, GV trường THPT Phương xá dạy tại lớp 10A1, trường THPT Phương Xá.

Các tiết dạy đối chứng do thầy giáo Ngô Duy Hà, GV trường THPT Cẩm Khê dạy tại lớp 10A4, trường THPT Cẩm Khê.

b) Hình thức tổ chức thực nghiệm

Khi tiến hành thực nghiệm, chúng tôi thực hiện nghiêm túc các biện pháp sư phạm phát triển TDST cho HSG đã đề xuất.

Đối với lớp đối chứng vẫn dạy học bình thường theo kế hoạch giảng dạy của GV, đã được xây dựng từ đầu năm. Việc dạy học thực nghiệm và đối chứng được tiến hành song song theo lịch trình dạy của hai nhà trường. Cụ thể như sau:

Nội dung	Dạy thực nghiệm			Dạy đối chứng		
	Lớp	GV dạy	Thời gian	Lớp	GV dạy	Thời gian
Giáo án	10A1	Nguyễn Thu	Tiết 2 ngày 01/11/2014	10A4	Ngô Hà	Tiết 2 ngày 02/11/2014

Trong các tiết dạy thực nghiệm và đối chứng chúng tôi có mời GV của tổ Toán hai nhà trường đến dự và có phiếu đánh giá tiết dạy.

3.2. NỘI DUNG THỰC NGHIỆM

Xây dựng và thực hiện các giáo án thực nghiệm, trong đó có:

+ Sử dụng một số biện pháp sư phạm nhằm phát triển TDST cho HSG đã được trình bày ở chương 2.

+ Các bài tập sử dụng trong các giáo án được xây dựng theo hướng phát triển TDST cho HSG, theo các phương pháp xây dựng HPT đã trình bày ở chương 2.

Chúng tôi thiết kế 7 giáo án và GV tham gia thực nghiệm tiến hành dạy 7 tiết, nội dung bao gồm:

1. Bài "Một số ví dụ về HPT bậc hai một ẩn, hai ẩn" (2 tiết)
2. Bài "Luyện tập" (về HPT bậc hai một ẩn và hai ẩn) (2 tiết)
3. Bài "Một số phương pháp giải hệ phương trình" (3 tiết thuộc phần tự chọn)

Trong phạm vi trình bày của luận văn chúng tôi đưa ra 01 giáo án thực nghiệm. Cụ thể là:

TIẾT 38: MỘT SỐ VÍ DỤ VỀ HPT BẬC HAI MỘT ẨN VÀ HAI ẨN

I. Mục tiêu:

1. Về kiến thức:

HS hiểu định nghĩa và các phương pháp chủ yếu giải HPT bậc hai hai ẩn, đặc biệt là hệ gồm một PT bậc nhất và một PT bậc hai, HPT đối xứng loại một và loại hai.

2. Về kỹ năng:

Biết giải một số dạng HPT bậc hai hai ẩn, đặc biệt là các hệ gồm một phương

trình bậc nhất và một phương trình bậc hai, HPT đối xứng loại một và loại hai.

3. Về tư duy:

- + HS biết quy lạ về quen, tương tự hóa, khái quát hóa.
- + HS biết TDST trong việc giải các bài tập.

II. Chuẩn bị:

1. GV: Thiết kế các hoạt động dạy học. Dự kiến các tình huống nảy sinh trong quá dạy học và phương án giải quyết chúng. Bút dạ, giấy A3.

2. HS: Cần ôn tập lại phần định lý Vi – et. Các biểu thức đối xứng của hai nghiệm của PT bậc hai. Đọc và làm bài trước ở nhà.

III. Phương pháp dạy học:

Dùng phương pháp gợi mở thông qua các hoạt động điều khiển tư duy, đan xen hoạt động nhóm.

IV. Tiến trình bài học:

1. Ổn định tổ chức:

Ngày dạy	Tiết	Lớp	Sĩ số	HS vắng
01/11/2014	2	10A1	35	Không

2. Kiểm tra bài cũ:

Câu hỏi 1: Hãy phát biểu định lý Vi-et và các ứng dụng của định lý Vi-et đã học.

Câu hỏi 2: Tìm hai số x, y biết: $x + y = 3; xy = 2$.

Câu hỏi 3: Em hãy điền vào dấu ba chấm để được một số phân tích các biểu thức đối xứng của hai nghiệm của PT bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ qua tổng S và tích P ?

$$x_1^2 + x_2^2 = \dots$$

$$x_1^3 + x_2^3 = \dots$$

$$x_1^4 + x_2^4 = \dots$$

$$x_1^n + x_2^n = \dots$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \dots$$

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \dots$$

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 = \dots$$

- + GV: Gọi 3 HS lên bảng thực hiện.
- + HS: Lên bảng thực hiện theo yêu cầu của GV.
- + GV: Gọi 3 HS khác nhận xét bài làm của các bạn trên bảng.
- + GV: Nhận xét câu trả lời của HS, đánh giá, cho điểm và kết luận về bài làm HS.

Câu 1: Phát biểu định lý Vi – ét:

+ Hai số x_1, x_2 là các nghiệm của PT: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) khi và chỉ khi chúng thỏa

$$\text{mãn: } \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

+ Các ứng dụng của định lý Vi – ét: Nhẩm nghiệm của PT bậc hai; phân tích đa thức thành nhân tử; tìm hai số biết tổng và tích của chúng.

Câu 2: + Theo định lý Vi ét, thì x, y là các nghiệm của PT: $X^2 - 3X + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 1 \\ X = 2 \end{cases}$

+ Vậy hai số x, y phải tìm là: $(x, y) = (1; 2)$ hoặc $(x, y) = (2; 1)$.

Câu 3 : Một số phân tích các biểu thức đối xứng hai nghiệm của PT bậc hai qua tổng S và tích P.

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2) = S(S^2 - 3P)$$

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2$$

$$x_1^n + x_2^n = (x_1 + x_2)(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}) - x_1x_2(x_1^{n-2} + x_2^{n-2}) = SS_{n-1} - P.S_{n-2}$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{S}{P}$$

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{S^2 - 2P}{P}$$

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 = \frac{x_1^4 + x_2^4}{(x_1 \cdot x_2)^2} = \frac{(S^2 - 2P)^2 - 2P^2}{P^2}$$

3. Bài mới.

Hoạt động 1: Xây dựng phương pháp giải và tập luyện cho HS kỹ năng giải HPT bậc hai hai ẩn mà trong hệ có một PT là bậc nhất.

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
------------------	------------------

<p>+ GV nêu vấn đề: Để giải một HPT bậc hai, hai ẩn ta thường dùng các phương pháp quen thuộc như phương pháp thế, phương pháp cộng đại số, phương pháp đặt ẩn phụ.</p> <p>+ Đối với một HPT bậc hai, hai ẩn mà trong hệ có một PT là bậc nhất, ta nên lựa chọn phương pháp nào cho phù hợp? Tại sao?</p> <p>+ Khi thực hiện rút thế, ta phải lưu ý điều gì? Tại sao?</p>	<p>+ Ta nên lựa chọn phương pháp thế để quy HPT về PT bậc hai một ẩn.</p> <p>+ Khi thực hiện phép rút thế ẩn này theo ẩn kia ta phải lưu ý các điều sau đây:</p> <p>- Nếu hệ số của một ẩn là ± 1 thì ta rút thế ẩn đó theo ẩn còn lại và thế vào PT kia.</p> <p>- Nếu các hệ số của ẩn đều khác ± 1 thì ta nên tạo ra các biểu thức giống nhau ở hai PT của hệ bằng cách nhân một trong hai PT của hệ với một hằng số hoặc nhân cả 2 PT với các hằng số phù hợp để tạo ra các biểu thức giống nhau, rồi mới thực hiện rút thế. Khi đó PT thu được sẽ có dạng nguyên và đẹp, giải dễ dàng.</p>
---	--

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<p>+ GV: Yêu cầu HS giải các HPT sau:</p> <p>a) Giải HPT: (I) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x^2 + 2y^2 - 2xy = 5 \end{cases}$</p> <p>b) Giải HPT: (II) $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$</p> <p>c) Giải HPT: (III) $\begin{cases} y^3 + xy^2 - 2y^2 + x + y - 1 = 0 \\ (y^2 + 1)(x + y)^2 = 1 \end{cases}$</p> <p>+ GV: Chia lớp thành 3 nhóm, mỗi nhóm làm một câu.</p> <p>+ Gọi ngẫu nhiên 3 HS của ba nhóm lên bảng, mỗi HS trình bày lời giải một câu.</p> <p>+ GV: Gọi ba HS khác nhận xét lời giải trên bảng và kết luận.</p> <p>+ Yêu cầu các HS hoàn thiện bài làm của mình vào vở.</p> <p>+ GV gọi động cơ kết thúc.</p>	<p>+ HS làm việc theo nhóm: Tìm cách giải HPT đã cho bằng phương pháp thế (mà nhóm mình phải làm).</p> <p>a) Hệ (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 2y \\ 10y^2 - 30y + 20 = 0 \end{cases}$</p> <p>$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 2y \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 5 - 2y \\ y = 2 \end{cases}$</p> <p>$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$</p> <p>+ HPT có 2 nghiệm: $(3;1), (1;3)$.</p> <p>b) HPT (II) $\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 1 + 2y \\ (1 + 2y)^2 + 9y^2 = 18 \end{cases}$</p> <p>$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\frac{21}{13} \\ y = -\frac{17}{13} \end{cases}$</p>

<p>Qua lời giải hai bài hệ trên ta thấy:</p> <p>- Đối với một HPT bậc hai hai ẩn, mà trong hệ có một PT là bậc nhất theo một ẩn nào đó, thì phương pháp giải đặc trưng cho hệ loại này là phương pháp thế.</p> <p>- Tùy vào đặc điểm từng PT trong hệ mà ta sẽ sử dụng phép thế sao cho PT thu được sau khi thế có dạng đơn giản nhất, dễ giải nhất, (có thể sử dụng phép thế ẩn này theo ẩn kia hoặc phép thế biểu thức hoặc phép thế hằng số).</p>	<p>+ Hệ có hai nghiệm: $(1;1), \left(-\frac{21}{13}; -\frac{17}{3}\right)$.</p> <p>c) HPT $\Leftrightarrow \begin{cases} (y^2+1)(x+y-2)+1=0 \\ (y^2+1)(x^2+1)=1 \end{cases}$</p> <p>+ Thế số 1 từ PT dưới lên PT trên được:</p> $(x+y)^2 + (x+y) - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ x+y=-2 \end{cases}$ <p>+ Từ hai trường hợp trên ta tìm được nghiệm của hệ là: $(1;0)$.</p> <p>+ Nhận xét lời giải của bạn.</p> <p>+ Hoàn thiện bài và kiến thức vào vở.</p>
--	--

Hoạt động 2: Xây dựng phương pháp giải và tập luyện cho HS kỹ năng giải HPT đối xứng loại 1 đối với hai ẩn x và y .

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<p>GV: Hình thành định nghĩa và tính chất nghiệm của HPT đối xứng loại 1 cho HS thông qua các câu hỏi sau:</p> <p>+ Thế nào là một HPT đối xứng loại 1 đối với hai ẩn x và y?</p> <p>+ Em hãy lấy một vài ví dụ về HPT đối xứng loại 1?</p> <p>+ Hệ PT sau: $\begin{cases} x^3 + y^3 = 19 \\ (x+y)(8+xy) = 2 \end{cases}$ có một nghiệm là $(-2;3)$. Em hãy kiểm tra xem cặp số $(3;-2)$ có là nghiệm của HPT trên không?</p> <p>+ Từ kết quả trên em hãy dự đoán về tính chất nghiệm của HPT đối xứng loại 1 không?</p> <p>+ Em trả lời hoàn toàn đúng.</p> <p>GV: Tiếp tục giúp HS xây dựng cách giải cho HPT đối xứng loại 1.</p> <p>+ Đối với HPT đối xứng loại 1 thường trong hệ luôn chứa tổng $x+y$ và tích xy. Vậy để giải HPT này ta làm như thế nào?</p> <p>+ Điều kiện của S và P là gì? Em hãy giải thích?</p> <p>+ GV yêu cầu HS giải các HPT sau:</p> <p>a) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 2 \\ xy(x+y) = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 30 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 35 \end{cases}$</p>	<p>HS: Làm việc cá nhân, suy nghĩ tìm câu trả lời.</p> <p>+ Hệ hai ẩn x và y gọi là đối xứng loại 1, nếu mỗi PT trong hệ không thay đổi nếu ta trao đổi vai trò của x và y cho nhau.</p> <p>+ Các HPT sau là HPT đối xứng loại 1</p> $\begin{cases} x+y+2xy=2 \\ x^3+y^3=8 \end{cases} \vee \begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=3 \\ \sqrt{x+y}+\sqrt{y+1}=4 \end{cases}$ <p>+ Cặp số $(3;-2)$ cũng là nghiệm của HPT đã cho.</p> <p>+ Nếu $(x_0; y_0)$ là một nghiệm của hệ thì $(y_0; x_0)$ cũng là một nghiệm của hệ.</p> <p>+ HS: Suy nghĩ và tìm kiếm câu trả lời.</p> <p>+ Đặt $\begin{cases} S = x+y \\ P = xy \end{cases}; S \geq 4P$.</p> <p>+ Vì đặt như vậy thì x, y là hai nghiệm của PT: $X^2 - SX + P = 0(*)$. Hệ có nghiệm (x, y) thì PT $(*)$ phải có nghiệm.</p> <p>+ Từ đó suy ra điều kiện $S \geq 4P$.</p> <p>+ HS: Nghiên cứu đề bài và tìm kiếm lời giải theo phương pháp giải đã xây dựng ở trên.</p>

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<p>GV: Gọi động cơ trung gian.</p> <p>+ Với HPT thứ nhất ở câu a), ta có thể đặt ẩn phụ $S = x + y, P = xy$ ngay được, nhưng với hệ thứ 2 ở câu b), trong hệ có sự xuất hiện của căn thức, ta chưa thể đặt ẩn phụ ngay theo cách đã làm như trong hệ thứ nhất được. Vậy với hệ ở câu b) ý tưởng giải trước tiên ở đây là gì?</p> <p>GV: Chia lớp thành hai dãy, mỗi dãy làm một câu. Gọi mỗi dãy một HS lên bảng trình bày lời giải của mình.</p> <p>+ Gọi 2 HS khác nhận xét bài làm của bạn. Đánh giá, cho điểm, yêu cầu HS hoàn thiện bài làm vào vở.</p> <p>GV: Gọi động cơ kết thúc.</p> <p>+ Qua hai lời giải trên, ta thấy để giải các HPT đối xứng loại 1 thì ta có thể đặt ẩn phụ: $S = x + y, P = xy$. Sau đó đưa về giải một HPT đơn giản và trả về biến ban đầu.</p> <p>+ Có những HPT hình thức là đối xứng loại 1, nhưng chưa đặt ẩn phụ theo tổng và tích ngay như trên được, trong trường hợp này ta phải biến đổi, sơ chế, đến tình huống thích hợp rồi mới đặt ẩn phụ theo tổng và tích được. Khi đặt ẩn phụ ta phải lưu ý điều gì? Ý nghĩa việc làm đó?</p> <p>+ GV nêu chú ý: Khi đặt ẩn phụ nhớ buộc điều kiện: $S \geq 4P$, tránh giải những HPT vô nghiệm.</p>	<p>a) Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}; S \geq 4P$, ta có hệ:</p> $\begin{cases} S^2 - 3SP = 2 \\ PS = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 2 \\ P = 1 \end{cases}$ <p>+ Từ đó tìm được: $(x, y) = (1; 1)$.</p> <p>b) Đặt $a = \sqrt{x} \geq 0; b = \sqrt{y} \geq 0$. Ta có hệ:</p> $\begin{cases} a^2b + b^2a = 30 \\ a^3 + b^3 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 5 \\ ab = 6 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$ <p>+ Từ đó tìm được các nghiệm của hệ đã cho là: $(4; 9), (9; 4)$.</p> <p>+ Nhận xét bài làm của bạn.</p> <p>+ Hoàn thiện lời giải vào vở.</p> <p>+ HS ghi nhận kiến thức.</p> <p>+ Ta phải buộc điều kiện cho ẩn phụ. Ý nghĩa ở đây để tránh giải các HPT vô nghiệm.</p> <p>+ HS: Ghi nhớ chú ý.</p>

Hoạt động 3: Xây dựng phương pháp giải và tập luyện cho HS kỹ năng giải HPT đối xứng loại 2 đối với hai ẩn x và y .

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<p>+ GV cho HPT: $\begin{cases} x^2 - 2x = y \\ y^2 - 2y = x \end{cases}$</p> <p>+ Em nhận xét gì về hai PT của hệ khi ta thay thế đồng thời x bởi y và y bởi x.</p> <p>+ GV: Hệ PT có tính chất như em vừa nêu gọi là HPT đối xứng loại 2.</p> <p>+ Em hãy phát biểu định nghĩa HPT đối xứng loại 2, đối với hai ẩn x và y.</p> <p>+ GV: HPT đối xứng loại 2 được giải như thế nào?</p> <p>+ Em hãy giải các HPT sau:</p> <p>a) $\begin{cases} x^2 - 3x = 2y \\ y^2 - 3y = 2x \end{cases}$</p> <p>b) $\begin{cases} 3x = \frac{x^2 + 2}{y^2} \\ 3y = \frac{y^2 + 2}{x^2} \end{cases}$</p> <p>c) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{2-y} = 2 \\ \sqrt{y} + \sqrt{2-x} = 2 \end{cases}$</p> <p>d) $\begin{cases} \sqrt{x+9} + \sqrt{y-7} = 8 \\ \sqrt{y+9} + \sqrt{x-7} = 8 \end{cases}$</p> <p>+ GV: Cho lớp làm việc nhóm trong 10 phút (GV chia lớp thành 4 nhóm).</p> <p>+ Yêu cầu các nhóm thảo luận tìm lời giải các HPT (Các HS trong nhóm phải cùng nhau suy nghĩ tìm cách giải, tự giảng giải cho nhau cùng hiểu).</p>	<p>+ HS: Nghe câu hỏi, nghiên cứu, tìm câu trả lời.</p> <p>+ PT thứ nhất của hệ trở thành PT thứ 2 và ngược lại.</p> <p>+ Hệ hai ẩn x và y gọi là đối xứng loại 2 nếu hệ có tính chất, thay x bởi y và y bởi x thì PT này trở thành PT kia và ngược lại.</p> <p>+ Trừ vế theo vế hai PT của hệ.</p> <p>+ Nghe hiểu yêu cầu đề bài.</p> <p>+ HS làm việc theo nhóm thực hiện nhiệm vụ giáo viên giao.</p> <p>a) Lấy PT thứ nhất trừ đi PT thứ hai vế theo vế ta được: $(x-y)(x+y-1)=0$.</p> <p>+ Khi đó hệ (a) tương đương với hai hệ sau:</p> $\begin{cases} x^2 - 3x = 2y \\ x = y \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 - 3x = 2y \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$ <p>+ Tiếp tục giải hai hệ đơn giản này ta được nghiệm: $(0;0), (5;5), (-1;2), (2;-1)$.</p> <p>b) Hệ (b) $\Leftrightarrow \begin{cases} 3xy^2 = x^2 + 2 & (1) \\ 3yx^2 = y^2 + 2 & (2) \end{cases}$</p> <p>+ Trừ (1) và (2) ta được:</p> $(x-y)(3xy + x + y) = 0$ $\Leftrightarrow x = y \text{ (vì } 3xy + x + y > 0 \text{)}$ <p>+ Với $x = y$: $(1) \Leftrightarrow 3x^3 - x^2 - 2 = 0$</p> $\Leftrightarrow (x-1)(3x^2 + 2x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

<p>+ Quan sát HS làm việc theo nhóm và gợi ý khi cần thiết.</p> <p>+ Gọi ngẫu nhiên 4 HS của 4 nhóm lên bảng trình bày lời giải. Mỗi HS làm một câu.</p> <p>+ Yêu cầu HS khác nhận xét bài làm của bạn, phát hiện sai lầm nếu có và đề xuất cách khắc phục.</p> <p>+ Đánh giá, kết luận bài làm của HS.</p> <p>+ GV: Qua ví dụ trên em có nhận xét gì về tính chất nghiệm của HPT đối xứng loại 2.</p> <p>+ GV: Khẳng định lại câu trả lời của HS là chính xác, yêu cầu các HS khác hoàn thiện vào vở. Đây là tính chất rất hữu ích khi làm việc với HPT đối xứng.</p> <p>+ GV gợi động cơ kết thúc:</p> <p>Qua tìm hiểu lời giải 4 HPT trên em hãy rút ra một vài kinh nghiệm giải toán cho bản thân về phương pháp giải cho HPT đối xứng loại 2?</p> <p>+ GV: Gọi một vài HS trả lời, nhận xét câu trả lời của HS và kết luận.</p> <p>+ Với HPT đối xứng loại 2, để giải hệ ta thường trừ vế theo vế hai PT của hệ.</p> <p>+ Trong một số bài toán phức tạp ta phải quy đồng mẫu hoặc bình phương hai vế 2 PT của hệ hoặc đặt ẩn phụ làm gọn và đẹp các PT trong hệ trước khi thực hiện trừ vế theo vế hai PT của hệ.</p>	<p>+ Vậy HPT có nghiệm là: $(1;1)$.</p> <p>c) Điều kiện: $0 \leq x, y \leq 2$.</p> <p>+ Trừ hai PT của hệ ta có:</p> $\sqrt{x} - \sqrt{2-x} = \sqrt{y} - \sqrt{2-y} (*)$ <p>+ Do hàm số $f(t) = \sqrt{t} - \sqrt{2-t}$ là một hàm số liên tục và đồng biến trên $(0;2)$.</p> <p>+ Nên $(*) \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.</p> <p>+ Thay vào PT (1) của hệ ta có:</p> $\sqrt{x} + \sqrt{2-x} = 2$ $\Leftrightarrow \sqrt{x(2-x)} = 1 \Leftrightarrow x = 1.$ <p>+ Vậy HPT có nghiệm duy nhất: $(1;1)$.</p> <p>d) Điều kiện: $x, y \geq 7$.</p> <p>+ Trừ hai PT của hệ ta được:</p> $\sqrt{x+9} + \sqrt{y-7} = \sqrt{y+9} + \sqrt{x-7}$ $\Leftrightarrow \sqrt{(x+9)(y-7)} = \sqrt{(y+9)(x-7)}$ $\Leftrightarrow x = y.$ <p>+ Thay vào PT thứ nhất của hệ ta được:</p> $\sqrt{x+9} + \sqrt{x-7} = 8.$ <p>Ta có hệ sau:</p> $\begin{cases} \sqrt{x+9} + \sqrt{x-7} = 8 \\ \sqrt{x+9} - \sqrt{x-7} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+9} = 5 \\ \sqrt{x-7} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 16.$ <p>+ Vậy HPT có nghiệm: $(16;16)$.</p> <p>+ Tính chất nghiệm của hệ đối xứng loại 2 cũng giống như HPT đối xứng loại 1, tức là: nếu hệ có nghiệm $(a;b)$ thì hệ cũng có nghiệm $(b;a)$.</p> <p>+ HS ghi nhận kiến thức.</p>
---	---

Hoạt động 4: Tập luyện cho HS thói quen và kỹ năng tìm nhiều cách giải cho một bài toán.

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
<p>+ GV: Nêu nhiệm vụ bằng phiếu học tập sau:</p> <p>+ Cho HPT: $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 \\ xy + x + y = 5 \end{cases}$</p> <p>a) Giải HPT trên bằng phương pháp thế.</p> <p>b) Giải HPT trên bằng phương pháp đặt ẩn phụ.</p> <p>c) Tìm cách giải khác hai cách giải trên.</p> <p>+ Yêu cầu HS làm việc cá nhân trong 7 phút và ghi kết quả ra giấy A3.</p> <p>+ Gọi một số HS lên bảng trình bày kết quả của mình (treo giấy A3 đã ghi bài làm).</p> <p>+ Cho HS dưới lớp nhận xét, hoặc hỏi phỏng vấn các bạn làm bài về những chỗ chưa rõ.</p> <p>+ Yêu cầu HS có lời giải trên bảng giải thích, trả lời phỏng vấn của các bạn dưới lớp.</p> <p>+ Sau khi các bạn giải thích xong, GV yêu cầu HS dưới lớp nhận xét về ưu điểm, nhược điểm từng phương pháp.</p> <p>+ Cuối cùng, GV nhận xét, kết luận.</p>	<p>+ Làm việc cá nhân, thực hiện nhiệm vụ giáo viên giao.</p> <p>a) Do $x = -1$ không thỏa mãn hệ. Từ PT thứ hai của hệ ta có: $y = \frac{5-x}{x+1}$. Thế vào PT thứ nhất của hệ được:</p> $x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 21x + 22 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2.$ <p>+ Vậy HPT có hai nghiệm: $(1;2), (2;1)$.</p> <p>b) Đặt $\begin{cases} x+y=S \\ xy=P \end{cases}; S \geq 4P$.</p> <p>+ Khi đó HPT trở thành:</p> $\begin{cases} S^2 - 2P + S = 8 \\ P + S = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = -6 \\ P = 11 \end{cases} (KTM) \vee \begin{cases} S = 3 \\ P = 2 \end{cases} (TM)$ <p>+ Từ đây ta tìm được nghiệm của hệ là: $(1;2), (2;1)$.</p> <p>c) HS có thể sử dụng phương pháp biến đổi tương đương để giải.</p> <p>+ Hệ đã cho tương đương với:</p> $\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 2xy + x + y = 8 \\ 2(x+y) + 2xy = 10 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 + 3(x+y) - 18 = 0 \\ x + y + xy = 5 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = -6 \\ xy = 11 \end{cases} \vee \begin{cases} x+y = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ <p>+ Vậy HPT có 2 nghiệm: $(1;2), (2;1)$.</p>

Hoạt động 5: Tập luyện cho HS thói quen phát hiện và sửa chữa sai lầm trong giải toán HPT.

+ GV: Đưa ra bài tập sau: Tìm m để HPT sau có nghiệm:
$$\begin{cases} 2x + \sqrt{y-1} = m & (1) \\ 2y + \sqrt{x-1} = m & (2) \end{cases}$$

+ GV đưa ra lời giải: Điều kiện: $x, y \geq 1$. Đặt $a = \sqrt{x-1}, b = \sqrt{y-1} \Rightarrow a, b \geq 0$, ta có HPT:

$$(*) \begin{cases} 2a^2 + b = m-2 & (3) \\ 2b^2 + a = m-2 \end{cases} \Rightarrow 2(a-b)(a+b) + b-a = 0 \Leftrightarrow (a-b)(2a+2b-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ a = \frac{1-2b}{2} \end{cases}$$

+ TH1: $a=b$, PT(3): $2a^2 + a = m-2$ (4).

+ HPT đã cho có nghiệm \Leftrightarrow PT (4) có nghiệm $a \geq 0 \Leftrightarrow m-2 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 2$.

+ TH2: $a = \frac{1-2b}{2}$, PT(3): $4b^2 - 2b - 2m + 5 = 0$ (5).

+ HPT đã cho có nghiệm \Leftrightarrow PT (5) này có nghiệm $b \geq 0$.

a) PT (5) có hai nghiệm b_1, b_2 thỏa mãn:

$$b_1 \leq 0 \leq b_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_b = (-1)^2 - 4(-2m+5) \geq 0 \\ \frac{-2m+5}{4} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{19}{8} \\ m \geq \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{5}{2}$$

b) PT (5) có hai nghiệm b_1, b_2 thỏa mãn: $b_2 \geq b_1 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_b \geq 0 \\ S \geq 0 \\ P \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{19}{8} \leq m \leq \frac{5}{2}$

+ Từ a) và b), được: $m \geq \frac{19}{8}$. Hợp kết quả hai TH, ta được: $m \geq 2$ thì HPT có nghiệm.

+ GV: Theo ý kiến của em lời giải trên đã đúng chưa? Vì sao? Nếu chưa đúng em hãy sửa lại cho đúng.

+ HS: Lời giải trên chưa đúng. Vì xác định chưa đúng miền ràng buộc của biến b mà PT (5) phải thỏa mãn. Cần sửa lại là:

+ HPT đã cho có nghiệm \Leftrightarrow HPT (*) có nghiệm $a \geq 0, b \geq 0$

\Leftrightarrow PT (5) có nghiệm thỏa mãn: $0 \leq b \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow$ PT $4b^2 - 2b = 2m-5$ có nghiệm thỏa mãn:

$$0 \leq b \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq 2m-5 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{19}{8} \leq m \leq \frac{5}{2}.$$

4. Củng cố bài học.

+ GV: Ngoài hệ bậc nhất hai ẩn đã học ở giờ trước, qua bài học ngày hôm nay các em có thêm các loại HPT bậc hai, hai ẩn như sau.

1. Hệ gồm một PT bậc nhất và một PT bậc hai.

2. Hệ đối xứng loại 1 và hệ đối xứng loại 2.

+ GV: Các em phải nắm chắc định nghĩa cho từng loại hệ và lấy được ví dụ minh họa cho mỗi loại hệ đó.

+ GV: Em hãy nêu cách giải đặc trưng cho từng loại hệ.

+ HS:

- Sử dụng phương pháp thế với loại hệ gồm một PT bậc nhất và một PT bậc hai.

- Sử dụng phương pháp biến đổi tương đương hoặc phương pháp đặt ẩn phụ với hệ đối xứng loại 1.

- Sử dụng phương pháp trừ vế theo vế hai phương trình của hệ với hệ đối xứng loại 2.

+ GV: Ngoài các phương pháp giải đặc trưng thường dùng như em vừa kể, ta còn các phương pháp mạnh khác như: Phương pháp đánh giá bất đẳng thức, phương pháp hàm số, phương pháp nhân biểu thức liên hợp với các HPT chứa căn thức... Các phương pháp này chúng ta sẽ tiếp tục nghiên cứu ở các bài học sau.

5. Giao nhiệm vụ và hướng dẫn bài tập về nhà.

a) **Nhiệm vụ 1:** Các em hoàn thành các bài tập 45,46,47,48 (trang 100 – SGK).

b) **Nhiệm vụ 2:** Giải các HPT sau:

$$1/ \begin{cases} (x+y)\left(1+\frac{1}{xy}\right)=5 \\ (x^2+y^2)\left(1+\frac{1}{x^2y^2}\right)=49 \end{cases} \qquad 2/ \begin{cases} x^3+1=2y \\ y^3+1=2x \end{cases}$$

c) **Nhiệm vụ 3:** Cho HPT $\begin{cases} x+y=2 \\ x^3+y^3=26 \end{cases}$

1) Giải HPT trên bằng phương pháp thế.

2) Giải HPT trên bằng phương pháp đặt ẩn phụ.

3) Tìm các giải khác với hai cách trên.

4) Nhận xét về ưu điểm, nhược điểm của mỗi cách.

3.3. ĐÁNH GIÁ KẾT QUẢ THỰC NGHIỆM.

3.3.1. Nội dung đánh giá

Sau khi dạy đối chứng và thực nghiệm xong, chúng tôi lấy kết quả nhận xét đánh giá từ phía các GV dự giờ. Đồng thời tiến hành kiểm tra cùng một lúc hai lớp để đánh giá mức độ TDST của HS trong việc giải các HPT.

ĐỀ KIỂM TRA THỰC NGHIỆM

(Thời gian: 45 phút)

Câu 1 (4 điểm) Xét bài toán: Tìm m để HPT $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y-1} = m \\ x + y = m^2 - 4m + 6 \end{cases}$ có nghiệm.

+ Bạn Anh giải bài toán trên như sau:

$$+ \text{Đặt } \begin{cases} a = \sqrt{x+1}, a \geq 0 \\ b = \sqrt{y-1}, b \geq 0 \end{cases}.$$

$$+ \text{Hệ PT trở thành: } \begin{cases} a + b = m \\ a^2 + b^2 = m^2 - 4m + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = m \\ ab = 2m - 3 \end{cases}$$

+ Hệ ban đầu có nghiệm \Leftrightarrow PT $X^2 - mX + 2m - 3 = 0$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow (-m)^2 - 4(2m - 3) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 8m + 12 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2 \\ m \geq 6 \end{cases}$$

+ Vậy $m \leq 2$ hoặc $m \geq 6$ là các giá trị phải tìm.

+ Em hãy tìm sai lầm trong lời giải trên của bạn Anh? Chỉ ra nguyên nhân sai lầm và đưa ra lời giải đúng cho bài toán.

Câu 2 (6 điểm): Cho HPT: $\begin{cases} \sqrt{2x+3} + \sqrt{4-y} = 4 & (1) \\ \sqrt{2y+3} + \sqrt{4-x} = 4 & (2) \end{cases}$

Em hãy giải HPT trên bằng các cách khác nhau (ít nhất 3 cách), nhận xét về ưu điểm, nhược điểm mỗi cách.

PHÂN TÍCH ĐỀ KIỂM TRA

Câu 1: Đòi hỏi HS phải phát hiện ra sai lầm trong lời giải và phải khắc phục sai lầm, hoàn thiện lời giải. Câu hỏi nhằm kiểm tra tính nhạy cảm vấn đề và tính hoàn thiện của TDST. Thông qua câu hỏi 1 này GV sẽ giúp HS hiểu rõ mối quan hệ tương ứng giữa nghiệm của HPT đã cho với nghiệm của PT thu được sau khi thực hiện phép đặt ẩn phụ và rút thế.

Câu 2: Đòi hỏi HS phải xem xét bài toán dưới nhiều góc độ, nhiều khía cạnh khác nhau từ đó tìm được nhiều cách giải khác nhau. Trên cơ sở có nhiều ý tưởng giải thì có nhiều khả năng tìm được lời giải độc đáo. Câu hỏi này nhằm kiểm tra tính nhuần nhuyễn, tính độc đáo của TDST.

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM

Câu	Nội dung	Điểm
1	<p>+ Lời giải của bạn Anh bị sai vì phạm sai lầm trong phép biến đổi: + Hệ ban đầu có nghiệm \Leftrightarrow PT $X^2 - mX + 2m - 3 = 0$ có nghiệm.</p> <p>Nguyên nhân sai lầm:</p> <p>+ Hiểu chưa thấu đáo mối quan hệ tương ứng giữa nghiệm của hệ ban đầu và nghiệm của PT: $X^2 - mX + 2m - 3 = 0$</p> <p>Lời giải đúng: Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x+1}, a \geq 0 \\ b = \sqrt{y-1}, b \geq 0 \end{cases}$.</p> <p>+ Hệ PT trở thành: $\begin{cases} a + b = m \\ a^2 + b^2 = m^2 - 4m + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = m \\ ab = 2m - 3 \end{cases} (*)$</p> <p>+ Hệ ban đầu có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn $x \geq -1, y \geq 1$</p> <p>\Leftrightarrow Hệ $(*)$ có nghiệm $(a; b)$ thỏa mãn: $a \geq 0, b \geq 0$</p> <p>\Leftrightarrow PT $X^2 - mX + 2m - 3 = 0$ có hai nghiệm không âm</p> <p>$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S \geq 0 \\ P \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-m)^2 - 4(2m - 3) \geq 0 \\ m \geq 0 \\ 2m - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2} \leq m \leq 2 \\ m \geq 6 \end{cases}$</p> <p>+ Vậy $\frac{3}{2} \leq m \leq 2$ hoặc $m \geq 6$ là các giá trị phải tìm.</p>	4

2	<p>+ HS giải đúng mỗi cách được 2 điểm, nếu HS giải được bằng cách khác mà đúng thì vẫn cho điểm tối đa. Nếu HS giải được nhiều hơn 3 cách thì GV tuyên dương khen thưởng.</p> <p>+ Điều kiện: $-\frac{3}{2} \leq x \leq 4; -\frac{3}{2} \leq y \leq 4$.</p> <p>+ Trừ (1) và (2) về theo vế, ta được: $(\sqrt{2x+3}-\sqrt{2y+3})+(\sqrt{4-y}+\sqrt{4-x})=0$ (3)</p> <p>Cách 1: PT (3) $\Leftrightarrow \frac{(2x+3)-(2y+3)}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{2y+3}}+\frac{(4-y)-(4-x)}{\sqrt{4-y}+\sqrt{4-x}}=0$</p> $\Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{2}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{2y+3}}+\frac{1}{\sqrt{4-y}+\sqrt{4-x}}\right)=0$ <p>+ Thay $x = y$ vào PT (1), ta được: $\sqrt{2x+3}+\sqrt{4-x}=4$</p> $\Leftrightarrow 2\sqrt{-2x^2+5x+12}=9-x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 9 \\ 9x^2-38x+33=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=\frac{11}{9} \end{cases}$ <p>+ Vậy HPT có hai nghiệm: $(3;3), \left(\frac{11}{9}; \frac{11}{9}\right)$.</p> <p>Cách 2: PT (3) $\Leftrightarrow \sqrt{2x+3}-\sqrt{4-x}=\sqrt{2y+3}-\sqrt{4-y}$ (4)</p> <p>+ Xét hàm số: $f(t)=\sqrt{2t+3}-\sqrt{4-t}, t \in \left[-\frac{3}{2}; 4\right]$</p> <p>$\forall t_1, t_2 \in \left[-\frac{3}{2}; 4\right], t_1 \neq t_2$, ta có:</p> $\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}=\frac{(\sqrt{2t_2+3}-\sqrt{2t_1+3})+(\sqrt{4-t_1}-\sqrt{4-t_2})}{t_2-t_1}>0$ <p>+ Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $\left[-\frac{3}{2}; 4\right]$.</p> <p>+ Do đó (4) $\Leftrightarrow f(x)=f(y) \Leftrightarrow x=y$.</p> <p>+ Thay $x = y$ vào PT (1) và làm tương tự cách 1.</p> <p>Cách 3:</p> $\text{Hê} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3+4-y+2\sqrt{(2x+3)(4-y)}=16 \\ 2y+3+4-x+2\sqrt{(2y+3)(4-x)}=16 \end{cases}$	6
---	--	---

$\Rightarrow 3(x-y) + 2\left(\sqrt{(2x+3)(4-y)} - \sqrt{(2y+3)(4-x)}\right) = 0$ $\Leftrightarrow (x-y) \left(3 + \frac{22}{\sqrt{(2x+3)(4-y)} + \sqrt{(2y+3)(4-x)}} \right) = 0$ $\Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow x=y$ <p>+ Thế $x=y$ vào PT (1) và làm tương tự cách 1.</p> <p>Cách 4: Đặt $u = \sqrt{2x+3} \geq 0, v = \sqrt{4-y} \geq 0$. Suy ra: $\begin{cases} x = \frac{u^2-3}{2} \\ y = 4-v^2 \end{cases}$</p> <p>+Hệ trở thành:</p> $\begin{cases} u+v=4 \\ \sqrt{11-2v^2} + \sqrt{4-\frac{u^2-3}{2}} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=4-v \\ \sqrt{22-4v^2} + \sqrt{11-u^2} = 4\sqrt{2} \end{cases}$ $\Rightarrow \sqrt{22-4v^2} + \sqrt{-v^2+8v-5} = 4\sqrt{2} (*) \Rightarrow 9v^4 + 48v^3 + 222v^2 - 944v + 665 = 0$ $\Rightarrow (v-1) \left(v - \frac{5}{3} \right) (9v^2 + 72v + 399) = 0 \Rightarrow v=1 \vee v = \frac{5}{3} \text{ (TM)}$ <p>+ Từ đây ta cũng tìm được nghiệm của hệ là: $(3;3), \left(\frac{11}{9}; \frac{11}{9}\right)$.</p> <p><u>Nhận xét:</u> Cả 4 cách giải đều cho lời giải tường minh, nhưng rõ ràng 3 cách đầu thể hiện được ưu thế riêng của mình là việc tính toán biến đổi có phần gọn gàng, đơn giản hơn.</p>	
--	--

3.3.2. Đánh giá kết quả thực nghiệm:

Dựa vào quan sát cá nhân về hoạt động dạy học ở các lớp, sự đánh giá nhận xét của các GV dự giờ và thống kê kết quả điểm số bài kiểm tra của HS, chúng tôi đưa ra những nhận xét định tính và định lượng như sau:

a) Đánh giá định tính

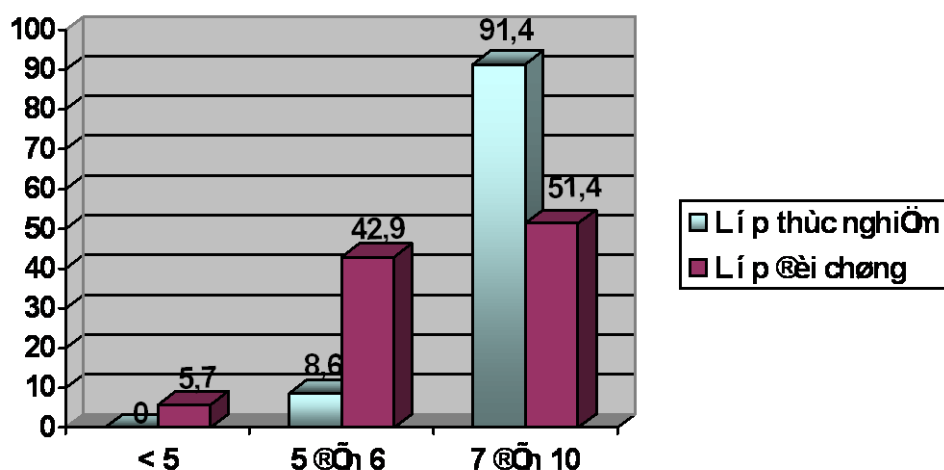
Ở lớp thực nghiệm HS học tập tích cực, chịu khó suy nghĩ tìm tòi cách giải bài tập, hoạt động nhóm diễn ra sôi nổi, có nhiều ý kiến hay, sáng tạo hơn so với lớp đối chứng.

Khả năng tiếp thu kiến thức mới, khả năng phát hiện sai lầm nhanh, khả năng tìm được nhiều cách giải và có cách giải độc đáo của HS lớp thực nghiệm hơn hẳn lớp đối chứng.

Cả hai lớp các em đều nắm vững kiến thức cơ bản. Tuy nhiên cách trình bày lời giải ở lớp thực nghiệm mạch lạc, ngắn gọn, lập luận chặt chẽ hơn.

b) Đánh giá định lượng.

Điểm Lớp	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Tổng số
10A1	0	0	0	0	1	2	10	9	10	4	35
10A4	0	0	0	2	3	12	8	6	4	0	35



Biểu đồ cột phản ánh sự so sánh kết quả điểm của hai lớp thực nghiệm và đối chứng

Phân tích kết quả kiểm tra:

Kết quả kiểm tra cho thấy: Lớp thực nghiệm có 91,4% HS đạt điểm khá giỏi. Trong đó có 4 em đạt điểm 10. Trong khi đó ở lớp đối chứng tỉ lệ này chỉ là 51,4% và không có điểm 10 nào. Có một số em ở lớp thực nghiệm đạt điểm tối đa là do các em đã có nhiều lời giả và tìm được lời giải hay, độc đáo. Lớp đối chứng không có em nào đạt điểm tối đa.

3.4. KẾT LUẬN CHƯƠNG 3.

Trong chương 3 của luận văn đã trình bày quá trình thực nghiệm sư phạm để kiểm chứng tính khả thi và tính hiệu quả của các biện pháp đã trình bày ở chương 2. Kết quả thực nghiệm cho thấy rằng: Việc sử dụng các biện pháp sư phạm đã nêu trong quá trình dạy học giải HPT sẽ phát triển được TDST cho HSG. Như vậy mục đích thực nghiệm sư phạm đã hoàn thành và giả thuyết khoa học đã được chứng minh.

KẾT LUẬN

Sáng tạo là một phẩm chất rất cần thiết của con người mới trong xã hội phát triển. Việc rèn luyện TDST là khả thi và cần thiết tiến hành ngay trong nhà trường phổ thông, điều này đã được nhận thức thành một nhiệm vụ đặt ra cho ngành giáo dục. Dạy học môn toán nói chung và nội dung HPT nói riêng có điều kiện thuận lợi để thực hiện nhiệm vụ dạy học này.

Qua quá trình nghiên cứu đề tài, chúng tôi đã thu được các kết quả sau:

- + Làm sáng tỏ được các đặc điểm của hoạt động sáng tạo khoa học và một số yếu tố của TDST.

- + Đã đề xuất được một số biện pháp sư phạm nhằm phát triển TDST cho HSG trong dạy học HPT ở trường THPT.

- + Đã đề xuất được một số phương pháp, kỹ thuật xây dựng, sáng tạo các bài toán về HPT nhằm phát triển TDST cho HSG.

- + Đã bước đầu điều tra, thực nghiệm sư phạm, bước đầu xác định được tính cấp thiết của việc dạy học sáng tạo và xác định được tính khả thi của phương án đã đề xuất, đồng thời bước đầu có thể khẳng định được giả thuyết khoa học đưa ra trong luận văn là đúng đắn.

- + Đã hoàn thành nhiệm vụ nghiên cứu đề ra. Hơn nữa, đề tài và phương pháp nghiên cứu của luận văn này còn có thể tiếp tục được áp dụng cho nhiều nội dung khác của môn toán và cho các lớp, các cấp học khác nhau.

Qua việc thực hiện luận văn, chúng tôi đã thu nhận được nhiều kiến thức bổ ích về lý luận qua các sách, báo, tạp chí và các công trình nghiên cứu về các lĩnh vực liên quan đến đề tài của luận văn. Chúng tôi hy vọng rằng, trong thời gian tiếp theo những tư tưởng và giải pháp đã được đề xuất sẽ tiếp tục được thử nghiệm, khẳng định tính khả thi trong việc phát triển TDST cho HS.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Ban Tổ Chức Kỳ Thi, (2014) *Tuyển tập 20 năm đề thi olympic 30 tháng 4 toán 10*, NXB Đại học Quốc gia, Hà Nội.
2. Ban Tổ Chức Kỳ Thi, (2014) *Tuyển tập 20 năm đề thi olympic 30 tháng 4 toán 11*, NXB Đại học Quốc Gia, Hà Nội.
3. Đậu Thế Cấp, Hùng Công Thái, (2014) *Các chuyên đề đại số nâng cao*, NXB Đại Học Quốc Gia TP. Hồ Chí Minh.
4. Lê Hải Châu, Phạm Văn Hoàn (1971), *Rèn luyện trí thông minh cho học sinh qua giải bài tập toán*, Tạp chí nghiên cứu giáo dục số 5 - 1971.
5. Hoàng Chúng (1969) *Rèn luyện khả năng sáng tạo toán học ở trường phổ thông*, NXB Giáo dục.
6. Lê Văn Đoàn, (2014), *Cẩm nang ôn thi đại học phương trình, bất phương trình, hệ phương trình*, NXB Đại Học Quốc Gia, Hà Nội.
7. Phạm Văn Hoàn, Trần Thúc Trình, Nguyễn Gia Cốc (1981), *Giáo dục học môn toán*, NXBGD, Hà Nội
8. Lê Bá Việt Hùng (2014), *Phát triển tư duy sáng tạo cho học sinh giỏi trong dạy học giải phương trình, bất phương trình vô tỉ ở trường THPT*. Luận văn Thạc sỹ PPDH Toán, Trường ĐHSP Thái Nguyên.
9. Nguyễn Trung Kiên (2014), *Tài liệu ôn thi đại học môn toán, sáng tạo và giải phương trình, hệ phương trình, bất đẳng thức*, NXB Đại học Quốc gia, Hà Nội.
10. Nguyễn Bá Kim, Đinh Nho Chương, Nguyễn Mạnh Cầm, Vũ Dương Thụy, Nguyễn Văn Thường (1994), *Phương pháp dạy học môn toán - phần 2: Dạy học những nội dung cơ bản* (Giáo trình ĐHSP), NXB Giáo dục, Hà Nội.
11. Nguyễn Bá Kim, (2009), *Phương pháp dạy học môn Toán*, NXB Đại học Sư phạm, Hà Nội.
12. Trần Luận (1996), *Vận dụng tư tưởng sư phạm của G.Pôlya xây dựng nội dung và phương pháp dạy học trên cơ sở các hệ thống bài tập theo chủ đề nhằm phát huy năng lực sáng tạo của học sinh chuyên toán cấp II*. Luận án PTS khoa học giáo dục - Tâm lý, Viện Khoa học Giáo dục.
13. Đặng Thành Nam (2014), *Những điều cần biết, luyện thi đại học, kỹ thuật giải nhanh, hệ phương trình*, NXB Đại học Quốc Gia, Hà Nội.

14. Đặng Thành Nam (2015), *Khám phá tư duy, kỹ thuật giải nhanh bất đẳng thức, bài toán min max*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.
15. Bùi Văn Nghị (2009), *Vận dụng lý luận vào thực tiễn dạy học môn Toán ở trường phổ thông*, Nxb Đại học Sư phạm.
16. Phạm Bình Nguyên, Nguyễn Ngọc Duyệt (2015), *Bí quyết chinh phục kì thi quốc gia 2 trong 1, chủ đề PT, BPT, HPT*, NXB Đại Học Quốc Gia, Hà Nội.
17. Đoàn Quỳnh, Nguyễn Huy Đoan, Nguyễn Xuân Liêm, Nguyễn Khắc Minh, Đặng Hùng Thắng (2007), *Đại số & Giải tích 10 Nâng cao*, Nxb Giáo dục, Hà Nội.
18. Đoàn Quỳnh, Nguyễn Huy Đoan, Nguyễn Xuân Liêm, Nguyễn Khắc Minh, Đặng Hùng Thắng (2008), *Đại số & Giải tích 11 Nâng cao*, Nxb Giáo dục, Hà Nội.
19. Đoàn Quỳnh, Nguyễn Huy Đoan, Trần Phương Dung, Nguyễn Xuân Liêm, Đặng Hùng Thắng, *Giải tích 12 Nâng cao* (2009) Nxb Giáo dục, Hà Nội.
20. Tôn Thân (1995), *Xây dựng hệ thống câu hỏi và bài tập nhằm bồi dưỡng một số yếu tố của tư duy sáng tạo cho học sinh khá giỏi toán ở trường trung học cơ sở Việt nam*
Luận án phó tiến sĩ khoa học sư phạm – Tâm lí, Viện Khoa học Giáo dục.
21. Nguyễn Cảnh Toàn (1992), *Tập cho học sinh giỏi làm quen dần với nghiên cứu toán học*, NXB Giáo dục, Hà Nội.
22. Nguyễn Tất Thu (2014), *Phương pháp giải toán chuyên đề phương trình, bất phương trình, hệ phương trình, bất đẳng thức*, NXB Đại học Sư Phạm.
23. Nguyễn Thị Minh Thúy (2007), *Góp phần bồi dưỡng một số yếu tố của tư duy sáng tạo thông qua dạy học bài tập Hình học 10*. Luận văn Thạc sĩ PPDH Toán, Trường ĐHSP Hà Nội.
24. Hoàng Đăng Thường (2014), *Phát triển năng lực giải toán cho Học sinh trung học phổ thông thông qua dạy học bất đẳng thức*. Luận văn Thạc sĩ PPDH Toán, Trường ĐHSP Thái Nguyên.
25. Hứa Anh Tuấn (2014), *Phát triển năng lực vận dụng kiến thức hình học vào thực tiễn cho học sinh trung học phổ thông*. Luận văn Thạc sĩ PPDH Toán, Trường ĐHSP Thái Nguyên.
26. G. Polya (1978) *Sáng tạo Toán học*, NXB Giáo dục
27. I.Ia Lecne (1997), *Dạy học nêu vấn đề* (Phan Tất Đắc dịch), NXBGD

PHỤ LỤC 1

BỔ SUNG THÊM MỘT SỐ VÍ DỤ CHO CÁC BIỆN PHÁP SỬ DỤNG TỪ BIỆN PHÁP 1 ĐẾN BIỆN PHÁP 5 CỦA CHƯƠNG 2

1. Thêm hai bài toán và hai ví dụ cho biện pháp 1: Củng cố tri thức, đào sâu, mở rộng các khái niệm, tính chất, các quy tắc phương pháp có liên quan, tập luyện kỹ năng giải HPT để tạo điều kiện nền tảng cho phát triển TDST ở HSG.

Ví dụ 2: Tiếp sau đây, ta xét thêm hai bài toán nữa để minh chứng cho ưu điểm của phương pháp sử dụng HPT bậc nhất hai ẩn để giải các HPT khác.

<p>Bài toán 3: Giải HPT $\begin{cases} (x+y)\sqrt{2xy+5} = 4xy - 3y + 1 \\ (x+2y)\sqrt{2xy+5} = 6xy + x - 7y - 6 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{Q})$</p>

Quan sát hệ trên HS có thể thấy biến $\sqrt{2xy+5}$ xuất hiện ở cả hai PT của hệ, đồng thời liên hệ mật thiết với hai đại lượng $4xy$ và $6xy$. Hơn nữa trong HPT các biến x và y đều có bậc nhất. Điều này gợi ý tưởng đặt ẩn phụ $a = \sqrt{2xy+5}$, HS có thể đưa HPT trên về HPT hai ẩn đối với x và y . Đến đây vận dụng các bước giải HPT bậc nhất hai ẩn, HS có lời giải sau:

Lời giải:

+ Điều kiện: $2xy + 5 \geq 0 \Leftrightarrow xy \geq -\frac{5}{2}$

+ Đặt $a = \sqrt{2xy+5}, (a \geq 0)$, ta có: $2xy = a^2 - 5$.

+ Khi đó HPT đã cho trở thành:

$$\begin{cases} (x+y)a = 2(a^2 - 5) - 3y + 1 \\ (x+2y)a = 3(a^2 - 5) + x - 7y - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a.x + (a+3).y = 2a^2 - 9 \\ (a-1).x + (2a+7).y = 3a^2 - 21 \end{cases} \quad (I)$$

+ Xem (I) là HPT bậc nhất hai ẩn x và y , a là tham số, ta có:

$$D = \begin{vmatrix} a & a+3 \\ a-1 & 2a+7 \end{vmatrix} = a^2 + 5a + 3; D_x = \begin{vmatrix} 2a^2 - 9 & a+3 \\ 3a^2 - 21 & 2a+7 \end{vmatrix} = a(a^2 + 5a + 3)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a & 2a^2 - 9 \\ a-1 & 3a^2 - 21 \end{vmatrix} = (a-3)(a^2 + 5a + 3)$$

+ Do $a \geq 0$ nên $D = a^2 + 5a + 3 \neq 0$.

+ Từ đây suy ra HPT (II) có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x = \frac{D_x}{D} = a \\ y = \frac{D_y}{D} = a - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2xy+5} = x \\ \sqrt{2xy+5} = y+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y+3 \\ \sqrt{2xy+5} = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \\ x=5 \\ y=2 \end{cases} \text{ (TM)}$$

+ Vậy HPT đã cho có hai nghiệm là: $(1; -2), (5; 2)$.

Bài toán 4: Giải HPT:
$$\begin{cases} (z+1)\sqrt{x^2-1} + (z^2+4z)\sqrt{y^2+1} = z^3+5z^2-1 \\ \sqrt{x^2-1} + (z+3)\sqrt{y^2+1} = z^2+4z-1 \\ x^2+y^2+z^2=9 \end{cases}$$

Đây là hệ gồm ba PT ba ẩn số. Quan sát ban đầu, HS có thể thấy hệ trên khá phức tạp. Với HSG nếu nhìn kĩ một chút thì dễ dàng nhận ra được ở hai PT đầu của hệ có sự xuất hiện của hai ẩn phụ $\sqrt{x^2-1}$ và $\sqrt{y^2+1}$ và khi đó biến z sẽ đứng độc lập. Điều này gợi ý tưởng cho HS xét riêng hai PT này với hai ẩn phụ lần lượt là $\sqrt{x^2-1}$ và $\sqrt{y^2+1}$ để nhận được một HPT bậc nhất hai ẩn. Xử lý hệ này HS nhanh chóng tìm được mối quan hệ giữa x^2, y^2, z . Tới đây thực hiện phép thế vào PT thứ ba, HS sẽ thu được một PT ẩn z và tìm được nghiệm của HPT ban đầu.

Lời giải: Điều kiện: $x^2 \geq 1 \Leftrightarrow x \leq -1$ hoặc $x \geq 1$.

+ Đặt
$$\begin{cases} u = \sqrt{x^2-1}, u \geq 0 \\ v = \sqrt{y^2+1}, v \geq 0 \end{cases}$$

+ Khi đó hai PT đầu của HPT đã cho được viết thành:

$$(I) \begin{cases} (z+1)u + (z^2+4z)v = z^3+5z^2-1 \\ u + (z+3)v = z^2+4z-1 \end{cases}$$

+ Tính các định thức, ta có:
$$D = \begin{vmatrix} z+1 & z^2+4z \\ 1 & z+3 \end{vmatrix} = 3$$

$$D_x = \begin{vmatrix} z^3+5z^2-1 & z^2+4z \\ z^2+4z-1 & z+3 \end{vmatrix} = 3z-3; D_y = \begin{vmatrix} z+1 & z^3+5z^2-1 \\ 1 & z^2+4z-1 \end{vmatrix} = 3z$$

+ Vì $D \neq 0$ nên hệ (I) có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} u = z - 1 \\ v = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 - 1} = z - 1 \\ \sqrt{y^2 + 1} = z \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = z^2 + (z - 1)^2$$

+ Thế vào PT ba của hệ đã cho được:

$$2z^2 + (z - 1)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} z \geq 1 \\ 3z^2 - 2z - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = 2 \text{ (TM)}$$

+ Khi đó, ta tìm được: $\begin{cases} u = 1 \\ v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 - 1} = 1 \\ \sqrt{y^2 + 1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2 \\ y^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ y = \pm\sqrt{3} \end{cases} \text{ (TM)}$

+ Vậy HPT đã cho có bốn nghiệm:

$$(\sqrt{2}; -\sqrt{3}; 2), (\sqrt{2}; \sqrt{3}; 2), (-\sqrt{2}; -\sqrt{3}; 2), (-\sqrt{2}; \sqrt{3}; 2).$$

Ví dụ 3: Dạy học giải HPT bằng phương pháp biến đổi tương đương.

Chúng ta đều biết HPT là sự tích hợp của hai hay nhiều PT, trong mỗi PT của hệ người ra đề có thể đưa vào nhiều nội dung kiến thức khác nhau như căn thức, lượng giác, mũ lôgarit..., điều này làm cho các phép biến đổi trong quá trình giải một HPT vô cùng phức tạp và thường gây khó khăn đối với đa số HS, kể cả HSG. Các em thường lúng túng không biết trong trường hợp nào thì dùng phép biến đổi tương đương, trường hợp nào thì dùng phép biến đổi hệ quả. Trong thực tế giải toán về HPT không ít HS đã bộc lộ sai lầm khi không nắm vững các phép biến đổi tương đương và phép biến đổi hệ quả. Ví dụ GV yêu cầu HS giải HPT sau:

$$\begin{cases} 2x^3 - x^2 - x + 4 = 0 \\ 2x^3 + x^2 + 2x + 5 = 0 \end{cases} \text{ (I)}$$

+ Một HS đã đưa ra lời giải như sau:

$$\text{HPT(I)} \Leftrightarrow 2x^3 - x^2 - x + 4 = 2x^3 + x^2 + 2x + 5$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

+ Kết luận: Hệ có tập nghiệm là: $S = \left\{ -1; -\frac{1}{2} \right\}$

+ Rõ ràng lời giải trên của HS bị sai vì với $x = -1$ và $x = -\frac{1}{2}$ thì hệ (I) không nghiệm

đúng, nên $x = -1$ và $x = -\frac{1}{2}$ là nghiệm ngoại lai của hệ (I). Nguyên nhân sai lầm là do

HS đã vận dụng một phép biến đổi tương đương không đúng là:

$$\begin{cases} P(x) = H(x) \\ Q(x) = H(x) \end{cases} \Leftrightarrow P(x) = Q(x) \text{ (Đây chỉ là một phép biến đổi hệ quả)}$$

+ Để giúp các em nắm vững các phép biến đổi tương đương trong giải HPT, GV có thể tổ chức các hoạt động dạy học như sau:

Hoạt động 1: củng cố, tập luyện các phép biến đổi tương đương trong giải HPT.

+ GV: Em hãy nêu các phép biến đổi tương đương hay gặp trong giải HPT sau:

$$\begin{cases} f_1(x) = f_2(x) \\ g_1(x) = g_2(x) \end{cases}$$

GV: Cho lớp hoạt động theo nhóm như sau:

- + Chia lớp thành 4 nhóm, các nhóm làm việc trong khoảng 3 phút.
- + Yêu cầu mỗi nhóm thực hiện các nhiệm vụ sau:
- + Mỗi HS trong nhóm độc lập suy nghĩ để có câu trả lời của riêng mình.
- + Các thành viên trong nhóm thảo luận, tổng hợp ý kiến.
- + GV: Gọi các nhóm trình bày kết quả của nhóm mình (gọi thành viên bất kỳ của nhóm)
- + GV: Đánh giá, nhận xét kết quả của các nhóm và đưa ra đáp án.

Đối với HPT trên, ta hay sử dụng các phép biến đổi tương đương sau đây:

$$\begin{aligned} 1) & \begin{cases} f_1(x) = f_2(x) \\ g_1(x) = g_2(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x) = f_2(x) \\ f_1(x) + g_1(x) = f_2(x) + g_2(x) \end{cases} \\ 2) & \begin{cases} f_1(x) = f_2(x) \\ g_1(x) = g_2(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x) = f_2(x) \\ f_1(x) - g_1(x) = f_2(x) - g_2(x) \end{cases} \\ 3) & \begin{cases} f_1(x) = f_2(x) \\ g_1(x) = g_2(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x) + g_1(x) = f_2(x) + g_2(x) \\ f_1(x) - g_1(x) = f_2(x) - g_2(x) \end{cases} \\ 4) & \begin{cases} f_1(x) = f_2(x) \\ g_1(x) = g_2(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1^2(x) = f_2^2(x) \\ g_1(x) = g_2(x) \end{cases}, (f_1(x), f_2(x) \text{ cùng dấu}). \end{aligned}$$

$$5) \begin{cases} f_1(x) = f_2(x) \\ g_1(x) = g_2(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x) = f_2(x) \\ g_1^2(x) = g_2^2(x) \end{cases} \text{ (} g_1(x), g_2(x) \text{ cùng dấu)}$$

+ GV hỏi thêm: Kết quả trên có thể mở rộng cho hệ nhiều ẩn không?

+ HS: Suy nghĩ đưa ra câu trả lời theo suy luận của riêng mình.

+ GV nêu chú ý:

1) Kết quả trên có thể mở rộng cho hệ nhiều ẩn.

2) Nếu biết chắc chắn trên miền xác định của hệ $f_i(x) \neq 0; g_i(x) \neq 0, i = 1, 2, 3 \dots n$

thì có thể thay phép cộng, phép trừ, bằng phép nhân, phép chia, thí dụ:

$$\begin{cases} f_1(x) = f_2(x) \\ g_1(x) = g_2(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x) = f_2(x) \\ f_1(x) \cdot g_1(x) = f_2(x) \cdot g_2(x) \end{cases}$$

$$\text{hoặc} \begin{cases} f_1(x) = f_2(x) \\ g_1(x) = g_2(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x) = f_2(x) \\ \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \frac{f_2(x)}{g_2(x)} \end{cases}$$

Hoạt động 2: Vận dụng vào thực hành giải toán.

<p>Bài toán 1: Giải hệ PT (I) $\begin{cases} \sqrt{x^2 + x + y + 1} + x + \sqrt{y^2 + x + y + 1} + y = 18 \\ \sqrt{x^2 + x + y + 1} - x + \sqrt{y^2 + x + y + 1} - y = 2 \end{cases}$</p>

Bài hệ này HS có nhiều cách giải, trong số các cách giải đó, cách giải dùng phương pháp biến đổi tương đương có lẽ là một trong các cách giải gọn gàng và sáng sủa nhất. HS có thể giải HPT trên như sau:

Lời giải: Cộng và trừ vế theo vế hai PT của hệ (I), ta được:

$$+\text{Hệ (I)} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + x + y + 1} + \sqrt{y^2 + x + y + 1} = 10 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{y^2 + 9} = 10 \\ x + y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{73 - 16x + x^2} = 10 - \sqrt{x^2 + 9} & (1) \\ y = 8 - x & (2) \end{cases}$$

$$+\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} 10 - \sqrt{x^2 + 9} \geq 0 \\ 73 - 16x + x^2 = 109 - 20\sqrt{x^2 + 9} + x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \leq \sqrt{91} \\ 9x^2 - 72x + 144 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \Rightarrow y = 4 \text{ (TM)}$$

+ Vậy nghiệm của HPT đã cho là: $(4;4)$.

Nhận xét: Thông qua bài toán này HS đã được củng cố và rèn luyện các phép

biến đổi tương đương: $\begin{cases} f_1(x) = f_2(x) \\ g_1(x) = g_2(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x) + g_1(x) = f_2(x) + g_2(x) \\ f_1(x) - g_1(x) = f_2(x) - g_2(x) \end{cases}$

và $\begin{cases} f_1(x) = f_2(x) \\ g_1(x) = g_2(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1^2(x) = f_2^2(x) \\ g_1(x) = g_2(x) \end{cases}, (f_1(x), f_2(x) \text{ cùng dấu}).$

Bài toán 2: Giải HPT (I) $\begin{cases} 3x^2 = 2y + \frac{1}{y} \\ 3y^2 = 2x + \frac{1}{x} \end{cases}$
--

Bài toán trên là HPT đối xứng loại 2, ở đây HS có thể giải hệ bằng phép biến đổi tương đương dựa trên đường lối giải của HPT xứng loại 2, là trừ vế theo vế hai phương trình của hệ, sau khi thực hiện phép quy đồng hai vế hai PT của hệ.

Lời giải:

+ Điều kiện: $x \neq 0, y \neq 0$.

Nhận xét: $2y$ và $\frac{1}{y}$ (cũng như $2x$ và $\frac{1}{x}$) cùng dấu, nên từ hệ suy ra: $x > 0, y > 0$.

$$+ \text{Hệ (I)} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2y = 2y^2 + 1 \\ 3y^2x = 2x^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2y = 2y^2 + 1 \\ 3xy(x - y) = 2y^2 - 2x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2y = 2y^2 + 1 \\ (x - y)[3xy + 2(x + y)] = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2y = 2y^2 + 1 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad (\text{Do: } x > 0, y > 0 \Rightarrow 3xy + 2(x + y) > 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ 3x^3 - 2x^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ (x - 1)(3x^2 + x + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1 \quad (\text{TM})$$

+ Vậy hệ có nghiệm duy nhất: $(1;1)$.

Nhận xét: Thông qua bài toán này HS đã được củng cố và rèn luyện phép biến

đổi tương đương: $\begin{cases} f_1(x) = f_2(x) \\ g_1(x) = g_2(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x) = f_2(x) \\ f_1(x) - g_1(x) = f_2(x) - g_2(x) \end{cases}$

<p>Bài toán 3: Giải HPT (I) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 & (1) \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = 2 & (2) \end{cases}$</p>

HS dễ dàng nhận thấy vế trái của PT (1) và PT (2) đều là đẳng cấp bậc 3 và vế phải của chúng đều là những hằng số, nên ở bài hệ này hướng giải quyết là thực hiện biến đổi tương đương trên hệ, với ý tưởng tạo ra một PT đẳng cấp bậc 3 trong hệ.

Lời giải:

+ Xét $x = y = 0$, hệ đã cho không thỏa mãn.

+ Xét $x \neq 0, y \neq 0$, viết lại hệ đã cho ta được: (II) $\begin{cases} 1 = x^3 + y^3 & (3) \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = 2 & (4) \end{cases}$

+ Thực hiện nhân vế theo vế PT (3) và PT (4), ta được:

+ Hệ (II) $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = x^3 + y^3 \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = 2(x^3 + y^3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ 2x^3 - x^2y - 2xy^2 + y^3 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ 2\left(\frac{x}{y}\right)^3 - \left(\frac{x}{y}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{y}\right) + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ \begin{cases} \frac{x}{y} = \pm 1 \\ \frac{x}{y} = \frac{1}{2} \end{cases} \end{cases}$$

+ Nếu $\frac{x}{y} = 1 \Rightarrow x = y = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ (TM)

+ Nếu $\frac{x}{y} = -1 \Rightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x = -y \end{cases}$ (hệ này vô nghiệm)

+ Nếu $\frac{x}{y} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt[3]{3}}{3}, y = \frac{2\sqrt[3]{3}}{3}$ (TM)

+ Kết luận: Hệ (I) có hai nghiệm: $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}; \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right), \left(\frac{\sqrt[3]{3}}{3}; \frac{2\sqrt[3]{3}}{3}\right)$.

Nhận xét: Thông qua bài toán này HS đã được củng cố và rèn luyện phép biến đổi tương đương:

$$\begin{cases} f_1(x) = f_2(x) \\ g_1(x) = g_2(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x) = f_2(x) \\ f_1(x) \cdot g_1(x) = f_2(x) \cdot g_2(x) \end{cases} \quad f_i(x) \neq 0; g_i(x) \neq 0, i = 1, 2.$$

$$\text{Bài toán 4: Giải HPT: (I)} \begin{cases} (x+y)(x+y+z) = 45 \\ (y+z)(x+y+z) = 63 \\ (x+z)(x+y+z) = 54 \end{cases}$$

Lời giải: Cộng ba PT của hệ về theo vế, ta có:

$$\begin{aligned} + \text{ Hệ (I)} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(x+y+z) = 45 \\ (y+z)(x+y+z) = 63 \\ (x+y+z)[(x+y) + (y+z) + (z+x)] = 162 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(x+y+z) = 45 \\ (y+z)(x+y+z) = 63 \\ (x+y+z)^2 = 81 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} (x+y)(x+y+z) = 45 \\ (y+z)(x+y+z) = 63 \\ x+y+z = 9 \end{cases} \\ \begin{cases} (x+y)(x+y+z) = 45 \\ (y+z)(x+y+z) = 63 \\ x+y+z = -9 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x+y = 5 \\ y+z = 7 \\ x+y+z = 9 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y = -5 \\ y+z = -7 \\ x+y+z = -9 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 4 \end{cases} \text{ (TM)} \\ \begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \\ z = -4 \end{cases} \text{ (TM)} \end{cases} \end{aligned}$$

+ Vậy hệ (I) có hai nghiệm: $(2; 3; 4), (-2; -3; -4)$.

Nhận xét: Chỉ với các phép biến đổi tương đương thuần túy, HS đã có được một lời giải đẹp trong sáng và giải dị cho bài toán.

$$\text{Bài toán 5: Giải HPT: } \begin{cases} 2(yz - zx - xy) = xyz \\ 3(zx - xy - yz) = xyz \\ 4(xy - yz - zx) = xyz \end{cases}$$

Lời giải:

+ Rõ ràng $(0; 0; m), (0; m; 0), (m; 0; 0)$ là các nghiệm của HPT.

$$+ \text{ Xét } xyz \neq 0. \text{ HPT đã cho tương đương: (I)} \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{x} = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{z} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

+ Cộng vế theo vế các PT trong hệ (I), ta được: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{13}{12}$.

+ Cộng PT này lần lượt với các PT của hệ (I), vế theo vế ta được:

$$\begin{cases} \frac{2}{x} = \frac{19}{12} \\ \frac{2}{y} = \frac{17}{12} \\ \frac{2}{z} = \frac{16}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{24}{19} \\ y = \frac{24}{17} \\ z = \frac{3}{2} \end{cases}$$

+ Vậy HPT đã cho có các nghiệm là: $(0;0;m), (0;m;0), (m;0;0), \left(\frac{24}{19}; \frac{24}{17}; \frac{3}{2}\right)$.

Nhận xét: Với bài hệ này HS đã được rèn luyện và củng cố phép biến đổi đương đương:

$$\begin{cases} f_1(x) = f_2(x) \\ g_1(x) = g_2(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x) = f_2(x) \\ \frac{g_1(x)}{h(x)} = \frac{g_2(x)}{h(x)}, (h(x) \neq 0 \text{ trên miền xác định của hệ}) \end{cases}$$

Ví dụ 4: Giải HPT bằng phương pháp đặt ẩn phụ.

Trong chương trình toán THPT, phương pháp đặt ẩn phụ là một trong những công cụ hết sức là quan trọng, thông dụng, thường xuyên được sử dụng trong quá trình giải toán nói chung và trong dạy học giải HPT nói riêng. Khi đứng trước một bài toán nào đó phương pháp đặt ẩn phụ luôn là một trong những hướng nghĩ đầu tiên mà người giải toán muốn thử với hy vọng đơn giản hóa bài toán đã cho. Về tầm quan trọng thì là như vậy. Nhưng trong chương trình SGK hiện hành phương pháp này cũng chưa được trình bày một cách đầy đủ, chi tiết và cẩn thận. Hơn nữa phương pháp đặt ẩn phụ cũng có nhiều cách như đặt ẩn phụ hoàn toàn (đặt ẩn phụ toàn phần), đặt ẩn phụ không hoàn toàn (đặt ẩn phụ không toàn phần), đặt một ẩn phụ, đặt hai ẩn phụ, đặt nhiều ẩn phụ,..., và trong nhiều trường hợp khi đặt ẩn phụ, ta phải tìm điều kiện đủ cho ẩn phụ. Một câu hỏi tự nhiên được đặt ra là khi nào ta cần tìm điều kiện đủ cho ẩn phụ, khi nào không? Tất cả những điều này đã làm cho nhiều HS phải lúng túng, không biết trong trường hợp nào nên sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ, và sử dụng ẩn phụ như thế nào cho đúng, cho hiệu quả. Để giúp các em có thể sử dụng tốt phương pháp đặt ẩn phụ trong giải toán về HPT, GV cũng cần tổ chức các hoạt động dạy và học để giúp HS hiểu rõ về phương pháp này.

Hoạt động 1: Củng cố và tập luyện phương pháp đặt ẩn phụ trong giải HPT.

+ GV nêu vấn đề: Đặt ẩn phụ là việc lựa chọn các biểu thức trong HPT để đặt thành các ẩn phụ mới, với mục đích và ý nghĩa làm đơn giản, làm gọn HPT. Qua đó ta thu được các HPT mới đơn giản, hay quy được về các dạng hệ quen thuộc như đối xứng, đẳng cấp,...

+ GV: Đối với các bài toán HPT thi HSG, thi tuyển sinh đại học, thường ẩn phụ không xuất hiện ngay trong HPT. Em hãy nêu một số kỹ thuật tạo ra ẩn phụ trong giải HPT?

+ HS: Suy nghĩ, trả lời câu hỏi của giáo viên.

+ GV: Các em có thể đưa ra được một hay một vài cách tạo ẩn phụ trong giải hệ, nhưng điều này không thật quan trọng, điều mà GV mong muốn là các em phải gọi được tên các kỹ thuật và đặc trưng của mỗi kỹ thuật mà các em hay làm để tạo ra ẩn phụ trong giải hệ. Sau cùng GV nhận xét câu trả lời của HS và kết luận:

Để tạo ra ẩn phụ người giải toán cần xử lý linh hoạt các PT trong hệ thông qua các kỹ thuật: Nhóm nhân tử chung, hoặc nhóm dựa vào hằng đẳng thức, hoặc dựa vào phương pháp hệ số bất định tạo ra các biểu thức giống nhau trong mỗi PT của hệ, hoặc chia các PT trong hệ theo các số hạng có sẵn trong mỗi PT, khi xét các số hạng đó khác 0 (cần xét số hạng đó bằng 0 trước khi chia, xem có thỏa mãn HPT hay không, để tránh bỏ sót nghiệm),...

+ GV: Em hãy nêu các phép đặt ẩn phụ thường sử dụng trong giải HPT?

+ HS: Suy nghĩ, dựa vào các phép đặt ẩn phụ đã học ở lớp dưới để trả lời.

+ GV: Gọi một vài em trả lời, sau đó tổng hợp các ý kiến và kết luận:

Các phép đặt ẩn phụ hay sử dụng gồm:

Đặt ẩn phụ hoàn toàn và đặt ẩn phụ không hoàn toàn (GV lấy một số ví dụ minh họa).

+) GV: Lưu ý HS: Có thể đặt một ẩn phụ, hai ẩn phụ, hoặc nhiều ẩn phụ,...

+) GV giới thiệu: Khi đặt ẩn phụ, người giải toán thường phải tìm điều kiện cho ẩn phụ. Từ thực tế giải toán, người ta rút ra những điều sau đây:

a) Với các bài toán mà ẩn phụ xem là ẩn trung gian, tìm ẩn phụ rồi trở về ẩn ban đầu thì có hai phương án tìm điều kiện :

1) Tìm đúng điều kiện cho ẩn phụ.

2) Tìm thừa điều kiện cho ẩn phụ.

Chẳng hạn: nếu đặt $u = 2^{\sin x}$, với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Khi đó: điều kiện đúng là: $\frac{1}{2} \leq u \leq 2$ (do $-1 \leq \sin x \leq 1$)

điều kiện thừa là: $u > 0$ (do hàm mũ)

Ta có thể dùng điều kiện theo phương án: “thừa” vì ta còn quay trở về tìm ẩn ban đầu. Trong trường hợp dùng điều kiện thừa, có khi ta phải giải bài toán mà chắc chắn là vô nghiệm (khi trở về tìm ẩn ban đầu).

Ví dụ nếu đặt $u = \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ với điều kiện $x > 0$

Khi đó điều kiện đúng là (theo Cô si)

$$u \geq 2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}} = \sqrt{2}, \text{ điều kiện thừa là } u > 0$$

Giả sử PT với ẩn u có hai nghiệm: $u = 1$ và $u = 2$ thỏa mãn điều kiện $u > 0$.

Khi trở về ẩn ban đầu ta phải giải PT $u = 1$, chắc chắn vô nghiệm.

+ GV: Trong trường hợp nào nên dùng điều kiện dưới dạng thừa?

+ HS: Có thể trả lời đúng hoặc chưa đúng, tùy vào năng lực cảm nhận vấn đề của từng em.

+ GV: Đó là khi mà trong công thức $u = \varphi(x)$, việc tìm miền giá trị của hàm $\varphi(x)$ quá phức tạp hay việc dùng điều kiện ở dạng thừa là sáng tạo hơn.

+ GV tiếp tục giới thiệu:

b) Với các bài toán mà ẩn phụ được dùng với tư cách là ẩn thứ 2 (bài toán không trở về với ẩn ban đầu) thì tuyệt đối phải *đặt đúng điều kiện cho ẩn phụ*.

Điều kiện cho ẩn phụ chính là miền xác định cho bài toán mới. Đây là trường hợp của các loại bài toán:

+ Dùng ẩn phụ vào việc tìm giá trị nhỏ nhất (GTNN), giá trị lớn nhất (GTLN) của hàm số.

+ Dùng ẩn phụ vào việc tính các tích phân.

+ Dùng ẩn phụ vào việc giải các bài toán có tham số.

Trong trường hợp này, nếu dùng điều kiện dưới dạng thừa là ta đã giải bài toán không chỉ trong miền xác định của nó.

+ GV: Em hãy nêu các bước thực hiện đặt ẩn phụ đối với một HPT?

+ HS: Suy nghĩ, trả lời câu hỏi. Đây là câu hỏi mở, mỗi em sẽ có cách phân chia các bước theo ý kiến chủ quan của riêng mình.

+ GV: Gọi một vài em phát biểu ý kiến, nhận xét câu trả lời của mỗi em, và đưa ra phương án của mình để các em tham khảo:

- Đặt các ẩn phụ: $a = f(x, y, z), b = g(x, y, z), c = h(x, y, z), \dots$ và buộc điều kiện cho a, b, c nếu có.

- Biến đổi HPT đã cho về HPT ẩn a, b, c, \dots rồi giải HPT để tìm nghiệm (a, b, c, \dots) thỏa mãn điều kiện trên.

- Giải HPT:
$$\begin{cases} f(x, y, z, \dots) = a \\ g(x, y, z, \dots) = b \\ h(x, y, z, \dots) = c \\ \dots \end{cases}$$
 với a, b, c, \dots vừa tìm được để tìm ra tập nghiệm của (x, y, z, \dots) .

Hoạt động 2: Vận dụng vào giải toán.

<p>Bài toán 1: Giải HPT: $\begin{cases} \frac{2xy + y\sqrt{x^2 - y^2}}{14} = \sqrt{\frac{x+y}{2}} + \sqrt{\frac{x-y}{2}} \\ \sqrt{\left(\frac{x+y}{2}\right)^3} + \sqrt{\left(\frac{x-y}{2}\right)^3} = 9 \end{cases}$</p>
--

Ở bài hệ này, hai biểu thức $\sqrt{\frac{x+y}{2}}, \sqrt{\frac{x-y}{2}}$ đồng thời xuất hiện trong cả hai phương trình của hệ, hơn nữa các biểu thức còn lại trong hệ đều biểu diễn được thông qua hai biểu thức này, đây chính là nút thắt của bài toán. Vậy chìa khóa giúp HS giải quyết bài toán là hai ẩn phụ $u = \sqrt{\frac{x+y}{2}}$ và $v = \sqrt{\frac{x-y}{2}}$.

Lời giải:

+ Điều kiện:
$$\begin{cases} x + y \geq 0 \\ x - y \geq 0 \end{cases}$$

+ Đặt $u = \sqrt{\frac{x+y}{2}}$ và $v = \sqrt{\frac{x-y}{2}}; (u, v \geq 0)$. Khi đó: $x = u^2 + v^2, y = u^2 - v^2$.

+ HPT trở thành:

$$\begin{cases} \frac{2(u^2 + v^2)(u^2 - v^2) + (u^2 - v^2)\sqrt{4u^2v^2}}{14} = u + v \\ u^3 + v^3 = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)(u^3 - v^3 - 7) = 0 \\ u^3 + v^3 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=0 \\ u^3 + v^3 = 9 \end{cases} \vee \begin{cases} u^3 - v^3 = 7 \\ u^3 + v^3 = 9 \end{cases}$$

+ Hệ $\begin{cases} u+v=0 \\ u^3 + v^3 = 9 \end{cases}$ vô nghiệm.

+ Giải hệ: $\begin{cases} u^3 - v^3 = 7 \\ u^3 + v^3 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases}$

+ Do đó: $\begin{cases} \sqrt{\frac{x+y}{2}} = 2 \\ \sqrt{\frac{x-y}{2}} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=8 \\ x-y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases}$

+ Vậy HPT đã cho có nghiệm là: (5;3)

Nhận xét: Trong bài hệ trên sự xuất hiện của hai ẩn phụ là quá rõ ràng, trong trường hợp này HS không mấy khó khăn để xác định được hướng giải cho bài toán.

Bài toán 2: Giải HPT: $\begin{cases} y^3(3x^2 - 4x - 23) + 8y = 8 & (1) \\ y^2(x^3 + 10x + 27) - 6y = 8 & (2) \end{cases}$

Quan sát HPT trên, HS có thể nhận thấy ngay ẩn phụ vẫn được giấu kín trong các PT của hệ. Do đó, ở bài hệ này, để lộ diện ẩn phụ các em phải thực hiện một số phép biến đổi như chia hai vế mỗi PT trong hệ cho một biểu thức khác 0, rồi thực hiện cộng vế theo vế hai PT thu được. Cụ thể ta có lời giải sau:

Lời giải:

+ Xét $y=0$, từ PT(1), có: $0=8$ (mâu thuẫn).

+ Xét $y \neq 0$. Khi đó hệ đã cho tương đương: $\begin{cases} 3x^2 - 4x - 23 = \frac{8}{y^3} - \frac{8}{y^2} & (a) \\ x^3 + 10x + 27 = \frac{8}{y^2} + \frac{6}{y} & (b) \end{cases}$

+ Cộng (a) và (b) theo vế ta được:

$$x^3 + 3x^2 + 6x + 4 = \frac{8}{y^3} + \frac{6}{y^2} \Leftrightarrow (x+1)^3 + 3(x+1) = \left(\frac{2}{y}\right)^3 + 3 \cdot \frac{2}{y} \quad (c)$$

+Đặt $u = x+1; v = \frac{2}{y}$ thì PT (c) trở thành:

$$u^3 - v^3 + 3u - 3v = 0$$

$$\Leftrightarrow (u-v)(u^2 + uv + v^2 + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + 3 = 0 \text{ (VN)} \end{cases} \Leftrightarrow u = v \Leftrightarrow x+1 = \frac{2}{y}$$

+ Thay vào PT(b), ta được:

$$x^3 + 10x + 27 = 2(x+1)^2 + 3(x+1)$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + 3x + 22 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x^2 - 4x + 11) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -2$$

+ Do đó: $y = -2$.

+ Vậy hệ có nghiệm duy nhất: $(-2; -2)$.

Nhận xét: Bài toán 2 là một minh họa rõ nét cho việc phải thực hiện một số phép biến đổi cơ bản như nhân chia hai vế của một PT trong hệ cho một biểu thức khác 0, hoặc cộng vế với vế hai của trình của hệ, biến đổi HPT đến tình huống thích hợp, rồi mới sử dụng được ẩn số phụ.

Bài toán 3: Giải HPT: $\begin{cases} x^2 + 3x^2y = \frac{8}{x} \\ y^3 - 1 = \frac{6}{x} \end{cases}$

Ở bài hệ này, hình thức của nó có vẻ đơn giản, nhưng lời giải giành cho nó thì không hề đơn giản chút nào, HS phải hết sức tinh tế trong phép lựa chọn ẩn phụ và phải thực hiện liên tiếp hai lần ẩn phụ mới đi đến được đáp số của bài toán.

Lời giải:

+ Điều kiện: $x \neq 0$.

+ Khi đó HPT đã cho tương đương:
$$\begin{cases} x^2 + 3x^2y = \frac{8}{x} \\ y^3 - 1 = \frac{6}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{8}{x^3} - 3y = 1 \\ y^3 - 3 \cdot \frac{2}{x} = 1 \end{cases}$$

+ Đặt $t = \frac{2}{x}$ ($t \neq 0$), ta có HPT:
$$\begin{cases} t^3 - 3y = 1 \\ y^3 - 3t = 1 \end{cases} \Rightarrow (y-t)(y^2 + yt + t^2 + 3) = 0 \Rightarrow t = y$$

+ Do đó: $y^3 - 3y = 1$ (1)

+ Đặt $y = 2\cos\alpha, (0 \leq \alpha \leq \pi)$.

+ Khi đó PT(1) trở thành:

$$8\cos^3\alpha - 6\cos\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos 3\alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \pm \frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$$

+ Chọn: $\alpha = \frac{\pi}{9}; \alpha = \frac{5\pi}{9}; \alpha = \frac{7\pi}{9} \in [0; \pi]$ ta được:
$$\begin{cases} y = 2\cos\frac{\pi}{9} \\ y = 2\cos\frac{5\pi}{9} \\ y = 2\cos\frac{7\pi}{9} \end{cases}$$

+ Vậy HPT đã cho có 3 nghiệm:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{9}} \\ y = 2\cos\frac{\pi}{9} \end{cases}; \begin{cases} x = \frac{1}{\cos\frac{5\pi}{9}} \\ y = 2\cos\frac{5\pi}{9} \end{cases}; \begin{cases} x = \frac{1}{\cos\frac{7\pi}{9}} \\ y = 2\cos\frac{7\pi}{9} \end{cases}$$

Nhận xét: Thông qua ví dụ này HS đã được củng cố và rèn luyện phương pháp đặt ẩn phụ không hoàn toàn trong giải HPT, phương pháp đặt ẩn phụ lượng giác khi phải xử lý một PT bậc 3 mà không nhằm được nghiệm hữu tỉ.

Bài toán 4: Giải HPT:
$$\begin{cases} x^2 + 2 + (y^2 - y - 1)\sqrt{x^2 + 2} - y^3 + y = 0 & (1) \\ 2x + xy + 2 + (x + 2)\sqrt{y^2 + 4x + 4} = 0 & (2) \end{cases}$$

Nhiều HPT, HS phải thực hiện biến đổi một trong hai PT của hệ về dạng tích, sau đó thực hiện phép rút thế vào PT còn lại, rồi tiến hành đặt ẩn phụ cho PT thu được. Minh chứng cho cách làm này, ta có lời giải sau cho bài hệ trên.

Lời giải:

$$+ \text{ PT (1)} \Leftrightarrow x^2 + 2 + (y^2 - y - 1)\sqrt{x^2 + 2} - y^3 + y = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2 - y\sqrt{x^2 + 2} + (y^2 - 1)\sqrt{x^2 + 2} - y(y^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2 + 2} - y)(\sqrt{x^2 + 2} + y^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{x^2 + 2} \quad (\sqrt{x^2 + 2} + y^2 - 1 > 0)$$

$$+ \text{ Thay vào (2), ta được: } 2x + x\sqrt{x^2 + 2} + 2 + (x + 2)\sqrt{x^2 + 4x + 6} = 0$$

$$\Leftrightarrow x + x\sqrt{x^2 + 2} + x + 2 + (x + 2)\sqrt{(x + 2)^2 + 2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 2) + (x + 2)\sqrt{(x + 2)^2 + 2} = (-x) + (-x)\sqrt{(-x)^2 + 2} \quad (3)$$

+ Đặt $u = x + 2$ và $v = -x$. Ta có $u + v = 2$.

$$+ \text{ Khi đó PT (3): } u + u\sqrt{u^2 + 2} = v + v\sqrt{v^2 + 2} \Leftrightarrow u - v + u\sqrt{u^2 + 2} - v\sqrt{v^2 + 2} = 0 \quad (4)$$

$$+ \text{ Xét } u\sqrt{u^2 + 2} + v\sqrt{v^2 + 2} = 0 \Leftrightarrow u\sqrt{u^2 + 2} = -v\sqrt{v^2 + 2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} uv \leq 0 \\ u^4 - v^4 + 2(u^2 - v^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv \leq 0 \\ (u^2 - v^2)(u^2 + v^2 + 2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u + v = 0 \\ u - v = 0 \end{cases}$$

+ Với $u - v = 0 \Leftrightarrow u = v \Rightarrow u^2 \leq 0 \Rightarrow u = v = 0 \Rightarrow x + 2 = -x = 0$ (mâu thuẫn).

+ Với $u + v = 0 \Leftrightarrow u = -v \Rightarrow -u^2 \leq 0 \Leftrightarrow u^2 \geq 0$, đúng $\forall u$.

+ Suy ra: $x + y = 0 \Rightarrow -x \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow y = \sqrt{3}$ (TM).

+ Xét $u\sqrt{u^2 + 2} + v\sqrt{v^2 + 2} \neq 0$.

+ Khi đó PT (4) tương đương:

$$u - v + \frac{u^4 - v^4 + 2(u^2 - v^2)}{u\sqrt{u^2 + 2} + v\sqrt{v^2 + 2}} = 0 \Leftrightarrow (u - v) \left[1 + \frac{(u + v)(u^2 + v^2 + 4)}{u\sqrt{u^2 + 2} + v\sqrt{v^2 + 2}} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ 1 + \frac{(u + v)(u^2 + v^2 + 4)}{u\sqrt{u^2 + 2} + v\sqrt{v^2 + 2}} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$+ \text{ Ta có: } 0 < \left| u\sqrt{u^2 + 2} + v\sqrt{v^2 + 2} \right| \leq \sqrt{u^2 + v^2} \cdot \sqrt{u^2 + v^2 + 4} \leq \frac{2u^2 + 2v^2 + 4}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2u^2 + 2v^2 + 4}{u\sqrt{u^2 + 2} + v\sqrt{v^2 + 2}} \geq 2 \Rightarrow 1 + \frac{2u^2 + 2v^2 + 4}{u\sqrt{u^2 + 2} + v\sqrt{v^2 + 2}} \neq 0.$$

+ Suy ra PT (5) vô nghiệm.

+ Với $u = v \Rightarrow x + 2 = -x \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow y = \sqrt{3}$ (TM).

+ Vậy HPT đã cho có nghiệm duy nhất: $(-1; \sqrt{3})$.

2. Thêm một ví dụ cho biện pháp 2: Tập luyện cho HS thói quen không suy nghĩ cứng nhắc theo những quy tắc đã học, không máy móc áp dụng những mô hình đã gặp để ứng xử linh hoạt trước những tình huống mới.

Ví dụ 3: Dạy học giải HPT: $\begin{cases} x = \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2 + y}}} \\ y = \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2 + x}}} \end{cases}$
--

Quan sát HPT trên, nhiều HS sẽ nghĩ ngay đến phương pháp bình phương hai vế, hoặc sử dụng hai ẩn phụ, để giảm bớt dấu căn, hoặc sử dụng cách giải của HPT đối xứng loại hai là trừ vế với vế hai PT của hệ, rồi thực hiện nhân liên hợp. Nhưng với các ý tưởng quen thuộc đó, lời giải của bài toán sẽ đi vào ngõ cụt hoặc nếu có giải được thì cũng rất dài dòng và phức tạp về mặt biến đổi tính toán. GV có thể định hướng giúp HS xác định được phương pháp giải cho HPT trên là sử dụng phương pháp đánh giá bất đẳng thức kết hợp với phương pháp lượng giác hóa.

Từ đó HS có thể đưa ra được lời giải sau:

+ Điều kiện để HPT có nghiệm là:
$$\begin{cases} x, y \geq 0 \\ \sqrt{x+2} \leq 2, \sqrt{y+2} \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

+ Nếu $x > y$, ta có: $x - y = \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2 + y}}} - \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2 + x}}} < 0$ (mâu thuẫn)

+ Nếu $x < y$, ta có: $x - y = \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2 + y}}} - \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2 + x}}} > 0$ (mâu thuẫn)

+ Nếu $x = y \Leftrightarrow x = \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2 + x}}}$.

+ Đặt $x = 2\cos t, t \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Khi đó phương trình trở thành :

$$2\cos t = \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \cos t}}} \Leftrightarrow 2\cos t = \sqrt{2 + \sqrt{2 - 2\cos \frac{t}{2}}}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos t = \sqrt{2 + 2\sin \frac{t}{4}} \Leftrightarrow 2\cos t = \sqrt{2 \left(1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{4} \right) \right)}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos t = 2\cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{8} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{4} - \frac{t}{8} + k2\pi \\ t = -\frac{\pi}{4} + \frac{t}{8} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{2\pi}{9} + k\frac{16\pi}{9} \\ t = -\frac{2\pi}{7} + k\frac{16\pi}{7} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$$+ \forall t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \Rightarrow t \in \left\{ \frac{2\pi}{9}, -\frac{2\pi}{7} \right\} \Rightarrow (x, y) \in \left\{ \left(2\cos \frac{2\pi}{7}; 2\cos \frac{2\pi}{7} \right); \left(2\cos \frac{2\pi}{9}; 2\cos \frac{2\pi}{9} \right) \right\}$$

$$+ \text{Vậy HPT đã cho có hai nghiệm: } \left(2\cos \frac{2\pi}{7}; 2\cos \frac{2\pi}{7} \right), \left(2\cos \frac{2\pi}{9}; 2\cos \frac{2\pi}{9} \right).$$

3. Thêm hai ví dụ cho biện pháp 3: Hướng dẫn và luyện tập cho HS khả năng nhìn bài toán giải HPT dưới nhiều góc độ khác nhau để có thể tìm được nhiều cách giải khác nhau.

Ví dụ 3: Trong giờ học BDHSG, GV đưa ra bài toán sau:

Bài toán: Cho HPT: $\begin{cases} (1-y)\sqrt{x-y} + x = 2 + (x-y-1)\sqrt{y} & (1) \\ 2y^2 - 3x + 6y + 1 = 2\sqrt{x-2y} - \sqrt{4x-5y-3} & (2) \end{cases}$

+ GV: Các em hãy tìm nhanh lời giải bài toán trên. Bạn nào tìm được một lời giải trước thì xung phong lên bảng giải trước. Các bạn còn lại tìm cách giải khác, và bạn nào tìm được cách giải khác với cách của bạn trên bảng thì lại được xung phong lên bảng trình bày. Cứ như thế, người lên sau phải trình bày được cách giải khác với cách giải trên bảng. Bạn nào trình bày được nhiều cách giải trên bảng nhất và có lời giải chính xác, độc đáo nhất sẽ là người thắng cuộc.

+ GV: Làm trọng tài điều khiển “cuộc thi”.

+ GV: Kết luận và khen thưởng sau khi “cuộc thi” kết thúc.

+ GV: Dự kiến các cách giải của bài toán:

$$+ \text{Điều kiện: } \begin{cases} y \geq 0 \\ x \geq 2y \\ 4x \geq 5y + 3 \end{cases}$$

+) **Cách 1:** Ta có:

$$+ PT(1) \Leftrightarrow (1-y)(\sqrt{x-y}-1) + (x-y-1)(1-\sqrt{y}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-y)(x-y-1) \left(\frac{1}{\sqrt{x-y}+1} + \frac{1}{1+\sqrt{y}} \right) = 0 \quad (3)$$

$$+ \text{Do } \frac{1}{\sqrt{x-y}+1} + \frac{1}{1+\sqrt{y}} > 0 \text{ nên } (3) \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ y=x-1 \end{cases}$$

$$+ \text{Với } y=1, PT(2) \text{ trở thành: } 9-3x=0 \Leftrightarrow x=3 \text{ (TM)}$$

$$+ \text{Với } y=x-1, \text{ điều kiện } (*) \text{ trở thành: } 1 \leq x \leq 2.$$

+ PT (2) trở thành:

$$2x^2 - x - 3 = \sqrt{2-x} \Leftrightarrow 2(x^2 - x - 1) + (x-1-\sqrt{2-x}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x - 1) \left(2 + \frac{1}{x-1-\sqrt{2-x}} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 1 = 0 \\ 2 + \frac{1}{x-1-\sqrt{2-x}} = 0 \end{cases}$$

$$+ \text{Với } x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad (\text{TM}) \\ x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad (\text{KTM}) \end{cases}$$

$$+ \text{Với } 2 + \frac{1}{x-1-\sqrt{2-x}} = 0.$$

$$+ \text{Do } 2 + \frac{1}{x-1-\sqrt{2-x}} > 0, \forall x \in [1; 2] \text{ nên PT này vô nghiệm.}$$

$$+ \text{Kết luận: Hệ có hai nghiệm: } (3; 1), \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right).$$

+) **Cách 2:**

$$+ PT(1) \Leftrightarrow (1-y)(\sqrt{x-y}-1) + (x-y)-1 = (x-y-1)\sqrt{y}$$

$$\Leftrightarrow (x-y-1)(1-\sqrt{y}) + (1-y)(\sqrt{x-y}-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\sqrt{y}) \left[x-y-1 + (\sqrt{y}+1)(\sqrt{x-y}-1) \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\sqrt{y})(\sqrt{x-y}-1) \left[\sqrt{x-y}+1+\sqrt{y}+1 \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-\sqrt{y}=0 \\ \sqrt{x-y}-1=0 \end{cases} \left(\sqrt{x-y}+1+\sqrt{y}+1>0, \forall y \geq 0, x-y \geq 0 \right)$$

+ Ta xét hai trường hợp:

+ Nếu $1-\sqrt{y}=0 \Leftrightarrow y=1$, từ (2) suy ra: $-3x+9=0 \Leftrightarrow x=3$.

+ Nếu $\sqrt{x-y}-1=0 \Leftrightarrow x=y+1$, từ (2) suy ra: $2y^2+3y-2=\sqrt{1-y}$ (3)

+ PT (3) $\Leftrightarrow 16y^2+8y+1=16(1-y)+8\sqrt{1-y}+1$

$$\Leftrightarrow (4y+1)^2 = (4\sqrt{1-y}+1)^2$$

$$\Leftrightarrow 4y+1=4\sqrt{1-y}+1 \Leftrightarrow y=\sqrt{1-y} \Leftrightarrow y^2+y-1=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ (TM)} \\ y=\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ (KTM)} \end{cases}$$

+ Kết luận: Hệ có hai nghiệm: $(3;1), \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$

+) **Cách 3**: Đặt $\begin{cases} \sqrt{x-y}=a, a \geq 0 \\ \sqrt{y}=b, b \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=a^2 \\ y=b^2 \end{cases}$

+ PT thứ nhất của hệ thành: $(1-b^2)a+a^2+b^2=2+(a^2-1)b$

$$\Leftrightarrow (a-1)(b-1)(a+b+2)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ a+b+2=0 \text{ (VN)} \end{cases}$$

+ Với $a=1 \Rightarrow x=y+1$, thay vào PT thứ hai được: $2y^2+3y-2=\sqrt{1-y}$

$$\Leftrightarrow 2(1-y)^2-7(1-y)+3=\sqrt{1-y}$$

+ Điều kiện: $y \leq 1$.

+ Đặt $t=\sqrt{1-y}, (t \geq 0)$. Khi đó ta có: $y=1-t^2$.

$$+ \text{Ta được PT: } 2t^4 - 7t^2 - t + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ t = \frac{1+\sqrt{7}}{2} \end{cases}$$

$$+ \text{Với } t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ (TM)}$$

$$+ \text{Với } t = \frac{1+\sqrt{7}}{2} \Rightarrow y = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ (KTM) do } y \geq 0.$$

$$+ \text{Với } b=1 \Rightarrow y=1. \text{ Thay vào (2) được: } x=3 \text{ (TM)}$$

$$+ \text{Kết luận: Hệ có hai nghiệm: } (3;1), \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right).$$

+) **Cách 4:** PT thứ nhất của hệ tương đương:

$$(1-y)\sqrt{x-y} + (x-y-1) + (y-1) - (x-y-1)\sqrt{y} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-y)(\sqrt{x-y}-1) + (x-y-1)(1-\sqrt{y}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-y)(x-y-1)}{\sqrt{x-y}+1} + \frac{(x-y-1)(1-y)}{1+\sqrt{y}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-y)(x-y-1) \left[\frac{1}{\sqrt{x-y}+1} + \frac{1}{1+\sqrt{y}} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-y)(x-y-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-y=0 \\ x-y-1=0 \end{cases}$$

$$+ \text{Với } y=1 \text{ thay vào (2) được: } x=3 \text{ (TM).}$$

$$+ \text{Với } x=y+1 \text{ thay vào (2) ta được: } 2y^2 + 3y - 2 = \sqrt{1-y} \text{ (*)}$$

$$+ \text{Điều kiện: } 0 \leq y \leq 1.$$

$$+ \text{PT(*)} \Leftrightarrow 2(1-y) - 2y\sqrt{1-y} + (2y+1)\sqrt{1-y} - y(2y+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{1-y}(\sqrt{1-y}-y) + (2y+1)(\sqrt{1-y}-y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sqrt{1-y} + 2y + 1)(\sqrt{1-y} - y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{1-y} + 2y + 1 = 0 \\ \sqrt{1-y} - y \end{cases}$$

+ Với $2\sqrt{1-y}+2y+1=0$.

+ Do $2\sqrt{1-y}+2y+1>0, \forall y \in [0;1]$ nên PT này vô nghiệm.

+ Với $\sqrt{1-y}-y=0 \Leftrightarrow \sqrt{1-y}=y$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2+y-1=0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ (TM)}$$

+ Kết luận: Hệ có hai nghiệm: $(3;1), \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

+) **Cách 5**: Làm tương tự như các cách giải trên ta đến được PT:

$$2y^2+3y-2=\sqrt{1-y}$$

$$\Leftrightarrow 2y^2+y=2-2y+\sqrt{1-y}$$

$$2y^2+y=2(\sqrt{1-y})^2+\sqrt{1-y} \text{ (**)}$$

+ Xét hàm số: $f(t)=2t^2+t, t \geq 0$

+ Đạo hàm: $f'(t)=4t+1>0, \forall t \geq 0$ nên $f(t)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$

+ Khi đó PT (**) $\Leftrightarrow f(y)=f(\sqrt{1-y}) \Leftrightarrow y=\sqrt{1-y}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2+y-1=0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ (TM)}$$

+) **Cách 6**: Làm tương tự như các cách 1 giải trên ta đến được PT:

$2x^2-x-3=\sqrt{2-x}$ (*). Điều kiện: $x \leq 2$. Đặt $t=\sqrt{2-x}, t \geq 0$, ta có: $x=3-t^2$.

+ Khi đó PT (*) trở thành: $2(2-t^2)^2-(2-t^2)-3=t$

$$\Leftrightarrow 2t^4-7t^2-t+3=0 \Leftrightarrow (2t^2-2t-3)(t^2+t-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2t^2-2t-3=0 \\ t^2+t-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2} \\ t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

+ So điều kiện $t \geq 0$ ta được: $t = \frac{1+\sqrt{7}}{2}$ và $t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

$$+ \text{ Với } t = \frac{1+\sqrt{7}}{2} \Rightarrow y = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ (KTM) do } y \geq 0.$$

$$+ \text{ Với } t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ (TM)}$$

Nhận xét: Với cách thức tổ chức dạy và học như trên GV đã rèn luyện cho HS khả năng phát hiện nhanh vấn đề, đồng thời đề xuất được nhiều cách giải quyết vấn đề thông qua việc tìm nhanh cách giải và tìm được nhiều cách giải cho một bài toán.

Ví dụ 4: GV yêu cầu HS giải bài toán sau bằng nhiều cách:

Tìm giá trị thực của m để HPT
$$\begin{cases} 2x^3 - (y+2)x^2 + xy = m & (1) \\ x^2 + x - y = 1 - 2m & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$
 có nghiệm thực.

Bài toán tìm giá trị của tham số m để HPT có nghiệm thường được giải bằng phương pháp quy về bài toán tìm giá trị của tham số m để phương trình có nghiệm trên một miền nào đó. Miền nào đó ở đây được hiểu là miền điều kiện đúng của các ẩn trong hệ nếu ta sử dụng phép thế để quy HPT về PT, hoặc là miền điều kiện đúng cho ẩn phụ, nếu ta dùng ẩn phụ để quy HPT về PT.

Với bài toán này đòi hỏi HS phải có sự nhuần nhuyễn và linh hoạt trong việc phối hợp và sử dụng nhiều mảng kiến thức, nhiều phương pháp giải khác nhau thì mới có thể đưa ra được nhiều lời giải chính xác cho bài toán. Các em có thể đề xuất được một số cách giải sau:

+) Cách 1:

+ Nhân 2 vế của (1) với 2, rồi cộng với (1) ta được PT:

$$4x^3 - (2y+4)x^2 + 2xy + x^2 + x - y = 1 \Rightarrow y = 2x + \frac{1}{2} - \frac{3}{2(2x^2 - 2x + 1)} \quad (3)$$

$$+ \text{ Từ (2) và (3) suy ra: } 2m = y + 1 - x^2 - x = -x^2 + x + \frac{1}{2} - \frac{3}{2(2x^2 - 2x + 1)} \quad (4)$$

$$+ \text{ Đặt } t = 2x^2 - 2x + 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$$

$$+ \text{ Khi đó (4) trở thành: } 2m = -\frac{1}{2}t + 1 - \frac{3}{2t} = 1 - \frac{1}{2}\left(t + \frac{3}{t}\right)$$

+ Xét hàm số $f(t) = t + \frac{3}{t}$ trên nửa khoảng $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

+ Ta có: $f'(t) = 1 - \frac{3}{t^2}$, trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$: $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{3}$

+ Lập bảng biến thiên, suy ra:

$$f(t) \geq 2\sqrt{3} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2}\left(t + \frac{3}{t}\right) \leq 1 - \sqrt{3} \text{ hay } m \leq \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$$

Chú ý: Ta có thể sử dụng BDT Cô Si để tìm miền giá trị của $f(t)$ trên $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$. Áp dụng BDT Cô si ta có: $t + \frac{3}{t} \geq 2\sqrt{t \cdot \frac{3}{t}}$

$$\text{Hay } 1 - \frac{1}{2}\left(t + \frac{3}{t}\right) \leq 1 - \sqrt{3} \Rightarrow m \leq \frac{1 - \sqrt{3}}{2}.$$

+) **Cách 2:** HPT đã cho viết lại:
$$\begin{cases} (x^2 - x)(2x - y) = m & (3) \\ (x^2 - x) + (2x - y) = 1 - 2m & (4) \end{cases}$$

+ Đặt $\begin{cases} u = x^2 - x \left(u \geq -\frac{1}{4}\right) \\ v = 2x - y \left(v \in \mathbb{R}\right) \end{cases}$. Hệ đã cho trở thành:
$$\begin{cases} u + v = 1 - 2m \\ uv = m, \left(u \geq -\frac{1}{4}\right) \end{cases} (*)$$

+ Hệ (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} v = 1 - 2m - u \\ -u^2 + u = m(2u + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 1 - 2m - u \\ \frac{-u^2 + u}{2u + 1} = m \end{cases} (3)$

+ Đặt $f(u) = \frac{-u^2 + u}{2u + 1}$, $u \geq -\frac{1}{4}$.

+ Ta có: $f'(u) = \frac{-2u^2 - 2u + 1}{(2u + 1)^2}$, $\forall u \in \left(-\frac{1}{4}; +\infty\right)$: $f'(u) = 0 \Rightarrow u = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$

+ Từ bảng biến thiên suy ra:

+ HPT có nghiệm khi (3) có nghiệm thuộc $\left[-\frac{1}{4}; +\infty\right) \Leftrightarrow m \leq \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$.

Chú ý: Bài toán quy về tìm tham số thực m để PT: $-u^2 + u = m(2u + 1)$ có nghiệm $u \geq -\frac{1}{4}$.

+) **Cách 3:** Từ PT (2): $y = x^2 + x + 2m - 1$ (4).

+ Khi đó thay (4) vào (1), biến đổi và rút gọn ta được:

$$-x^4 + 2x^3 = m(2x^2 - 2x + 1)$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{x(x-1)[1-x(x-1)]}{2x^2 - 2x + 1} \quad (5)$$

+ Đặt $t = x(x-1) = x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}$.

+ Khi đó PT (5) viết lại: $m = \frac{t(1-t)}{2t+1} = 1 - \frac{1}{4} \left(2t+1 + \frac{3}{2t+1}\right)$

+ Xét hàm số $g(t) = 1 - \frac{1}{4} \left(2t+1 + \frac{3}{2t+1}\right)$ trên nửa khoảng $\left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$, ta cũng thu được kết quả: $m \leq \frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

Chú ý: Hàm số $g(t)$ xác định và liên tục trên nửa khoảng $\left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$

và $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = -\infty$ nên để PT trên có nghiệm thực (tức là có nghiệm thực x) thì phải có $m \leq \max_{t \in \left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)} g(t)$.

4. Thêm một ví dụ cho biện pháp 5: Tổ chức những tình huống để rèn luyện cho HS thói quen, kỹ năng phê phán, tìm ra sai lầm, chưa hợp lý trong lời giải các HPT, từ đó tìm ra lời giải tối ưu.

Ví dụ 3: GV yêu cầu HS: Tìm sai lầm trong lời giải các HPT dưới đây, chỉ ra nguyên nhân sai lầm, đồng thời nêu cách khắc phục các sai lầm đó:

Bài 1: Giải HPT: $\begin{cases} 5x^2y - 4xy^2 + 3y^3 - 2(x+y) = 0 & (1) \\ xy(x^2 + y^2) + 2 = (x+y)^2 & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$
--

Lời giải:

+ Ta có: (2) $\Leftrightarrow xy(x^2 + y^2) + 2 = x^2 + y^2 + 2xy$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2)(xy - 1) = 2(xy - 1) \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2 \quad (4)$$

+ Với $x^2 + y^2 = 2$ thế vào (1) được:

$$5x^2y - 4xy^2 + 3y^3 - (x^2 + y^2)(x + y) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 4x^2y + 5xy^2 - 2y^3 = 0 \quad (5)$$

+ Xét $y = 0$, từ (3) có: $x = 0$. Thay $x = y = 0$ vào hệ đã cho không thỏa mãn.

+ Xét $y \neq 0$. Khi đó PT (5) $\Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^3 - 4\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 5\left(\frac{x}{y}\right) - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = 2 \\ \frac{x}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ x = y \end{cases}$

+ Với $x = y$ thay vào $x^2 + y^2 = 2$ ta được $x = y = \pm 1$.

+ Với $x = 2y$ thay vào $x^2 + y^2 = 2$ ta được: $y = \pm\sqrt{\frac{2}{5}} \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{\frac{2}{5}}$.

+ Kết luận: Hệ có 4 nghiệm: $(-1; -1), (1; 1), \left(2\sqrt{\frac{2}{5}}; \sqrt{\frac{2}{5}}\right), \left(-2\sqrt{\frac{2}{5}}; -\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$.

Bài 2: Giải HPT $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt[4]{x-1} - \sqrt{y^4+2} = y & (1) \\ x^2 + 2x(y-1) + y^2 - 6y + 1 = 0 & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$
--

Lời giải:

+ Điều kiện: $x \geq 1$.

+ Ta có (2) tương đương:

$$x^2 + 2x(y-1) + (y-1)^2 = 4y \Leftrightarrow [x + (y-1)]^2 = 4y \quad (3)$$

+ Từ (3) suy ra $(x; y)$ là nghiệm của hệ thì $y \geq 0$.

+ Ta có : PT (1) $\Leftrightarrow (\sqrt{x+1} - \sqrt{y^4+2}) + (\sqrt[4]{x-1} - y) = 0 \quad (4)$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1-(y^4+2)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y^4+2}} + \frac{\sqrt{x-1}-y^2}{\sqrt[4]{x-1}+y} = 0 \quad (5)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-y^4-1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y^4+2}} + \frac{x-y^4-1}{(\sqrt[4]{x-1}+y)(\sqrt{x-1}+y^2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y^4-1=0 \end{cases} \quad (6)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y^4+2}} + \frac{1}{(\sqrt[4]{x-1}+y)(\sqrt{x-1}+y^2)} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

+ Do $\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y^4+2}} + \frac{1}{(\sqrt[4]{x-1}+y)(\sqrt{x-1}+y^2)} > 0$ nên (7) vô nghiệm.

+ Từ (6) có: $x = y^4 + 1$ thay vào (3), ta được:

$$\begin{aligned} [y^4 + 1 + (y-1)]^2 &= 4y \Leftrightarrow (y^4 + y)^2 = 4y \\ \Leftrightarrow y^8 + 2y^5 + y^2 - 4y &= 0 \Leftrightarrow y(y^7 + 2y^4 + y - 4) = 0 \\ \Leftrightarrow y(y-1)(y^6 + y^5 + y^4 + 3y^3 + 3y^2 + 3y + 4) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y(y-1) = 0 & (8) \\ y^6 + y^5 + y^4 + 3y^3 + 3y^2 + 3y + 4 = 0 & (9) \end{cases} \end{aligned}$$

+ Với $y \geq 0$ thì $y^6 + y^5 + y^4 + 3y^3 + 3y^2 + 3y + 4 > 0$ nên PT (9) vô nghiệm.

+ Với $y(y-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \Rightarrow x = 1 \\ y = 1 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$ (TM)

+ Vậy hệ có hai nghiệm: $(1;0), (2;1)$.

Bài 3: Giải HPT $\begin{cases} x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} \\ 2y = x^3 + 1 \end{cases}$

Lời giải: Điều kiện: $x \neq 0, y \neq 0$.

+ Xét hàm số $f(t) = t - \frac{1}{t}$. Có $f'(t) = 1 + \frac{1}{t^2} > 0, \forall t \neq 0$.

+ Mà PT (1) có dạng $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.

+ Với $x = y$ ta có hệ: $\begin{cases} x = y \\ 2y = x^3 + 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2x = x^3 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ (x-1)(x^2 + x - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ x = y = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ x = y = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \quad (\text{TM})$$

+ Kết luận: Hệ có 3 nghiệm: $(1;1), \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right), \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Bài 4: Tìm m để HPT sau có nghiệm: $\begin{cases} \sqrt{3-x} + \sqrt{y-2} = 4 \\ y - x = m \end{cases}$
--

Lời giải:

+ Điều kiện:
$$\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ y-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ y \geq 2 \end{cases}$$

+ HPT $\Leftrightarrow \begin{cases} y-x+1+2\sqrt{(3-x)(y-2)}=16 \\ y-x=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{(3-x)(y-2)}=15-m \\ y-x=m \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 15-m \geq 0 \\ 4(3y-6-xy+2x)=(15-m)^2 \\ y-x=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 15 \\ 12y-24-4xy+8x=225-30m+m^2 \\ y=x+m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 15 & (1) \\ 4x^2-4(5-m)x+m^2-42m+249=0 & (2) \\ y=x+m & (3) \end{cases}$$

+ HPT đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow PT(2)$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta'_x \geq 0 \Leftrightarrow [-2(5-m)]^2 - 4(m^2 - 42m + 249) \geq 0 \Leftrightarrow 128m \geq 896 \Leftrightarrow m \geq 7.$$

+ So điều kiện (1), ta được: $7 \leq m \leq 15$.

+ Kết luận: Với $7 \leq m \leq 15$ thì HPT đã cho có nghiệm.

GV thực hiện chia lớp hoạt động theo nhóm như sau:

+ Chia lớp thành 4 nhóm.

+ Yêu cầu mỗi nhóm thực hiện các nhiệm vụ sau:

+ Mỗi HS trong nhóm độc lập suy nghĩ để có câu trả lời của riêng mình.

+ Các thành viên trong nhóm thảo luận, tổng hợp ý kiến.

+ GV gọi các nhóm trình bày kết quả của nhóm mình (gọi thành viên bất kỳ của nhóm): Chỉ ra sai lầm và cách khắc phục sai lầm.

+ GV đánh giá kết quả của các nhóm dựa trên tiêu chí: Chỉ ra được mỗi sai lầm được 1 điểm, khắc phục được sai lầm được 1 điểm.

+ GV kết luận vấn đề sau khi các nhóm thảo luận.

Bài 1: Lời giải sai vì phạm sai lầm trong phép biến đổi tương đương từ PT (3) sang PT (4).

Nguyên nhân sai lầm:

Phép biến đổi chia hai vế của PT (3) cho biểu thức $xy - 1$, để nhận được PT (4) chỉ tương đương và có nghĩa khi biểu thức $xy - 1$ khác 0. Trong lời giải trên, thực hiện phép chia như thế đã mặc nhiên thừa nhận biểu thức $xy - 1$ đã khác 0 rồi! Trên thực tế biểu thức này chưa chắc đã khác không. Muốn thực hiện phép chia ta phải xét các trường hợp $xy - 1$ bằng 0 và $xy - 1$ khác 0 rồi mới chia để tránh làm mất nghiệm của hệ.

Trong nhiều trường hợp phép biến đổi, thực hiện (chia thô bạo) như trong lời giải trên sẽ làm mất nghiệm của bài toán.

Lời giải đúng:

+ Ta có: $(2) \Leftrightarrow xy(x^2 + y^2) + 2 = x^2 + y^2 + 2xy$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2)(xy - 1) = 2(xy - 1)$$

$$\Leftrightarrow (xy - 1)(x^2 + y^2 - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = 1 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

+ Với $xy = 1$, từ (1) suy ra: $y^4 - 2y^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow y = \pm 1$.

+ Suy ra: $(x; y) = (-1; -1)$ hoặc $(x; y) = (1; 1)$

+ Với $x^2 + y^2 = 2$ thế vào (1) được: $5x^2y - 4xy^2 + 3y^3 - (x^2 + y^2)(x + y) = 0$

$$\Leftrightarrow x^3 - 4x^2y + 5xy^2 - 2y^3 = 0 \quad (5)$$

+ Xét $y = 0$, từ (3) có: $x = 0$.

+ Thay $x = y = 0$ vào hệ đã cho không thỏa mãn.

+ Xét $y \neq 0$. Khi đó PT (5) $\Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^3 - 4\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 5\left(\frac{x}{y}\right) - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = 2 \\ \frac{x}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ x = y \end{cases}$$

+ Với $x = y$ thay vào $x^2 + y^2 = 2$, ta được $x = y = \pm 1$.

+ Với $x = 2y$ thay vào $x^2 + y^2 = 2$, ta được: $y = \pm\sqrt{\frac{2}{5}} \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{\frac{2}{5}}$.

+ Kết luận: Hệ có 4 nghiệm: $(-1; -1), (1; 1), \left(2\sqrt{\frac{2}{5}}; \sqrt{\frac{2}{5}}\right), \left(-2\sqrt{\frac{2}{5}}; -\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$.

Bài 2:

Lời giải sai vì mắc sai lầm trong phép biến đổi từ PT (4) sang PT (5).

Nguyên nhân sai lầm:

Phép nhân liên hợp biểu thức $\sqrt[4]{x-1} - y$ với biểu thức liên hợp của nó là $\sqrt[4]{x-1} + y$ được thực hiện khi chưa có điều kiện biểu thức mang nhân $\sqrt[4]{x-1} + y$ khác 0.

Lời giải đúng:

+ Điều kiện: $x \geq 1$.

+ Ta có (2) tương đương:

$$x^2 + 2x(y-1) + (y-1)^2 = 4y \Leftrightarrow [x + (y-1)]^2 = 4y \quad (3)$$

+ Từ (3) suy ra $(x; y)$ là nghiệm của hệ thì $y \geq 0$.

+ Nếu $\sqrt[4]{x-1} + y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$ thỏa mãn hệ đã cho.

+ Nếu $\sqrt[4]{x-1} + y \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ y \neq 0 \end{cases}$. Khi đó ta có:

$$+ \text{ PT (1)} \Leftrightarrow (\sqrt{x+1} - \sqrt{y^4+2}) + (\sqrt[4]{x-1} - y) = 0 \quad (4)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1-(y^4+2)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{y^4+2}} + \frac{\sqrt{x-1}-y^2}{\sqrt[4]{x-1}+y} = 0 \quad (5)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-y^4-1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{y^4+2}} + \frac{x-y^4-1}{(\sqrt[4]{x-1}+y)(\sqrt{x-1}+y^2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y^4-1=0 \\ \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{y^4+2}} + \frac{1}{(\sqrt[4]{x-1}+y)(\sqrt{x-1}+y^2)} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

+ Do $\frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{y^4+2}} + \frac{1}{(\sqrt[4]{x-1}+y)(\sqrt{x-1}+y^2)} > 0$ nên (7) vô nghiệm.

+ Từ (6) có: $x = y^4 + 1$ thay vào (3), ta được:

$$[y^4 + 1 + (y-1)]^2 = 4y \Leftrightarrow (y^4 + y)^2 = 4y$$

$$\Leftrightarrow y^8 + 2y^5 + y^2 - 4y = 0 \Leftrightarrow y(y^7 + 2y^4 + y - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow y(y-1)(y^6 + y^5 + y^4 + 3y^3 + 3y^2 + 3y + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y(y-1) = 0 & (8) \\ y^6 + y^5 + y^4 + 3y^3 + 3y^2 + 3y + 4 = 0 & (9) \end{cases}$$

+ Với $y \geq 0$ thì $y^6 + y^5 + y^4 + 3y^3 + 3y^2 + 3y + 4 > 0$ nên PT (9) vô nghiệm.

$$+ \text{ Với } y(y-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

+ Khi $y = 0$, ta có $x = 1$ (KTM)

+ Khi $y = 1$, ta có: $x = 2$ (TM).

+ Vậy hệ có hai nghiệm: $(1;0), (2;1)$.

Bài 3. Lời giải trên vì sai PT $x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y}$ xảy ra không chỉ khi $x = y$ mà còn xảy ra

khi $x = -\frac{1}{y}$.

Nguyên nhân của sai lầm: Vì hàm số $f(t) = t - \frac{1}{t}$ không liên tục trên \mathbb{R} .

Lời giải đúng: Điều kiện: $xy \neq 0$.

$$+ \text{ Ta có: } (1) \Leftrightarrow (x-y)\left(1 + \frac{1}{xy}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ xy = -1 \end{cases}$$

$$+ \text{ TH1: } \begin{cases} x = y \\ 2y = x^3 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2x = x^3 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ (x-1)(x^2 + x - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ x = y = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ x = y = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$+ \text{ TH2: } \begin{cases} xy = -1 \\ 2y = x^3 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{x} \\ -\frac{2}{x} = x^3 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{x} \\ x^4 + x + 2 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

+ Ta chứng minh PT (4) vô nghiệm:

Ta có: $x^4 + x + 2 = \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó PT (4) vô nghiệm.

+ Kết luận: Hệ có 3 nghiệm: $(1;1), \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right), \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Bài 4: Lời giải trên sai do đã vướng phải sai lầm trong phép biến đổi:

+ HPT đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow PT(2)$ có nghiệm.

Nguyên nhân sai lầm: Xác định chưa chặt và đúng miền nghiệm mà PT (2) phải thỏa mãn.

Lời giải đúng:

$$+ \text{Điều kiện: } \begin{cases} 3-x \geq 0 \\ y-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ y \geq 2 \end{cases}$$

$$+ \text{HPT} \Leftrightarrow \begin{cases} y-x+1+2\sqrt{(3-x)(y-2)}=16 \\ y-x=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{(3-x)(y-2)}=15-m \\ y-x=m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 15-m \geq 0 \\ 4(3y-6-xy+2x)=(15-m)^2 \\ y-x=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 15 \\ 12y-24-4xy+8x=225-30m+m^2 \\ y=x+m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 15 & (1) \\ 4x^2-4(5-m)x+m^2-42m+249=0 & (2) \\ y=x+m & (3) \end{cases}$$

+ HPT đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow PT(2)$ có nghiệm $x \leq 3$.

+ TH1: PT (2) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1 \leq 3 \leq x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_x \geq 0 \\ (x_1-3)(x_2-3) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 7 \\ (m-15)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m=15.$$

+ TH2: PT (2) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1 \leq x_2 \leq 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_x \geq 0 \\ x_1+x_2 \leq 6 \\ (x_1-3)(x_2-3) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 7 \\ m \geq -1 \\ (m-15)^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 7$$

+ Kết hợp hai trường hợp và so điều kiện (1), ta được: $7 \leq m \leq 15$.

+ Kết luận: Với $7 \leq m \leq 15$ thì HPT đã cho có nghiệm.

Nhận xét: Qua việc tổ chức những tình huống trong hoạt động dạy và học ở trên HS đã được rèn luyện thói quen, kỹ năng phê phán, tìm ra sai lầm, chưa hợp lý trong lời giải các HPT, từ đó tìm ra được lời giải đúng và lời giải tối ưu cho bài toán.

PHỤ LỤC 2

BỔ SUNG THÊM MỘT SỐ VÍ DỤ VÀ CÁC CÁCH XÂY DỰNG HPT CHO BIỆN PHÁP 6 CỦA CHƯƠNG 2 - XÂY DỰNG CÁC BÀI TOÁN HPT NHẪM PHÁT TRIỂN TDST CHO HS GIỎI THPT

2.2.6.1. Xây dựng các bài toán về HPT đối xứng loại một.

Ví dụ 3: Xét một phương trình bậc ba có ba nghiệm thực nào đó (sao cho phù hợp với năng lực của học sinh, phù hợp với tầm vóc của kỳ thi, vận dụng một kiến thức nào đó mà ta mong muốn), chẳng hạn phương trình : $216x^3 - 18x - 1 = 0$.

+ Gọi x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm của PT này.

+ Theo định lí Vi – et ta có :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -\frac{1}{12} \\ x_1x_2x_3 = \frac{1}{216} \end{cases}$$

+ Ta có bài toán sau :

Bài toán 3: Giải HPT	$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ xy + yz + zx = -\frac{1}{12} \\ xyz = -\frac{1}{216} \end{cases}$
-----------------------------	---

Lời giải:

+ Ta có x, y, z là nghiệm của PT : $t^3 - \frac{1}{12}t - \frac{1}{216} = 0 \Leftrightarrow 216t^3 - 18t - 1 = 0$ (1)

+ Đặt $t = \frac{u}{3}$, thay vào (1) được:

$$8u^3 - 6u = 1 \Leftrightarrow 4u^3 - 3u = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4u^3 - 3u = \cos \frac{\pi}{3} \quad (2)$$

+ Sử dụng công thức $\cos \alpha = 4\cos^3 \frac{\alpha}{3} - 3\cos \frac{\alpha}{3}$, ta có :

$$\frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} = 4\cos^3 \frac{\pi}{9} - 3\cos \frac{\pi}{9},$$

$$\frac{1}{2} = \cos \frac{5\pi}{3} = 4\cos^3 \frac{5\pi}{9} - 3\cos \frac{5\pi}{9},$$

$$\frac{1}{2} = \cos \frac{7\pi}{3} = 4\cos^3 \frac{7\pi}{9} - 3\cos \frac{7\pi}{9}.$$

+ Do hàm số $\cos u$ đồng biến trong khoảng $(0; \pi)$ nên $\cos \frac{\pi}{9}, \cos \frac{5\pi}{9}, \cos \frac{7\pi}{9}$ là ba số khác nhau đôi một.

+ Vậy từ PT (2) suy ra : $u = \cos \frac{\pi}{9}, u = \cos \frac{5\pi}{9}, u = \cos \frac{7\pi}{9}$ là tất cả các nghiệm của PT (2).

+ Do đó nghiệm của PT (1) là : $t = \frac{1}{3} \cos \frac{\pi}{9}, t = \frac{1}{3} \cos \frac{5\pi}{9}, t = \frac{1}{3} \cos \frac{7\pi}{9}$.

+ Vậy nghiệm của hệ đã cho là : $\left(\frac{1}{3} \cos \frac{\pi}{9}; \frac{1}{3} \cos \frac{5\pi}{9}; \frac{1}{3} \cos \frac{7\pi}{9} \right)$ và các hoán vị.

2.2.6.2. Xây dựng các bài toán về HPT đối xứng loại hai.

Ví dụ 3: Từ kết quả bài toán 2 là HPT :
$$\begin{cases} 3x^2 + 4x + 2\ln(3x+1) = 2y \\ 3y^2 + 4y + 2\ln(3y+1) = 2x \end{cases}$$

có nghiệm duy nhất $(x, y) = (0; 0)$, bằng cách thay $x = x+1$ và thay $y = y+1$ ta

được :
$$\begin{cases} 3x^2 + 10x + 2\ln(3x+4) = 2y-5 \\ 3y^2 + 10y + 2\ln(3y+4) = 2x-5 \end{cases}$$

+ Ta có bài toán sau :

Bài toán 3: Giải HPT $\begin{cases} 3x^2 + 10x + 2\ln(3x+4) = 2y-5 \\ 3y^2 + 10y + 2\ln(3y+4) = 2x-5 \end{cases}$
--

Hướng dẫn: Thực hiện tương tự như bài toán 2.

Ví dụ 4: Xét một PT bậc ba nào đó : $8x^3 + 6x = \sqrt{3}$.

+ Ta biến đổi thành PT, chẳng hạn: $8x^3 + x^2 + 5x = \sqrt{3} - x + x^2$.

+ Trong vế phải thay x bởi y ta được: $8x^3 + x^2 + 5x = \sqrt{3} - y + y^2$. “Trộn” x và y vào

hai vế để PT được “sinh động” hơn, chẳng hạn: $8x^3 + y^2 + 5x = \sqrt{3} - y + x^2$

+ Thay x bởi y và thay y bởi x , ta được : $8x^3 + x^2 + 5y = \sqrt{3} - x + y^2$.

+ Ta có bài toán sau:

Bài toán 4: Giải HPT $\begin{cases} 8x^3 + y^2 + 5x = \sqrt{3} - y + x^2 \\ 8y^3 + x^2 + 5y = \sqrt{3} - x + y^2 \end{cases}$
--

Lời giải:

+ Điều kiện: $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$. Lấy hai PT của hệ trừ cho nhau về theo về, ta được :

$$\begin{aligned} 8x^3 + y^2 + 5x - 8y^3 - x^2 - 5y &= x - y + x^2 - y^2 \\ \Leftrightarrow 8x^3 - 2x^2 + 4x &= 8y^3 - 2y^2 + 4y \quad (1) \end{aligned}$$

+ Xét hàm số $f(t) = 8t^3 - 2t^2 + 4t$ có $f'(t) = 24t^2 - 4t + 4, \forall t \in \mathbb{R}$ nên đồng biến trên \mathbb{R} , do đó từ (1) có $f(x) = f(y)$ hay $x = y$.

+ Thay vào hệ đã cho, ta được:

$$\begin{aligned} 8x^3 + x^2 + 5x &= \sqrt{3} - x + x^2 \\ \Leftrightarrow 8x^3 + 6x &= \sqrt{3} \Leftrightarrow 4x^3 + 3x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2) \end{aligned}$$

+ Xét $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \left(\alpha^3 - \frac{1}{\alpha^3} \right) \Leftrightarrow (\alpha^3)^2 - \sqrt{3}\alpha^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha^3 = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{7}}{2}$

+ Nếu đặt $\alpha = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3} + \sqrt{7}}{2}}$ thì $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \left(\alpha^3 - \frac{1}{\alpha^3} \right), \frac{1}{\alpha} = -\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3} - \sqrt{7}}{2}}$.

+ Ta có: $4 \left[\frac{1}{2} \left(\alpha - \frac{1}{\alpha} \right) \right]^3 + 3 \left[\frac{1}{2} \left(\alpha - \frac{1}{\alpha} \right) \right] = \frac{1}{2} \left(\alpha^3 - \frac{1}{\alpha^3} \right)$.

+ Do đó : $x = \frac{1}{2} \left(\alpha - \frac{1}{\alpha} \right) = \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3} + \sqrt{7}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3} - \sqrt{7}}{2}} \right)$ là một nghiệm duy nhất của PT (2).

+ Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất : $\left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3} + \sqrt{7}}{16}} + \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3} - \sqrt{7}}{16}}; \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3} + \sqrt{7}}{16}} + \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3} - \sqrt{7}}{16}} \right)$.

Ví dụ 5: Hàm số $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ là hàm ngược của hàm số $y = \left(\frac{1}{4} \right)^x$ trên $(0; +\infty)$.

+ Do đó ta có bài toán sau:

Bài toán 5: Giải HPT (I)

$$\begin{cases} x = \left(\frac{1}{4}\right)^y & (a) \\ y = \left(\frac{1}{4}\right)^x & (b) \end{cases}$$

+ Ta có : (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} y = \left(\frac{1}{4}\right)^x \\ y = \log_{\frac{1}{4}} x \end{cases}$

+ Hàm số $g(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$ là hàm số ngược của hàm số $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$, do đó đồ thị của hai hàm số này đối xứng nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất $y = x$.
 Bởi vậy (x, y) là nghiệm của hệ (I) khi và chỉ khi $x = y$, nghĩa là :

+ Hệ (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x = \left(\frac{1}{4}\right)^x \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}.$

Ví dụ 6: Cho PT $(x+y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 = 0$, ta biến đổi thành :

$$2(x^2 + y^2 + xy - x - y + 1) = 0 \Leftrightarrow y + x - 1 = y^2 + xy + x^2 \quad (1)$$

+ Ta biết rằng khi giải HPT đối xứng loại hai, nếu lấy hai PT trừ nhau sẽ xuất hiện PT dạng: $(y-x)f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y-x=0 \\ f(x,y)=0 \end{cases}$

+ Vậy để tạo ra một HPT đối xứng loại hai, ta sẽ nhân hai vế của PT (1) với $(y-x)$,

dẫn tới: $(y-x)(y+x-1) = (y-x)(y^2 + xy + x^2)$

$$\Leftrightarrow y^2 - x^2 + x - y = y^3 - x^3$$

$$\Leftrightarrow y^3 - y^2 - x + C = x^3 - x^2 - y + C$$

+ Từ đây ta sẽ tạo ra rất nhiều HPT đối xứng loại hai, chẳng hạn :

$$\begin{cases} y^3 = y^2 + x + C \\ x^3 = x^2 + y + C \end{cases} \quad (2)$$

+ Từ hệ (2) này, nếu $y = x$, thì $x^3 - x^2 - x - C = 0$, do đó ta nên chọn C sao cho HPT có nghiệm "đẹp" và bài toán không quá khó. Chẳng hạn, chọn $C = 0$ thì thấy ngay rằng HPT (2) nhận $(0;0)$ làm nghiệm và ta được bài toán sau.

Bài toán 6: Giải HPT $\begin{cases} x + y^2 = y^3 & (1) \\ y + x^2 = x^3 & (2) \end{cases}$
--

Lời giải:

+ Lấy PT (1) trừ PT (2) ta được: $x - y + y^2 - x^2 = y^3 - x^3$

$$\Leftrightarrow (y - x)(y + x - 1) = (y - x)(y^2 + xy + x^2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ y + x - 1 = y^2 + xy + x^2 \end{cases}$$

+ Khi $y = x$ thay vào PT (1) của hệ ta được :

$$x^3 - x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - x - 1) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ 0; \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right\}$$

+ Khi $y + x - 1 = y^2 + xy + x^2$, ta có : $x^2 + xy + y^2 - x - y + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad (\text{v« nghiệm})$$

+ Vậy các nghiệm của hệ là: $(0;0), \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right), \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)$.

2.2.6.3. Xây dựng các bài toán mới về HPT từ một HPT đã biết thuật giải.

a) Ý tưởng và cách thức xây dựng.

Xuất phát từ một hệ đã biết thuật giải, chúng ta thay thế hình thức của các biến có mặt trong hệ, thực hiện biến đổi và rút gọn ta thu được một HPT có hình thức hoàn toàn xa lạ với hệ ban đầu.

b) Một số ví dụ:

Ví dụ 1: Từ một hệ đối xứng loại một đã biết cách giải sau: $\begin{cases} a + b = 3 \\ ab = 2 \end{cases}$
--

+ Thay thế $a = \frac{1+y^2}{x}, b = x-2y-2$

$$+ \text{Ta có : } \begin{cases} \frac{1+y^2}{x} + x - 2y - 2 = 3 \\ \frac{1+y^2}{x} (x-2y-2) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1+y^2) + x(x-2y) = 5x \\ (1+y^2)(x-2y-2) = 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 1 = 5x + 2xy \\ xy^2 - 2y(y^2 + y + 1) = x + 2 \end{cases}$$

+ Ta có bài toán mới sau:

Bài toán 1: Giải HPT: $\begin{cases} x^2 + y^2 + 1 = 5x + 2xy \\ xy^2 - 2y(y^2 + y + 1) = x + 2 \end{cases}$

Lời giải: HPT $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + y^2 + x(x-2y) = 5x \\ (1+y^2)(x-2y-2) = 2x \end{cases} \quad (I)$

+ Nếu $x=0$ thì hệ (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + y^2 = 0 \\ (1+y^2)(2y-2) = 0 \end{cases} \quad (\text{Hệ vô nghiệm})$

+ Nếu $x \neq 0$ thì chia cả 2 vế của hai PT trong hệ cho x , ta được:

$$\begin{cases} \frac{1+y^2}{x} + x - 2y = 5 \\ \frac{1+y^2}{x} (x-2y-2) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1+y^2}{x} + (x-2y-2) = 3 \\ \frac{1+y^2}{x} (x-2y-2) = 2 \end{cases}$$

+ Đặt $a = \frac{1+y^2}{x}, b = x-2y-2$.

+ Ta được hệ đơn giản ban đầu: $\begin{cases} a+b=3 \\ ab=2 \end{cases} \quad (*)$

+ Hệ (*) có hai nghiệm (2;1), (1;2).

+ Với $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+y^2 \\ x=2y+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y+4 \\ y^2-2y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=10 \\ y=3 \end{cases}$

$$+ \text{ Với } \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+y^2=2x \\ x=2y+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y+3 \\ y^2-4y-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=13 \\ y=5 \end{cases}$$

+ Vậy hệ đã cho có 4 nghiệm: $(2;-1), (10;3), (1;-1), (13;5)$..

Nhận xét: Xuất phát từ HPT đơn giản: $\begin{cases} a+b=3 \\ ab=2 \end{cases}$ (I)

1) Thay $a = x^2 + x, b = y^2 + y$ vào hệ (I), ta được hệ: (1) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 3 \\ xy(x+1)(y+1) = 2 \end{cases}$

2) Thay $a = x^2 + xy, b = y^2 - xy$ vào hệ (I), ta được hệ: (2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ xy(x^2 - y^2) = 2 \end{cases}$

3) Thay $a = x^2 + 2x, b = 2x + y$ vào hệ (I), ta được hệ: (3) $\begin{cases} x^2 + 4x + y = 3 \\ x(x+2)(2x+y) = 2 \end{cases}$

4) Thay $a = x + \frac{1}{x}, b = y + \frac{1}{y}$ vào hệ (I), ta được hệ: (4) $\begin{cases} xy(x+y) + x + y = 3xy \\ (x^2 + 1)(y^2 + 1) = 2xy \end{cases}$

5) Thay $a = x^2 + 2xy, b = y^2 - xy$ vào hệ (I), ta được hệ: (5) $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 3 \\ xy(x+2y)(y-x) = 2 \end{cases}$

6) Thay $a = \frac{x^2+1}{y}, b = y+x+1$ vào hệ (I), ta được hệ: (6) $\begin{cases} x^2+1+y(y+x)=2y \\ (x^2+1)(y+x+1)=2y \end{cases}$

Ví dụ 2: Từ một hệ đối xứng loại một đã biết cách giải sau: $\begin{cases} a+b=3 \\ a^2+b^2=5 \end{cases}$

+ Thay $a = x, b = x(x+y)$, ta có hệ:

$$\begin{cases} x + x(x+y) = 3 \\ x^2 + x^2(x+y)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+y+1) - 3 = 0 \\ (x+y)^2 - \frac{5}{x^2} + 1 = 0 \end{cases}$$

+ Ta có bài toán sau:

Bài toán 2: Giải HPT: $\begin{cases} x(x+y+1) - 3 = 0 & (1) \\ (x+y)^2 - \frac{5}{x^2} + 1 = 0 & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$

Lời giải: Điều kiện: $x \neq 0$.

+ Đi ngược lại quy trình tìm ra bài toán hoặc có thể giải theo cách sau:

$$+ \text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 1 - \frac{3}{x} = 0 \\ (x + y)^2 - \frac{5}{x^2} + 1 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

$$+ \text{Đặt} \begin{cases} a = x + y \\ b = \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$+ \text{Hệ } (*) \text{ trở thành: } \begin{cases} a - 3b + 1 = 0 \\ a^2 - 5b^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3b - 1 \\ 4b^2 - 6b + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$+ \text{Với} \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$+ \text{Với} \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 1 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$+ \text{Vậy hệ có 2 nghiệm: } (1; 1), \left(2; -\frac{3}{2}\right).$$

Nhận xét: Thay hệ xuất phát (I) bằng hệ xuất phát (II): $\begin{cases} a + b = 3 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases}$

và làm tương tự như trên ta lại thu được các hệ mới khác.

+ Chẳng hạn:

$$1) \text{ Thay } a = x^2 + y^2, b = xy \text{ vào hệ (II), ta được hệ: } \begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 3 \\ x^4 + y^4 + 3x^2y^2 = 5 \end{cases}$$

$$2) \text{ Thay } a = x + \frac{1}{x}, b = y + \frac{1}{y} \text{ vào hệ (II), ta được hệ: } \begin{cases} x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3 \\ x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 3 \end{cases}$$

3) Thay $a = x + \frac{1}{y}, b = \frac{x}{y}$ vào hệ (II), ta được hệ:
$$\begin{cases} xy + x + 1 = 3y \\ (xy + 1)^2 + x^2 = 5y^2 \end{cases}$$

4) Thay $a = x + y, b = \frac{1}{y}$ vào hệ (II), ta được hệ:
$$\begin{cases} (x + y)y + 1 = 3y \\ (x + y)^2 y^2 + 1 = 5y^2 \end{cases}$$

5) Thay $a = x^2 + 2x, b = y^2 - 2x$ vào hệ (II), ta được hệ:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ x^4 + y^4 + 4x(x^2 - y^2) + 8x^2 = 5 \end{cases}$$

Ví dụ 3: Từ một hệ không đối xứng đã biết cách giải sau:
$$\begin{cases} a + b\left(\frac{a}{2} + 1\right) = 4 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases}$$

+ Bằng cách đặt $a = 2x, b = \frac{y}{x^2}$.

+ Ta có được hệ:
$$\begin{cases} 2x + \frac{y}{x^2}(x + 1) = 4 \\ \left(\frac{y}{x^2}\right)^2 + 4x^2 = 5 \end{cases}$$

+ Sau quá trình biến đổi và rút gọn ta được hệ mới:
$$\begin{cases} 2x^3 + y(x + 1) = 4x^2 \\ y^2 + 4x^6 = 5x^4 \end{cases}$$

+ Ta được bài toán sau:

Bài toán 3 : Giải HPT sau:
$$\begin{cases} 2x^3 + y(x + 1) = 4x^2 & (1) \\ 5x^4 - 4x^6 = y^2 & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

+ **Cách 1:** Đi ngược lại quá trình tìm ra bài toán.

+ Ngoài ra dựa vào dấu hiệu PT (1) là bậc nhất đối với một ẩn y, vì vậy ta có thể rút y từ PT (1) thế vào PT (2).

+ **Cách 2:**

+ Nếu $x = -1$, thay vào PT (1) không thỏa mãn.

+ Nếu $x \neq -1$. Từ PT (1) suy ra : $y = \frac{2x^2(2 - x)}{x + 1} \quad (3)$

+ Thay vào PT (2), ta được:

$$x^4(5-4x^2) = \frac{4x^4(2-x)^2}{(x+1)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ (5-4x^2)(x^2+2x+1) = 4(4-4x+x^2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 4x^4+8x^3+3x^2-26x+11=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ (x-1)(2x-1)(2x^2+7x+11)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \text{ (TM)} \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}$$

+ Với $x=0$, thay vào (3) được: $y=0$

+ Với $x=1$, thay vào (3) được: $y=1$

+ Với $x=\frac{1}{2}$, thay vào (3) được: $y=\frac{1}{2}$

+ Vậy hệ đã cho có 3 nghiệm: $(0;0), (1;1), \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Nhận xét 1: Bằng cách thay thế hình thức của biến trong hệ đối xứng hoặc không đối xứng ta đã có bài toán mới.

Nhận xét 2: Ưu nhược điểm của việc xây dựng HPT theo cách này là:

Ưu điểm thứ nhất: Việc xây dựng HPT từ một HPT đã biết thuật giải là dễ dàng tạo ra các HPT mới. Chỉ cần xuất phát từ hệ đơn giản theo u, v , sau đó đặt u, v là các biểu thức theo x, y , thay vào hệ u, v và khai triển ta được HPT mới.

Ưu điểm thứ hai: Ta có thể kiểm soát được độ phức tạp của hệ theo x, y tùy vào cách chúng ta đặt u, v theo x, y có phức tạp hay không.

Nhược điểm thứ nhất: Nếu ta đặt u, v theo x, y quá phức tạp, thay u, v vào hệ ban đầu, khai triển ra ta sẽ được một hệ vô cùng phức tạp, dẫn đến người giải sẽ rất khó định hướng làm xuất hiện các biểu thức $u = u(x, y), v = v(x, y)$. Khi đó lời giải mang tính “mò mẫm” không phát triển được nhiều tư duy của người học.

Nhược điểm thứ hai: Do xuất phát từ hệ đơn giản u, v . Sau đó làm phức tạp hóa bằng cách đặt $u = u(x, y), v = v(x, y)$, thay vào khai triển ta được hệ theo x, y . Nên để giải hệ theo x, y người tạo ra hệ rất dễ làm theo hướng ngược lại. Tuy nhiên hệ theo $x,$

y có thể không cần giải bằng cách đặt ẩn phụ, mà có thể giải được bằng cách khác đơn giản hơn rất nhiều, mà đôi khi chính người tạo ra hệ cũng không chú ý đến cách làm đơn giản này.

Nhược điểm thứ ba: Khó kiểm soát được nghiệm của hệ theo x, y . Có thể trong quá trình giải sẽ xuất hiện những nghiệm ngoài ý định ban đầu.

2.2.6.4. Xây dựng HPT được giải bằng cách biến đổi đưa về phương trình tích.

a) Ý tưởng và cách thức xây dựng:

Cách thành lập hệ dạng:
$$\begin{cases} (ax + by + c).f(x; y) = 0 \\ g(x; y) = 0 \end{cases}$$

trong đó $f(x; y)$ được chọn sao cho $\begin{cases} f(x; y) = 0 \\ g(x; y) = 0 \end{cases}$ vô nghiệm hoặc $\begin{cases} f(x; y) = 0 \\ g(x; y) = 0 \end{cases}$

giải được; $g(x; y)$ được chọn sao cho $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ g(x; y) = 0 \end{cases}$ giải được và thỏa mãn kết hợp

được với $f(x; y)$.

b) Một số ví dụ:

Ví dụ 1: Xuất phát từ PT tích: $(x + y - 1)(x^3 + y^3 + x^2 + y^2 - xy + x + y) = 0$ (1)

+ Nhân phân phối, rút gọn ta được PT: $(x + y)(x^3 + y^3) + 3xy = x + y$

$$\Rightarrow x^3 + y^3 + \frac{3xy}{x + y} = 1$$

+ Từ PT (1) suy ra: $x + y - 1 = 0$. Cho $x = 2 \Rightarrow y = 1$.

+ Kết hợp với một PT khác nhận cặp số $(2; -1)$ làm nghiệm, chẳng hạn PT:

$$\sqrt{x^2 + 12} + 5 = 3(1 - y)\sqrt{x + y} + \sqrt{x^2 + 5}.$$

+ Từ đó ta được bài toán sau:

Bài toán 1: Giải HPT (I): $\begin{cases} x^3 + y^3 + \frac{3xy}{x + y} = 1 & (2) \\ \sqrt{x^2 + 12} + 5 = 3(1 - y)\sqrt{x + y} + \sqrt{x^2 + 5} & (3) \end{cases}$

+ Để giải HPT (I) ta làm như sau:

+ Biến đổi PT (2) về PT (1), từ PT (1), ta được: $x + y - 1 = 0$.

+ Do $x^3 + y^3 + x^2 + y^2 - xy + x + y = 0$ vô nghiệm với điều kiện $x + y > 0$.

+ Thay $y = 1 - x$ vào PT (3) ta được PT: $\sqrt{x^2 + 12} + 5 = 3x + \sqrt{x^2 + 5}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 12} - 4 = 3x - 6 + \sqrt{x^2 + 5} - 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 + 12} + 4} = 3(x - 2) + \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 + 5} + 3}$$

$$\Leftrightarrow (x - 2) \left(\frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 12} + 4} - 3 - \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 5} + 3} \right) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

+ Do $\frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 12} + 4} < \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 5} + 3}$ nên $\frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 12} + 4} - 3 - \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 5} + 3} = 0$ vô nghiệm.

+ Từ đó ta tìm được nghiệm của HPT là: $(2; -1)$.

Ví dụ 2: Xuất phát từ PT tích: $(x^2 - xy - 1)(x^2 - xy + 2) = 0$ (4)

+ Biến đổi tương đương PT (4) ta được: $x^4 - 2x^3y + x^2y^2 + x^2 - xy - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x^4 - x^3y + x^2y^2 - 1 = x^3y - x^2 + xy + 1$. Từ đó ta được bài toán sau:

Bài toán 2: Giải HPT: (II) $\begin{cases} x^4 - x^3y + x^2y^2 - 1 = 0 & (5) \\ x^3y - x^2 + xy + 1 = 0 & (6) \end{cases}$
--

+ Để giải HPT (II), ta lấy PT (5) trừ đi PT (6), biến đổi PT mới có được PT (4).

+ Từ PT (4) ta được: $x^2 - xy - 1 = 0$ (7) hoặc $x^2 - xy + 2 = 0$ (8).

+ Do $x = 0$ không thỏa mãn HPT nên khi đó:

+ PT (7) $\Leftrightarrow y = \frac{x^2 - 1}{x}$ thay vào PT (6) ta được: $x^2(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ (do $x \neq 0$)

+ PT (8) $\Leftrightarrow y = \frac{x^2 + 2}{x}$ thay vào PT (6) ta được: $x^4 + 2x^2 + 3 = 0$ (vô nghiệm).

+ Vậy HPT (II), có 2 nghiệm là: $(1; 0), (-1; 0)$.

Ví dụ 3: Xuất phát từ PT tích $(\sqrt{2x - y} - x)(\sqrt{2x - y} - y) = 0$

$$\Leftrightarrow 2x - y - (x + y)\sqrt{2x - y} + xy = 0$$

+ Đặt $2x - y = x^2 + y^2 - xy$. Ta được bài toán sau :

$$\text{Bài toán 3: Giải HPT (III): } \begin{cases} x^2 + y^2 - xy - 2x + y = 0 \\ x^2 + y^2 - (x + y)\sqrt{2x - y} = 0 \end{cases}$$

+ Để giải HPT (III), lấy PT dưới trừ PT trên ta được:

$$\begin{aligned} 2x - y - (x + y)\sqrt{2x - y} + xy &= 0 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{2x - y} - x)(\sqrt{2x - y} - y) &= 0 \end{aligned}$$

+ Giải cụ thể ta được nghiệm của hệ là: $(0;0), (1;1), (2;0)$.

2.2.6.5. Xây dựng các bài toán HPT từ các hàm số đơn điệu.

a) Ý tưởng và cách thức xây dựng:

+ Lấy hàm số $f(t)$ đơn điệu trên khoảng $(a;b)$, $u(x; y), v(x; y) \in (a;b)$

+ Lấy $g(x; y)$ sao cho hệ $\begin{cases} u(x; y) = v(x; y) \\ g(x; y) = 0 \end{cases}$ giải được trên tập xác định của chúng.

+ Lập hệ phương trình $\begin{cases} f(u) = f(v) \\ g(x; y) = 0 \end{cases}$

b) Một số ví dụ:

Ví dụ 1: Xét hàm số $f(t) = t^5 + t$ đồng biến trên \mathbb{R} .

+ Cho $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(y)$ được: $\left(\frac{x}{y}\right)^5 + \frac{x}{y} = y^5 + y \Leftrightarrow x^5 + xy^4 = y^{10} + y^6$

+ Mặt khác do $f(t)$ đồng biến trên \mathbb{R} nên $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(y) \Leftrightarrow \frac{x}{y} = y \Leftrightarrow x = y^2$.

+ Lấy $x = 1$, khi đó $\sqrt{4x + 5} + \sqrt{x + 8} = 6$.

+ Vậy ta có bài toán sau:

$$\text{Bài toán 1: Giải HPT : } \begin{cases} x^5 + xy^4 = y^{10} + y^6 & (1) \\ \sqrt{4x + 5} + \sqrt{y^2 + 8} = 6 & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

+ Điều kiện : $4x + 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{5}{4}$.

+ Xét $y = 0$. Từ (1) suy ra $x = 0$ và PT (2) không thỏa mãn.

+ Xét $y \neq 0$. Chia cả hai vế của (1) cho y^5 , ta được: $\left(\frac{x}{y}\right)^5 + \frac{x}{y} = y^5 + y$ (3)

+ Xét hàm số $f(t) = t^5 + t, \forall t \in \mathbb{R}$. Ta có $f'(t) = 5t^4 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

+ Vậy hàm $f(t)$ đồng biến trên \mathbb{R} .

+ Do đó (3) $\Leftrightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f(y) \Leftrightarrow \frac{x}{y} = y \Leftrightarrow x = y^2$.

+ Thay vào (2) được: $\sqrt{4x+5} + \sqrt{x+8} = 6$ (4)

+ Xét hàm số $f(x) = \sqrt{4x+5} + \sqrt{x+8}, \forall x \geq -\frac{5}{4}$

+ Vì $g'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x+5}} + \frac{1}{2\sqrt{x+8}} > 0, \forall x \geq -\frac{5}{4}$ nên hàm số $g(x)$ đồng biến trên

$\left[-\frac{5}{4}; +\infty\right)$. Hơn nữa $g(1) = 6$.

+ Vậy $x = 1$ là nghiệm duy nhất của (4). Suy ra $y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1$.

+ Kết luận: Hệ có hai nghiệm: $(1; 1), (1; -1)$.

Ví dụ 2: Xét hàm $f(t) = t^3 + 3t$ đồng biến trên \mathbb{R} .

+ Cho $f(x+1) = f(y)$ được: $(x+1)^3 + 3(x+1) = y^3 + 3y$

$$\Leftrightarrow x^3 - y^3 + 3x^2 + 6x - 3y + 4 = 0$$

+ Mặt khác $f(t)$ đồng biến trên \mathbb{R} nên $f(x+1) = f(y) \Leftrightarrow x+1 = y$.

+ Lấy $x = 0$, khi đó: $2\sqrt{4-x^2} - 3\sqrt{3+2(x+1)-(x+1)^2} - 3x + 2 = 0$

Ta có bài toán sau:

Bài toán 2: Giải HPT $\begin{cases} x^3 - y^3 + 3x^2 + 6x - 3y + 4 = 0 \\ 2\sqrt{4-x^2} - 3\sqrt{3+2y-y^2} - 3x + 2 = 0 \end{cases}$

Lời giải:

+ Điều kiện: $\begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ -1 \leq y \leq 3 \end{cases}$

+ PT thứ nhất của hệ tương đương với: $(x+1)^3 + 3(x+1) = y^3 + 3y$ (1)

+ Từ điều kiện suy ra : $x, y-1 \in [-1;3]$.

+ Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t, t \in [-1;3]$.

+ Đạo hàm: $f'(t) = 3t^2 + 3 = 3(t^2 + 1) > 0, \forall t \in [-1;3]$.

+ Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[-1;3]$.

+ Suy ra PT (1) $\Leftrightarrow f(x+1) = f(y) \Leftrightarrow x+1 = y \Leftrightarrow x = y-1$.

+ Thay vào PT thứ hai của hệ ta được : $\sqrt{-y^2 + 2y + 3} = 5 - 3y$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5-3y \geq 0 \\ -y^2 + 2y + 3 = (5-3y)^2 \end{cases} \Leftrightarrow y = 1.$$

+ Khi đó ta có : $x = 0$.

+ Vậy hệ có nghiệm duy nhất : $(0;1)$.

Ví dụ 3: Xét hàm số : $f(t) = t(2 + \sqrt{t^2 + 4})$,

+ Có $f'(t) = 2 + \sqrt{t^2 + 4} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 4}} \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên \mathbb{R} .

+ Ta có :

$$f(2x) = 2x(2 + \sqrt{4x^2 + 4}) = 4x + 4x\sqrt{x^2 + 1};$$

$$f(2y+1) = (2y+1)\left(2 + \sqrt{(2y+1)^2 + 4}\right) = 4y + 2 + (2y+1)\sqrt{4y^2 + 4y + 5}$$

+ Từ đó ta có PT:

$$4x + 4x\sqrt{x^2 + 1} = 4y + 2 + (2y+1)\sqrt{4y^2 + 4y + 5}$$

$$\Leftrightarrow f(2x) = f(2y+1) \Leftrightarrow 2x = 2y+1$$

+ Cho $x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 0$. Kết hợp với một PT khác nhận $(x; y) = \left(\frac{1}{2}; 0\right)$ là nghiệm.

+ Chẳng hạn PT : $\sqrt{2x+3} + \sqrt[3]{2y+1} - 3 = 0$ ta được bài toán :

Bài toán 3: Giải HPT (III) $\begin{cases} 4x+4x\sqrt{x^2+1}-4y-2-(2y+1)\sqrt{4y^2+4y+5}=0 & (1) \\ \sqrt{2x+3}+\sqrt[3]{2y+1}-3=0 & (2) \end{cases}$

+ Để giải HPT (III), ta xét hàm số : $f(t)=t\left(2+\sqrt{t^2+4}\right)$, chứng minh hàm số $y=f(t)$ đồng biến. Biến đổi PT (1) về dạng : $f(2x)=f(2y+1)\Leftrightarrow 2x=2y+1$.

+ Thay $2x=2y+1$ vào PT (2), ta được PT: $\sqrt{2x+3}-2+\sqrt[3]{2x}-1=0$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-1}{\sqrt{2x+3}+2}+\frac{2x-1}{\sqrt[3]{4x^2}+\sqrt[3]{2x+1}}=0$$

$$\Leftrightarrow 2x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\Rightarrow y=0.$$

+ Vậy HPT (III) có nghiệm duy nhất : $(x;y)=\left(\frac{1}{2};0\right)$.

• Để làm cho bài toán trở nên khó hơn, ta xét hàm số $f(t)$ với biểu thức theo t phức tạp hơn, chẳng hạn :

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}\left(2+\sqrt{\frac{1}{x^2}+4}\right)=\frac{1}{x}\left(2+\frac{1}{x}\sqrt{1+4x^2}\right)=\frac{1}{x^2}\left(2x+\sqrt{1+4x^2}\right);$$

$$f(2y)=2y\left(2+\sqrt{4y^2+4}\right)=4y+4y\sqrt{y^2+1}$$

+ Khi đó $f\left(\frac{1}{x}\right)=f(2y)\Leftrightarrow \frac{1}{x^2}\left(2x+\sqrt{1+4x^2}\right)=4y+4y\sqrt{y^2+1}$

$$\Leftrightarrow 2x+\sqrt{1+4x^2}-4x^2y-4x^2y\sqrt{y^2+1}=0 \quad (3)$$

+ Mặt khác : PT $f\left(\frac{1}{x}\right)=f(2y)\Leftrightarrow \frac{1}{x}=2y$.

+ Cho $x=1\Rightarrow y=\frac{1}{2}$.

+ Kết hợp PT (3) với một PT khác nhận $(x;y)=\left(1;\frac{1}{2}\right)$ là nghiệm.

+ Chẳng hạn PT: $-2x^2+2x-1+\frac{1}{2y}\sqrt{\frac{1}{y}}-1=0$, ta được bài toán sau:

Bài toán 4: Giải HPT (IV)

$$\begin{cases} 2x + \sqrt{1+4x^2} - 4x^2y - 4x^2y\sqrt{y^2+1} = 0 & (4) \\ -2x^2 + 2x - 1 + \frac{1}{2y}\sqrt{\frac{1}{y}-1} = 0 & (5) \end{cases}$$

+ Để giải hệ (IV), ta xét hàm số: $f(t) = t\left(2 + \sqrt{t^2 + 4}\right)$, chứng minh hàm số $y = f(t)$ đồng biến trên \mathbb{R} .

+ Biến đổi PT (4) về dạng: $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(2y) \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 2y$.

+ Thay $2y = \frac{1}{x}$ vào PT (5), ta được PT:

$$\begin{aligned} -2x^2 + 2x - 1 + x\sqrt{2x-1} &= 0 \Leftrightarrow 2x - 1 + x\sqrt{2x-1} - 2x^2 = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x-1} = x \\ \sqrt{2x-1} = -2x \end{cases} &\Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

+ Vậy nghiệm của hệ PT (IV) là: $\left(1; \frac{1}{2}\right)$

• Sau đây chúng ta sẽ xây dựng HPT giải được bằng phương pháp hàm số mà phải kết hợp cả hai PT trong hệ.

+ Đầu tiên ta sẽ xây dựng HPT được giải bằng cách chỉ nhân một PT trong hệ với hằng số và kết hợp với PT còn lại. Chẳng hạn:

+ Xét hàm số: $f(t) = t^3 + 3t$, có $f'(t) = 3t^2 + 3 \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên \mathbb{R} .

+ Ta có: $f(2x+1) = (2x+1)^3 + 3(2x+1) = 8x^3 + 12x^2 + 12x + 4$;

$$f(y+2) = (y+2)^3 + 3(y+2) = y^3 + 6y^2 + 15y + 14.$$

+ Khi đó: $f(2x+1) = f(y+2) \Leftrightarrow 8x^3 + 12x^2 + 12x + 4 = y^3 + 6y^2 + 15y + 14$ (1)

+ Từ PT: $f(2x+1) = f(y+2) \Leftrightarrow 2x+1 = y+2$.

+ Chọn $x=1$, ta được: $y=1$. Khi đó ta biến đổi PT (1) sao cho hai vế PT (1) bằng nhau khi thay cặp số $(1;1)$ vào, chẳng hạn ta có thể biến đổi như sau:

+ PT (1) $\Leftrightarrow 8x^3 + 12x^2 - 6y^2 - 6y - 8 = y^3 + 9y - 12x + 2$ (2).

+ Từ đó ta có được bài toán :

Bài toán 5: Giải HPT $\begin{cases} 4x^3 + 6x^2 - 3y^2 - 3y - 4 = 0 & (3) \\ y^3 + 9y - 12x + 2 = 0 & (4) \end{cases}$

+ Để giải HPT trên ta lấy PT (3) nhân với 2, trừ đi PT (4) ta được PT (2), biến đổi PT (2) về PT (1).

+ Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t$, vì $f'(t) = 3t^2 + 3 \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

+ Nên PT (1) $\Leftrightarrow f(2x+1) = f(y+2) \Leftrightarrow 2x+1 = y+2 \Leftrightarrow y = 2x-1$.

+ Thay vào PT (3) ta được : $x=1 \Rightarrow y=1$.

+ Vậy HPT có nghiệm : $(1;1)$.

• Bây giờ ta sẽ xây dựng HPT giải được bằng cách nhân cả hai PT của hệ với hằng số và kết hợp hai PT mới lại với nhau.

+ Chẳng hạn ta xét hàm số : $f(t) = t^3 + 1$, có $f'(t) = 3t^2 + 1 \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

+ Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên \mathbb{R} .

+ Ta có : $f(2x+1) = (2x-1)^3 + (2x-1) = 8x^3 - 12x^2 + 8x - 2$;

$$f(3y-2) = (3y-2)^3 + (3y-2) = 27y^3 - 54y^2 + 39y - 10.$$

+ Khi đó :

$$f(2x-1) = f(3y-2) \Leftrightarrow 8x^3 - 12x^2 + 8x - 2 = 27y^3 - 54y^2 + 39y - 10 \quad (5)$$

+ Từ PT : $f(2x-1) = f(3y-2) \Leftrightarrow 2x-1 = 3y-2$

+ Chọn $x=1$, ta được : $y=1$.

+ Khi đó ta biến đổi PT (5) sao cho hai vế của (5) bằng nhau, khi thay cặp số $(1;1)$ vào, chẳng hạn ta có thể biến đổi như sau :

+ PT (5) $\Leftrightarrow 8x^3 + 8x - 12y - 4 = 27y^3 - 54y^2 + 27y + 12x^2 - 12$ (6)

+ Từ đó ta được HPT : $\begin{cases} 4x^3 + 4x - 6y - 2 = 0 & (7) \\ 4x^2 + 9y^3 - 18y^2 + 9y - 4 = 0 & (8) \end{cases}$

+ Để giải HPT trên, ta lấy PT (7) nhân 2, trừ đi PT (8) nhân 3, ta được PT (6), biến đổi PT (6) về PT (5). Xét hàm số $f(t) = 3t^2 + 1 \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

+ Nên PT (5) $\Leftrightarrow f(2x-1) = f(3y-2) \Leftrightarrow 2x-1 = 3y-2 \Leftrightarrow y = \frac{2x+1}{3}$

+ Thay vào PT (7) ta được : $x=1 \Rightarrow y=1$.

+ Vậy HPT có nghiệm: (1;1).

Nhận xét: Bằng cách làm tương tự ta được một loạt các HPT khác.

2.2.6.6. Xây dựng HPT được giải bằng phương pháp thế hằng số.

a) Ý tưởng và cách thức xây dựng.

Nguyên tắc chung của việc sáng tạo HPT được giải bằng phương pháp thế hằng số đó là xuất phát từ một PT có bậc thấp kết hợp với một PT có bậc cao hơn, sao cho khi thay PT có bậc thấp vào PT có bậc cao ta được một PT mới là PT đồng bậc, và PT đồng bậc này giải được (để PT đồng bậc giải được dễ dàng, ta cho trước nghiệm của PT ban đầu).

b) Một số ví dụ :

Ví dụ 1 : Xét HPT : (I)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x^3 + 2y^3 + 2x + y = 0 \end{cases}$$

+ Hệ đã cho tương đương :
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 & (1) \\ 2(x^3 + 2y^3) + 2(2x + y) = 0 & (2) \end{cases}$$

+ Thay $x^2 + y^2 = 2$ từ PT (1) vào PT (2) ta được : $2x^3 + 4y^3 + (x^2 + y^2)(2x + y) = 0$

$$\Leftrightarrow 4x^3 + x^2y + 2xy^2 + 5y^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + y)(4x^2 - 3xy + 5y^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -y$$

+ Vậy $x = -y$ thay vào PT (1), ta được : $y = \pm 1$.

+ Để bài toán trên trở nên khó hơn, ta kết hợp PT $x^2 + y^2 = 2$ với một PT khác.

+ Chẳng hạn : $2x + y = 0$, ta được PT : $(x^2 + y^2 - 2)(2x + y) = 0$

$$\Leftrightarrow 2x^3 + x^2y + 2xy^2 - 4x + y^3 - 2y = 0.$$

+ Từ đó ta có HPT:
$$\begin{cases} 2x^3 + x^2y + 2xy^2 - 4x + y^3 - 2y = 0 \\ x^3 + 2y^3 + 2x + y = 0 \end{cases}$$

+ Giải HPT trên, ta được nghiệm của hệ là : $(0;0), (1;-1), (-1;1)$.

Ví dụ 2: Xuất phát từ PT tích : $(x-y)(x^2-4x+3)=0$

$$\Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 3x - x^2y + 4xy - 3y = 0 \quad (3)$$

+ Ta thấy PT (3) nhận cặp $(x; y) = (1;1)$ là nghiệm.

+ Kết hợp với một PT hai ẩn khác nhận cặp $(x; y) = (1;1)$ làm nghiệm.

+ Chẳng hạn :

$$4x^2 + y^2 - 2x + 2y - 5 = 0 \quad (4)$$

$$\Leftrightarrow (2x+1)^2 + y^2 = 6x - 2y + 6 \quad (5)$$

+ Lấy PT (3) cộng PT (4), ta được PT : $x^3 + y^2 + x - x^2y + 4xy - y - 5 = 0$

$$\Leftrightarrow x^3 + y^2 + x + 4xy = x^2y + y + 5 \quad (6).$$

+Kết hợp PT (5) và PT (6), ta được hệ II:
$$\begin{cases} x^3 + y^2 + x + 4xy = x^2y + y + 5 & (7) \\ (2x+1)^2 + y^2 = 6x - 2y + 6 & (8) \end{cases}$$

+ Để giải HPT (II), ta làm như sau : PT (8) $\Leftrightarrow 5 = 4x^2 + y^2 - 2x + 2y$.

+ Thay vào PT (7), ta được PT:

$$x^3 + y^2 + x + 4xy = x^2y + y + 4x^2 + y^2 - 2x - 2y$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 3x - x^2y + 4xy - 3y = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x^2-4x+3)=0 \Leftrightarrow x=y \vee x=1 \vee x=3.$$

+ Với $x=y$, ta có: PT (8) $\Leftrightarrow 5y^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow y = \pm 1$.

+ Với $x=1$, ta có: PT (8) $\Leftrightarrow y^2 + 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = 1 \vee y = -3$.

+ Với $x=3$, ta có: PT (8) $\Leftrightarrow y^2 + 2y + 25 = 0$ (vô nghiệm).

+ Vậy HPT (II) có 3 nghiệm : $(1;1), (-1;-1), (1;-3)$.

Nhận xét: Bằng cách làm tương tự ta sẽ nhận được một loạt các HPT khác.

2.2.6.7. Xây dựng HPT được giải bằng phương pháp thế bằng biểu thức của ẩn.

a) Ý tưởng và cách thức xây dựng.

Xuất phát từ các PT tích theo hai biến của x và y , ta có thể xây dựng được các HPT khá đẹp về hình thức, đồng thời cũng cho những lời giải đẹp, đầy chất sáng tạo. Điều này rất cần thiết và quan trọng trong việc phát triển TDST cho HS. Sau đây là một số ví dụ minh họa.

b) Một số ví dụ :

Ví dụ 1: Xét PT : $(x - y)(x^4 + x^2y + y^2) = 0$ (1)

$$\Leftrightarrow x^5 + x^3y + xy^2 - x^4y - x^2y^2 - y^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^5 + x^2(xy - x^2y - y^2) + xy^2 - y^3 = 0 \quad (2)$$

+ Đặt $xy - x^2y - y^2 = y^2$ (3).

+ Thay vào PT (2) ta được: $x^5 + x^2y^2 + xy^2 - y^3 = 0$ (4)

+ Kết hợp giữa PT (3) và PT (4), ta được bài toán sau:

Bài toán 1: Giải HPT (I): $\begin{cases} xy - x^2y - 2y^2 = 0 & (5) \\ x^5 + x^2y^2 + xy^2 - y^3 = 0 & (6) \end{cases}$
--

+ Để giải HPT (I) ta biến đổi PT (5) thành PT (3). Thay vào PT (6) ta được PT (2).

+ Từ PT (2) ta biến đổi về PT (1). PT (1) $\Leftrightarrow x = y$.

+ Thay $x = y$ vào PT (5) ta được : $-y^3 - y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0$ hoặc $y = -1$.

+ Từ đó ta tìm được nghiệm của hệ (I) là : $(0;0), (-1;-1)$.

Ví dụ 2: Xuất phát từ PT: $(x - 2y^2)(x + 3y) = 0$ (7)

$$\Leftrightarrow x^2 + 3xy - 2xy^2 - 6y^3 = 0 \Leftrightarrow (x + 2y)^2 - xy - 2xy^2 - 4y^2 - 6y^3 = 0 \quad (8)$$

+ Đặt $x + 2y = 3xy - 2$ (9) thay vào PT (8) ta được PT :

$$9x^2y^2 - 13xy - 2xy^2 - 4y^2 - 6y^3 + 4 = 0 \quad (10)$$

+ Kết hợp giữa PT (9) và PT (10), ta được HPT :

$$\text{Bài toán 2: Giải HPT (II): } \begin{cases} x - 3xy + 2y + 2 = 0 \\ 9x^2y^2 - 13xy - 2xy^2 - 4y^2 - 6y^3 + 4 = 0 \end{cases}$$

+ Giải HPT (II), ta được nghiệm : $(2;1)$.

Nhận xét: Ta cũng có thể xây dựng HPT giải bằng phương pháp thế từ bài toán ngược, xét ví dụ sau :

Ví dụ 3: Xuất phát từ $x = 2 \Leftrightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow 8x^3 = 64 \Leftrightarrow 16x^3 - 37 = 8x^3 + 27$

$$\Leftrightarrow 16x^3 - 37 = (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9)$$

$$\Leftrightarrow 16x^3 - 37 = (2x + 3)(2x + 4x^2 - 8x + 9) \quad (11)$$

+ Đặt $4x^2 - 8x + 9 = \frac{1}{y^2} \Leftrightarrow 4x^2y^2 - 8xy^2 + 9y^2 - 1 = 0 \quad (12)$

+ Thay vào PT (11) ta được : $16x^3 - 37 = (2x + 3)\left(2x + \frac{1}{y^2}\right)$

$$\Leftrightarrow 16x^3y^2 - 37y^2 - (2x + 3)(2xy^2 + 1) = 0 \quad (13)$$

+ Kết hợp PT (12) và PT (13), ta được HPT:

$$\text{Bài toán 3: Giải HPT (III): } \begin{cases} 16x^3y^2 - 37y^2 - (2x + 3)(2xy^2 + 1) = 0 \\ 4x^2y^2 - 8xy^2 + 9y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

+ Giải HPT (III) ta được nghiệm : $\left(2; \frac{1}{3}\right), \left(1; -\frac{1}{3}\right)$.

Nhận xét: Bằng cách làm tương tự ta được một loạt các HPT khác.

2.2.6.8. Xây dựng HPT được giải bằng cách sử dụng hằng đẳng thức.

a) Ý tưởng và cách thức xây dựng.

Xuất phát từ một số hằng đẳng thức quen thuộc ta có thể sáng tạo ra được các HPT khá là hay. Sau đây là một số ví dụ minh họa.

b) Một số ví dụ :

Ví dụ 1 : Xuất phát từ đẳng thức : $(2x + 1)^3 = (y + 2)^3 \quad (1)$

+ Ta có : $(1) \Leftrightarrow 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = y^3 + 6y^2 + 12y + 8$

$$\Leftrightarrow 8x^3 - y^3 - 7 = 6y^2 + 12y - 12x^2 - 6x.$$

+ Từ đó ta được HPT (I) :
$$\begin{cases} 8x^3 - y^3 = 7 & (2) \\ 2x^2 + x = y^2 + 2y & (3) \end{cases}$$

+ Để giải HPT (I) ta nhân PT (3) với 6, cộng với PT (2), sau đó biến đổi ta nhận được PT (1). Từ đó ta tìm được nghiệm của HPT (I) là : $(1;1), \left(-\frac{1}{2}; -2\right)$.

Ví dụ 2: Xuất phát từ hằng đẳng thức: $(2x - 3y)^2 = -1$ (4)

+ Biến đổi tương đương ta được: $8x^3 - 27y^3 - 36x^2y + 54xy^2 = -1$

$$\Leftrightarrow 8x^3 - 27y^3 + 19 = 36x^2y - 54xy^2 + 18.$$

+ Từ đó ta được HPT (II):
$$\begin{cases} 8x^3 - 27y^3 = -19 & (5) \\ 6x^2y - 9xy^2 = -3 & (6) \end{cases}$$

+ Để giải HPT (II), ta nhân PT (6) với -6 , cộng với PT (5), sau đó biến đổi ta được PT (4). Từ đó ta tìm được nghiệm của hệ (II) là : $(1;1), \left(-\frac{3}{2}; -\frac{2}{3}\right)$.

Ví dụ 3: Xuất phát từ PT tích : $(x-1)[2(x-1)^2 + 3(y+2)^2] = 0$ (7)

+ Biến đổi tương đương ta được :

$$\Leftrightarrow 2x^3 - 6x^2 + 3xy^2 + 12xy + 18x - 3y^2 - 12y - 14 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 + 3xy^2 + 3xy - 5 = 3x^2 + 3y^2 - 9xy - 18x + 12y + 9$$

+ Từ đó ta được HPT (III) :
$$\begin{cases} 2x^3 - 3x^2 + 3xy^2 + 3xy - 5 = 0 & (8) \\ x^2 + y^2 - 3xy - 6x + 4y + 3 = 0 & (9) \end{cases}$$

+ Để giải HPT (III) ta nhân PT (9) với -3 , cộng với PT (8), sau đó biến đổi ta được PT (6). Từ đó ta tìm được nghiệm của HPT là : $(1;1), (1;2)$.

Nhận xét: Với cách làm tương tự, ta sẽ có được một loạt các HPT khác.

2.2.6.9. Xây dựng HPT từ các HPT có yếu tố đẳng cấp.

a) Ý tưởng và cách thức xây dựng.

Xuất phát từ các HPT có yếu tố đẳng cấp bằng cách thay thế hình thức của biến, ta có thể tạo ra nhiều HPT hay và đặc sắc. Sau đây là một số ví dụ minh họa.

b) Một số ví dụ:

Ví dụ 1: Xuất phát từ HPT (I) :
$$\begin{cases} u^2 + uv + v^2 = 3 \\ u^2 - 3uv - v^2 = -3 \end{cases}$$

+ Hệ PT (I) có bốn nghiệm là : $(1;1), (-1;-1), (0;\sqrt{3}), (0;-\sqrt{3})$.

+ Bây giờ ta đặt :
$$\begin{cases} u = x + 2 \\ v = y - 3 \end{cases}$$

+ Thay vào hệ (I) và khai triển ta nhận được HPT (II):

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy + x - 4y + 4 = 0 & (1) \\ x^2 - y^2 - 3xy + 13x + 16 = 0 & (2) \end{cases}$$

+ Để giải HPT (II), ta đặt $\begin{cases} x = u - 2 \\ y = v + 3 \end{cases}$, thay vào hệ (II), ta được hệ (I), giải hệ (I), ta

nhận được $(u;v)$, có $(u;v)$ ta tìm được nghiệm $(x;y)$ của hệ (II).

+ Từ nghiệm của HPT (I), ta tìm được nghiệm của HPT (II) là :

$$(-1;4), (-3;2), (-2;3-\sqrt{3}), (-2;3+\sqrt{3}).$$

+ Một câu hỏi tự nhiên được đặt ra ở đây là : Để giải hệ (II), tại sao ta biết cách đặt

$\begin{cases} x = u - 2 \\ y = v + 3 \end{cases}$ thì khi đó, hệ (II) sẽ trở thành hệ (I) là hệ đồng bậc? Bí ẩn ở đây là gì?

Đâu là cơ sở của phép đặt này? Sau đây chúng tôi trình bày cơ sở của phép đặt trên như sau:

+ Lấy đạo hàm PT (1) theo biến x , sau đó lấy đạo hàm PT (1) theo biến y , ta được

$$\text{HPT : } \begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ x + 2y - 4 = 0 \end{cases}, \text{ hệ này có nghiệm là : } \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$$

+ Lấy đạo hàm PT (2) theo biến x , sau đó lấy đạo hàm PT (2) theo biến y , ta được

$$\text{HPT: } \begin{cases} 2x - 3y + 13 = 0 \\ -3x - 2y = 0 \end{cases}, \text{ hệ này cũng có nghiệm là : } \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$$

+ Từ đó cho ta phép đặt :
$$\begin{cases} x = u - 2 \\ y = v + 3 \end{cases}$$

+ Lưu ý: Nếu ta cần giải hệ có dạng :
$$\begin{cases} f(x; y) = 0 & (3) \\ g(x; y) = 0 & (4) \end{cases}$$

+ Lấy đạo hàm PT (3) theo biến x , sau đó lấy đạo hàm PT (3) theo biến y , ta được HPT : (5).

+ Lấy đạo hàm PT (4) theo biến x , sau đó lấy đạo hàm PT (4) theo biến y , ta được HPT : (6)

+ Nếu nghiệm của HPT (5) và nghiệm của HPT (6) không giống nhau thì HPT đã cho không giải được theo cách này mà phải giải theo cách khác, có thể biến đổi về PT tích, hoặc đặt ẩn phụ, hoặc đánh giá,...

• Cũng xuất phát từ HPT (I), nếu ta đặt $\begin{cases} u = 2x + 3 \\ v = 3y - 4 \end{cases}$, thay vào HPT (I), biến đổi

ta nhận được HPT mới : (III)
$$\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 + 6xy + 4x - 15y + 10 = 0 \\ 4x^2 - 9y^2 - 18xy + 36x - 3y + 32 = 0 \end{cases}$$

+ Từ nghiệm của HPT (I), ta tìm được nghiệm của HPT (III) là :

$$\left(-1; \frac{5}{3}\right), (-2; 1), \left(-\frac{3}{2}; \frac{4 - \sqrt{3}}{3}\right), \left(-\frac{3}{2}; \frac{4 + \sqrt{3}}{3}\right).$$

Ví dụ 2: Xuất phát từ HPT (IV) :
$$\begin{cases} u^2 + 3v^2 + 4uv = 1 & (1) \\ 2u^2 + 4v^2 + 2uv = 1 & (2) \end{cases}$$

+ Hệ PT (IV) có hai nghiệm : $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}; \frac{1}{2\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}; -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right).$

+ Đặt $\begin{cases} u = x + 5 \\ v = y - 7 \end{cases}$. Thay vào HPT (IV) và khai triển ta nhận được HPT (V) :

$$\begin{cases} x^2 + 3y^2 + 4xy - 18x - 22y + 31 = 0 \\ 2x^2 + 4y^2 + 2xy + 6x - 46y + 175 = 0 \end{cases}$$

+ Để giải HPT (V), ta đặt : $\begin{cases} x = u - 5 \\ y = v + 7 \end{cases}$, thay vào HPT (V), ta được HPT (IV).

+ Giải hệ (IV), tìm được $(u; v)$, có $(u; v)$ ta tìm được nghiệm $(x; y)$ của (V).

+ Từ nghiệm của HPT (IV), ta tìm được nghiệm của HPT (V) là :

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}-5; \frac{1}{2\sqrt{2}}+7\right), \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}-5; -\frac{1}{2\sqrt{2}}+7\right).$$

Ví dụ 3 : Với $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$, ta có hệ: $\begin{cases} 2x^3 + y^3 = 10 \\ x^2y - 3xy^2 + x^3 = -9 \end{cases}$

+ Từ $x=1, y=2$. Suy ra $y=2x$. Do đó khi giải hệ, ta sẽ đưa về một PT bậc 3 theo

$t = \frac{y}{x}$, hơn nữa PT này có "ng nghiệm đẹp" $t=2$.

+ Ta có HPT (VI): $\begin{cases} 2x^3 + y^3 = 10 \\ x^2y - 3xy^2 + x^3 = -9 \end{cases}$

+ Hệ (VI) là HPT đẳng cấp, nên ta sẽ sử dụng phương pháp giải của hệ đẳng để giải hệ (VI). Ta có lời giải sau :

+ Khi $x=0$, hệ đã cho trở thành : $\begin{cases} y^3 = 6 \\ 0 = -9 \end{cases}$ (mâu thuẫn)

+ Vậy hệ không có nghiệm dạng $(0; y)$.

+ Tiếp theo xét $x \neq 0$. Từ hệ đã cho ta có : $9(2x^3 + y^3) = -10(x^2y - 3xy^2 + x^3)$

$$\Leftrightarrow 18x^3 + 9y^3 = -10x^2y + 30xy^2 - 10x^3 \Leftrightarrow 18 + 9\left(\frac{y}{x}\right)^3 = -10\left(\frac{y}{x}\right) + 30\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1$$

+ Đặt $t = \frac{y}{x}$, khi đó ta có : $9t^3 - 30t^2 + 10t + 28 = 0$

$$\Leftrightarrow (t-2)(9t^2 - 12t - 14) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ t = \frac{2 \pm 3\sqrt{2}}{3} \end{cases}$$

+ Với $y = tx$ thì PT thứ nhất của hệ trở thành :

$$2x^3 + t^3x^3 = 10 \Leftrightarrow x^3 = \frac{10}{2+t^3} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{10}{2+t^3}}.$$

+ Vậy ứng với 3 nghiệm t tìm được ở trên thì hệ đã cho có 3 nghiệm là:

$$(1;2), \left(\sqrt[3]{\frac{10}{2+\left(\frac{2+3\sqrt{2}}{3}\right)^3}}; \sqrt[3]{\frac{10 \cdot \left(\frac{2+3\sqrt{2}}{3}\right)^3}{2+\left(\frac{2+3\sqrt{2}}{3}\right)^3}} \right), \left(\sqrt[3]{\frac{10}{2+\left(\frac{2-3\sqrt{2}}{3}\right)^3}}; \sqrt[3]{\frac{10 \cdot \left(\frac{2-3\sqrt{2}}{3}\right)^3}{2+\left(\frac{2-3\sqrt{2}}{3}\right)^3}} \right).$$

2.2.6.10. Xây dựng HPT từ bất đẳng thức.

a) Ý tưởng và cách thức xây dựng.

Trong chứng minh bất đẳng thức và trong giải bài toán tìm GTNN, GTLN của một biểu thức ta thường xuyên phải đánh giá đẳng thức xảy ra khi nào? Khi đó ta thu được các PT tương ứng. Xuất phát từ ý tưởng này, ta có thể xây dựng được nhiều HPT hay và khó, có cách giải độc đáo, góp phần quan trọng vào việc phát triển TDST cho HSG. Sau đây là một số ví dụ minh chứng cho điều vừa nói ở trên.

b) Một số ví dụ :

Ví dụ 1: Ta xét một biểu thức đối xứng theo hai biến x, y , chẳng hạn xét biểu thức :

$$\begin{aligned}P &= (4x^2 + 2y)(4y^2 + 2x) + 4xy \\&= 16x^2y^2 + 8x^3 + 8y^3 + 8xy \\&= 16x^2y^2 + 8(x+y)\left[(x+y)^2 - 3xy\right] + 8xy\end{aligned}$$

+ Đặt $x + y = 1$, khi đó $P = 16x^2y^2 - 16xy + 8$.

+ Bây giờ ta chỉ xét $x \geq 0$ và $y \geq 0$. Ta đi tìm GTLN và GTNN của biểu thức

$$P = 16x^2y^2 - 16xy + 8 \text{ thỏa mãn điều kiện } \begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

+ Đặt $t = xy$, ta có $0 \leq xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{1}{4}$, nên điều kiện của t là : $0 \leq t \leq \frac{1}{4}$.

+ Ta xét hàm số: $P = 16t^2 - 16t + 8, \left(0 \leq t \leq \frac{1}{4}\right)$.

+ Ta có : $P' = 32t - 16, P' = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$.

+ Khi đó ta có : $P(0) = 8, P\left(\frac{1}{2}\right) = 4, P\left(\frac{1}{4}\right) = 5$. Suy ra : $4 \leq P \leq 8$.

+ Hay với x, y không âm và $x + y = 1$ thì $P = (4x^2 + 2y)(4y^2 + 2x) + 4xy \leq 8$.

$$P = (4x^2 + 2y)(4y^2 + 2x) + 4xy = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \end{cases}$$

+ Như vậy ta có HPT (tạm) như sau:
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ (4x^2 + 2y)(4y^2 + 2x) + 4xy = 8 \end{cases}$$

+ Tuy nhiên ta phải không chế điều kiện $x \geq 0, y \geq 0$ và để giả thiết $x + y = 1$ không quá lố, ta xét PT tích sau : $(\sqrt{x+y}-1)(1+\sqrt{x}+\sqrt{y})=0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+y} + \sqrt{x^2+xy} + \sqrt{y^2+xy} - \sqrt{x} - \sqrt{y} - 1 = 0$$

+ Như vậy ta có HPT :
$$\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x^2+xy} + \sqrt{y^2+xy} - \sqrt{x} - \sqrt{y} - 1 = 0 \\ (4x^2 + 2y)(4y^2 + 2x) + 4xy = 8 \end{cases}$$

+ Giải chi tiết hệ trên ta được nghiệm của hệ là: $(1;0), (0;1)$.

Nhận xét: Với cách xây dựng hệ như trên, ta thấy cách xây dựng này chưa có tính tổng quát và vẫn mang tính “mò mẫm”.

+ Ta xét thêm một cách xây dựng khác như sau :

Ví dụ 2: Với mọi $x \geq 0, y \geq 0$, ta có : $(x-y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2}$

+ Mà
$$\frac{(x+y)^2}{2} = 2 \frac{\left[(x+y-\sqrt{xy}) + \sqrt{xy} \right]^2}{4} \geq 2(x+y-\sqrt{xy})\sqrt{xy}$$

+ Suy ra : $x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{xy}(x+y-\sqrt{xy})$ (1)

+ Mặt khác, ta lại có : $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ (2)

+ Kết hợp (1) và (2), ta được: $(x+y)(x^2+y^2) \geq 4xy(x+y-\sqrt{xy})$

+ Khi đó $(x+y)(x^2+y^2) = 4xy(x+y-\sqrt{xy})$ (3) khi và chỉ khi $x = y$.

+ Ta xét một PT khác (đã biết trước cách giải), chẳng hạn PT :

$$2x^3 - 2x^2 - 26x + 51 - \sqrt{7x-5} - \sqrt{9x-2} = 0 \quad (4)$$

+ Trong PT (4), ta thay một vài vị trí của x , bởi y . Chẳng hạn ta thay một vài vị trí của x , bởi y trong PT (4), để được PT mới theo x và y như sau:

$$2x^3 - 2y^2 - 26x + 51 - \sqrt{7y-5} - \sqrt{9x-2} = 0 \quad (5)$$

+ Kết hợp PT (3) và PT (5), được HPT:

$$\begin{cases} (x+y)(x^2+y^2)=4xy(x+y-\sqrt{xy}) & (3) \\ 2x^3-2y^2-26x+51-\sqrt{7y-5}-\sqrt{9x-2}=0 & (5) \end{cases}$$

+ Để giải HPT trên ta làm như sau:

+ Từ cách xây dựng, ta đã biết PT (3) có nghiệm $x = y$.

+ Thay $y = x$ vào PT (5), ta được PT:

$$2x^3 - 2x^2 - 26x + 51 - \sqrt{7x-5} - \sqrt{9x-2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x+1-\sqrt{7x-5}+x+2-\sqrt{9x-2}+2x^3-2x^2-28x+48=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-5x+6}{x+1+\sqrt{7x-5}} + \frac{x^2-5x+6}{x+2+\sqrt{9x-2}} + 2(x^2-5x+6)(x+4)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{x^2-5x+6}{x+1+\sqrt{7x-5}} + \frac{1}{x+2+\sqrt{9x-2}} + 2(x+4) \right] = 0 \quad (6)$$

$$\Leftrightarrow x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=3 \end{cases}$$

+ Với $x \geq \frac{5}{7}$ thì $\frac{1}{x+1+\sqrt{7x-5}} + \frac{1}{x+2+\sqrt{9x-2}} + 2(x+4) > 0$ nên PT (6) vô nghiệm.

+ Kết luận: Hệ PT trên có nghiệm duy nhất: $(2;2), (3;3)$.

Nhận xét: Ngoài các cách làm trên ta có thể xây dựng HPT từ bất đẳng thức bằng cách phát biểu lại bài toán chứng minh bất đẳng thức kèm điều kiện, hoặc phát biểu lại bài toán tìm GTLN, GTNN của một biểu thức. Ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 3: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn điều kiện:

$$x^2 + y^2 + x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}. \text{ Tìm GTNN của biểu thức: } E = x^2 + \frac{1}{x^2} + y^2 + \frac{1}{y^2}$$

+ Để giải bài toán trên ta có thể làm như sau :

$$+ \text{ Ta có : } (x^2 + y^2)^2 = (x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})^2 \leq (x^2 + y^2)(2 - (x^2 + y^2))$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 \leq 2 - (x^2 + y^2) \Rightarrow 0 < x^2 + y^2 \leq 1$$

$$+ \text{ Mặt khác : } (x^2 + y^2)^2 \geq 4x^2y^2$$

$$+ \text{Nên } E = (x^2 + y^2) \left(1 + \frac{1}{x^2 y^2} \right) \geq (x^2 + y^2) \left(1 + \frac{4}{(x^2 + y^2)} \right) = x^2 + y^2 + \frac{4}{x^2 + y^2}$$

+ Đặt $t = x^2 + y^2$ thì $0 < t \leq 1$.

+ Xét hàm số $f(t) = t + \frac{4}{t}, (0 < t \leq 1)$ thì $\min f(t) = f(1) = 5$.

+ Do đó GTNN của $E = 5$ khi $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

+ Từ đó ta xây dựng được HPT sau :
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \\ x^2 + \frac{1}{x^2} + y^2 + \frac{1}{y^2} = 5 \end{cases}$$

+ Giải HPT trên ta được nghiệm : $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$.

Ví dụ 4: Cho hai số thực x, y thay đổi, thỏa mãn : $x^2 + y^2 - xy = 1$.

Tìm GTNN, GTLN của biểu thức sau: $P = x^4 + y^4 - x^2 y^2$.

+ Để giải bài toán trên ta làm như sau :

$$\begin{aligned} + \text{Ta có : } P &= x^4 + y^4 - x^2 y^2 = (x^2 + y^2)^2 - 3x^2 y^2 \\ &= (xy - 1)^2 - 3x^2 y^2 = -2x^2 y^2 + 2xy + 1 \end{aligned}$$

+ Đặt $t = xy$. Ta xét hàm số $f(t) = -2t^2 + 2t + 1, \left(-\frac{1}{3} \leq t \leq 1 \right)$, ta được :

$$\frac{1}{9} \leq f(t) \leq \frac{3}{2}. \text{ Vậy } \max P = \frac{3}{2}, \min P = \frac{1}{9}.$$

+ Ta phát biểu lại bài toán, để được bài toán mới HPT như sau:

+ Tìm m để HPT :
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 1 \\ x^4 + y^4 - x^2 y^2 = m \end{cases}$$
 có nghiệm.

+ Từ cách xây dựng, ta biết rằng HPT có nghiệm khi $\frac{1}{9} \leq m \leq \frac{3}{2}$.

2.2.6.11. Xây dựng HPT từ lượng giác và vector .

a) Ý tưởng và cách thức xây dựng.

Xuất phát từ các PT tiềm ẩn yếu tố lượng giác hoặc xuất phát từ việc chọn các vector có tọa độ phù hợp, kết hợp với sử dụng các bất đẳng thức vector quen thuộc như

$|\vec{a}| + |\vec{b}| \geq |\vec{a} + \vec{b}|$, rồi xét dấu bằng xảy ra, ta có thể tạo ra được các HPT hay và khó.

Sau đây là một số ví dụ minh họa.

b) Một số ví dụ :

Ví dụ 1 : Xuất phát từ đẳng thức sau : $(\sqrt{3}x-1)^2 + (\sqrt{2}y+1)^2 = 1$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 2y^2 - 2\sqrt{3}x + 2\sqrt{2}y + 1 = 0$$

$$+ \text{Đặt } \begin{cases} \sqrt{3}x-1 = \sin \alpha \\ \sqrt{2}y+1 = \cos \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sin \alpha + 1) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \alpha - 1) \end{cases}$$

$$+ \text{Cho } \alpha = \frac{\pi}{4} \text{ ta được : } \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) \end{cases}$$

$$+ \text{Thay các giá trị : } \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) \end{cases} \text{ vào một đẳng thức nào đó.}$$

+ Chẳng hạn thay vào đẳng thức: $x^2 + y^2 + \sqrt{3}x + \sqrt{2}y + a = 0$ ta được:

$$\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) \right]^2 + \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) \right]^2 + \sqrt{3} \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) + \sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) + a = 0$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{5}{4} - \frac{5\sqrt{2}}{6}.$$

$$+ \text{Từ đó ta được HPT (I): } \begin{cases} 3x^2 + 2y^2 - 2\sqrt{3}x + 2\sqrt{2}y + 1 = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 + \sqrt{3}x + \sqrt{2}y - \frac{5}{4} - \frac{5\sqrt{2}}{6} = 0 & (2) \end{cases}$$

+ Để giải HPT (I), ta làm như sau:

$$+ \text{Ta có : PT (1)} \Leftrightarrow (\sqrt{3}x-1)^2 + (\sqrt{2}y+1)^2 = 1$$

$$+ \text{Đặt } \begin{cases} \sqrt{3}x-1 = \sin \alpha \\ \sqrt{2}y+1 = \cos \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{(\sin \alpha + 1)}{\sqrt{3}} \\ y = \frac{(\cos \alpha + 1)}{\sqrt{2}} \end{cases}, \quad (0 \leq \alpha \leq 2\pi)$$

+ Thay vào PT (2) ta được :

$$\frac{1}{3}(\sin^2 \alpha + 2\sin \alpha + 1) + \frac{1}{2}(\cos^2 \alpha - 2\cos \alpha + 1) + \sin \alpha + 1 + \cos \alpha - 1 - \frac{5}{4} - \frac{5\sqrt{2}}{6} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\sin^2 \alpha + \frac{1}{2}\cos^2 \alpha + \frac{5}{3}\sin \alpha - \frac{5}{12} - \frac{5\sqrt{2}}{6} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\sin^2 \alpha + \frac{1}{2}(1 - \sin^2 \alpha) + \frac{5}{3}\sin \alpha - \frac{5}{12} - \frac{5\sqrt{2}}{6} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{6}\sin^2 \alpha + \frac{5}{3}\sin \alpha + \frac{1}{12} - \frac{5\sqrt{2}}{6} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 \alpha - 20\sin \alpha - 1 + 10\sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin \alpha = 10 - \frac{\sqrt{2}}{2} & (\text{TM}) \\ \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} & (\text{KTM}) \end{cases} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ \alpha = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

+ Do $\alpha \in [0; 2\pi]$ nên $\alpha = \frac{\pi}{4}$ hoặc $\alpha = \frac{3\pi}{4}$.

+ Từ đó ta tìm được các nghiệm của HPT (I) là :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right); \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right) \right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right); \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right) \right).$$

Ví dụ 2: Ta xây dựng HPT bằng vector bằng cách chọn: $\begin{cases} \vec{a} = (x+2y, 4y) \\ \vec{b} = (2x+y, 4x) \end{cases}$

+ Khi đó :

$$+) \vec{a} + \vec{b} = (3x+3y, 4x+4y)$$

$$+) |\vec{a}| = \sqrt{(x+2y)^2 + (4y)^2} = \sqrt{x^2 + 4xy + 20y^2}$$

$$+) |\vec{b}| = \sqrt{(2x+y)^2 + (4x)^2} = \sqrt{20x^2 + 4xy + y^2}$$

$$+) |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(3x+3y)^2 + (4x+4y)^2} = \sqrt{25(x+y)^2} = 5|x+y|$$

+ Ta đã biết $|\vec{a}| + |\vec{b}| \geq |\vec{a} + \vec{b}|$, dấu bằng xảy ra khi \vec{a}, \vec{b} cùng hướng, nên ta có:

$$\sqrt{x^2 + 4xy + 20y^2} + \sqrt{20x^2 + 4xy + y^2} \geq 5|x+y| \geq 5(x+y).$$

+ Đẳng thức: $\sqrt{x^2 + 4xy + 20y^2} + \sqrt{20x^2 + 4xy + y^2} = 5(x+y)$ xảy ra khi \vec{a}, \vec{b}

cùng hướng hay $\frac{x+2y}{2x+y} = \frac{4y}{4x} \Leftrightarrow x = \pm y$.

+ Thử lại ta thấy $x = -y$ không thỏa mãn.

+ Vậy đẳng thức $\sqrt{x^2 + 4xy + 20y^2} + \sqrt{20x^2 + 4xy + y^2} = 5(x+y)$ xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

+ Chúng ta kết hợp với một PT khác đã biết trước nghiệm và biết trước cách giải, chẳng hạn ta kết hợp với PT :

$$\sqrt{x^2 - 3x - 2} + x - \sqrt{3x + 4} + (x^2 - 3x - 4)(x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 3x} - \sqrt{3x + 4} + x^3 - x^2 - 9x - 10 = 0 \text{ có nghiệm } x = 4.$$

+ Thay một vài vị trí của x , trong PT: $\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 3x} - \sqrt{3x + 4} + x^3 - x^2 - 9x - 10 = 0$ bởi y , kết hợp với đẳng thức vừa xây dựng trên, ta được HPT:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 4xy + 20y^2} + \sqrt{20x^2 + 4xy + y^2} = 5(x+y) & (1) \\ \sqrt{y^2 - 3t} - \sqrt{3x + 4} + x^3 - y^2 - 9xy - 10 = 0 & (2) \end{cases}$$

+ Để giải HPT trên ta làm như sau:

+ Ta đã biết PT (1) có nghiệm khi và chỉ khi : $x = y$.

+ Thay $x = y$ vào PT (2), ta được PT:

$$\sqrt{x^2 - 3x} - \sqrt{3x + 4} + x^3 - x^2 - 9x - 10 = 0$$

+ Vì $x = -1$ không phải là nghiệm của PT (3) nên khi $x \neq -1$, ta có :

$$+ \text{ PT (3)} \Leftrightarrow \frac{x^2 - 3x - 4}{\sqrt{x^2 - 3x} + 2} + \frac{x^2 - 3x - 4}{x + \sqrt{3x + 4}} + (x^2 - 3x - 4)(x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 3x - 4) \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x} + 2} + \frac{1}{x + \sqrt{3x + 4}} + (x + 2) \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 4 = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x} + 2} + \frac{1}{x + \sqrt{3x + 4}} + (x + 2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ (KTM)} \\ x = 4 \text{ (TM)} \\ \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x} + 2} + \frac{1}{x + \sqrt{3x + 4}} + (x + 2) = 0 \text{ (4)} \end{cases}$$

+ Với điều kiện $\begin{cases} -\frac{4}{3} \leq x \leq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$ thì PT (4) vô nghiệm.

+ Vậy HPT có nghiệm : $(4;4)$.

2.2.6.12. Xây dựng các bài toán về hệ lập ba ẩn.

a) Ý tưởng và cách thức xây dựng.

Xuất phát từ một hàm số $f(t)$ thỏa mãn hai điều kiện: $f(t)$ không phải là hàm đồng biến trên \square và $f(t) + t$ là hàm đồng biến trên \square . Ta có thể xây dựng các bài toán về hệ lập ba ẩn. Sau đây là một số ví dụ minh họa.

b) Một số ví dụ :

Ví dụ 1: Xét hàm số $f(t) = 3t^3 - 2t^2, t \in \square$. Xét hệ :
$$\begin{cases} x = f(z) \\ y = f(x) \\ z = f(y) \end{cases}$$

+ Ta có bài toán : Giải HPT :
$$\begin{cases} x = 3z^3 - 2z^2 \\ y = 3x^3 - 2x^2 \\ z = 3y^3 - 2y^2 \end{cases}$$

+ Giải sử $x = \max\{x, y, z\}$, thế thì $x \geq y \geq z$ hoặc $x \geq z \geq y$. Xét trường hợp $x \geq y \geq z$ (trường hợp xét tương tự và các nghiệm trùng với các nghiệm của trường hợp đã xét).

Hệ PT đã cho tương đương với :
$$\begin{cases} x + z = 3z^3 - 2z^2 + z \\ y + x = 3x^3 - 2x^2 + x \quad (*) \\ z + y = 3y^3 - 2y^2 + y \end{cases}$$

+ Xét hàm số $f(t) = 3t^3 - 2t^2 + t, t \in \square$. Khi đó, hệ (*) có dạng:
$$\begin{cases} x + z = f(z) \\ y + x = f(x) \\ z + y = f(y) \end{cases}$$

+ Mặt khác ta có : $f'(t) = 9t^2 - 4t + 1 > 0, \forall t \in \square$. Suy ra $f(t)$ đồng biến trên \square .

+ Khi đó $y \geq z \Rightarrow f(y) \geq f(z) \Rightarrow z + y \geq x + z \Rightarrow y \geq x$.

+ Vậy: $x = y$. Suy ra $f(x) = f(y)$, hay $y + x = y + z$ hay $x = z$.

+ Thay $x = y = z$ vào HPT ta được: $3x^3 - 2x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{0; 1; -\frac{1}{3}\right\}$.

+ Vậy HPT đã cho có 3 nghiệm: $(0;0;0), (1;1;1), \left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

Chú ý: Nếu ta không cộng thêm x, y, z vào từng PT để thu được hàm số đồng biến $f(t) = 3t^3 - 2t^2 + t, t \in \mathbb{R}$, như đã trình bày trong lời giải trên mà xét trực tiếp hàm số $g(t) = 3t^3 - 2t^2$ thì sẽ gặp rất nhiều khó khăn, do hàm số $g(t) = 3t^3 - 2t^2$ không phải là hàm đồng biến.

Ví dụ 2: Xuất phát từ: $(x+1)(y+1) = z+1$, ta có: $xy = z - x - y$. Từ đây lần lượt thay bộ $(x; y)$ bởi $(y; z), (z; x)$ ta được bài toán sau. Lưu ý rằng độ hay và độ khó của đề bài phụ thuộc rất nhiều vào PT xuất phát.

+ Giải HPT(II) :
$$\begin{cases} xy = z - x - y \\ xz = y - x - z \\ yz = x - y - z \end{cases}$$

+ Để giải hệ trên ta làm như sau:

+ Cộng hai vế của PT thứ nhất với $(x + y + 1)$ ta được:

$$xy + x + y + 1 = z + 1 \Leftrightarrow (x+1)(y+1) = z+1$$

+ Tương tự ta có: (II) $\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(y+1) = z+1 & (1) \\ (x+1)(z+1) = y+1 & (2) \\ (y+1)(z+1) = x+1 & (3) \end{cases}$

+ Nhân (1), (2), (3) theo vế ta được:

$$[(x+1)(y+1)(z+1)]^2 = (x+1)(y+1)(z+1) \quad (4)$$

+ Nếu $x = -1$ thì từ (1), (2), (3) suy ra: $y = z = -1$.

+ Giả sử $x \neq -1, y \neq -1, z \neq -1$. Khi đó (4) $\Leftrightarrow (x+1)(y+1)(z+1) = 1 \quad (5)$

+ Từ (5) và (3) suy ra: $(x+1)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x \in \{0; -2\}$.

+ Thay $x = 0$ vào hệ (II), ta được:

$$\begin{cases} y = z \\ yz = -y - z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ y^2 + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y; z) = (0; 0) \\ (y; z) = (-2; -2) \end{cases}$$

+ Thay $x = -2$ vào hệ (II), ta được:
$$\begin{cases} -2y = z + 2 - y \\ -2z = y + 2 - z \\ yz = -2 - y - z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + z + 2 = 0 \\ yz + y + z = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y+z=-2 \\ yz=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y;z)=(0;-2) \\ (y;z)=(-2;0) \end{cases}$$

+ Vậy nghiệm của hệ là: $(0;0;0), (-1;-1;-1), (-2;-2;0)$ và các hoán vị.

2.2.6.13. Sử dụng căn bậc n của số phức để xây dựng và giải hệ phương trình.

+ Cho số phức $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi), r>0$. Khi đó các căn bậc n của z là

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi+k2\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi+k2\pi}{n} \right), k=0,1,2,\dots,n-1.$$

+ Căn bậc hai của số phức $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi), r>0$ là:

$$z_0 = \sqrt{r} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right), z_1 = -\sqrt{r} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right)$$

+ Các căn bậc ba của số phức $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi), r>0$ là:

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[3]{r} \left(\cos \frac{\varphi}{3} + i \sin \frac{\varphi}{3} \right), \\ z_1 &= \sqrt[3]{r} \left(\cos \frac{\varphi+2\pi}{3} + i \sin \frac{\varphi+2\pi}{3} \right), \\ z_2 &= \sqrt[3]{r} \left(\cos \frac{\varphi+4\pi}{3} + i \sin \frac{\varphi+4\pi}{3} \right). \end{aligned}$$

+ Một PT nghiệm phức $f(z)=0$, với $z=x+iy$, ta có thể biến đổi thành:

$$h(x;y)+ig(x;y)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} h(x;y)=0 \\ g(x;y)=0 \end{cases}$$

+ Nghĩa là một PT nghiệm phức bằng cách tách phần thực và phần ảo luôn có thể đưa về HPT.

2.2.6.13.1. Xây dựng các HPT bằng cách lũy thừa một số phức cho trước.

a) Ý tưởng và cách thức xây dựng.

Xuất phát từ một số phức tùy ý. Giả sử số phức tùy ý này là lũy thừa bậc n của một số phức khác dạng $x+yi$, $n \geq 2, n \in \mathbb{Z}$ (bậc n do ta chọn). Khi đó ta sẽ thu được một đẳng thức trên tập số phức. Thực hiện khai triển hai vế của đẳng thức này, biến đổi và rút gọn, ta được một đẳng thức mới, sao cho mỗi vế của đẳng thức mới là số phức. Sử dụng định nghĩa hai số phức bằng nhau, ta cho phần thực bằng nhau,

phần ảo bằng nhau. Từ đây ta có được một HPT đối với hai biến x và y trên tập số thực. Để thể hiện cho cách làm này, ta cùng nhau xét ví dụ sau đây.

b) Một số ví dụ:

Ví dụ 1: Xét số phức $z = 5\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 5\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.

+ Giả sử $x + yi$ là số phức thỏa mãn điều kiện:

$$(x + yi)^3 = 5\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \Leftrightarrow x^3 + 3x^2yi + 3xy^2i^2 + y^3i^3 = \frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 - 6xy^2 + (6x^2y - 2y^3)i = 5 + 5\sqrt{3}i \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - 6xy^2 = 5 \\ 6x^2y - 2y^3 = 5\sqrt{3} \end{cases}$$

+ Ta được bài toán: Giải HPT (I) : $\begin{cases} 2x^3 - 6xy^2 = 5 & (1) \\ 6x^2y - 2y^3 = 5\sqrt{3} & (2) \end{cases}$

+ Để giải HPT (I), ta làm như sau:

+ Nhân hai vế của (2) với i rồi cộng với (1), ta được:

$$2x^3 - 6xy^2 + (6x^2y - 2y^3)i = 5 + 5\sqrt{3}i \Leftrightarrow x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3)i = \frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2yi + 3xy^2i^2 + y^3i^3 = \frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i \Leftrightarrow (x + yi)^3 = 5\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

+ Vậy $x + yi$ là căn bậc ba của số phức $z = 5\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 5\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

+ Mà z có căn bậc ba là:

$$z_0 = \sqrt[3]{5}\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right),$$

$$z_1 = \sqrt[3]{5}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{5}\left(\cos\frac{7\pi}{9} + i\sin\frac{7\pi}{9}\right),$$

$$z_2 = \sqrt[3]{5}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3} + 4\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3} + 4\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{5}\left(\cos\frac{13\pi}{9} + i\sin\frac{13\pi}{9}\right).$$

+ Vậy các nghiệm của HPT là: $\begin{cases} x = \sqrt[3]{5}\cos\frac{\pi}{9} \\ y = \sqrt[3]{5}\sin\frac{\pi}{9} \end{cases}, \begin{cases} x = \sqrt[3]{5}\cos\frac{7\pi}{9} \\ y = \sqrt[3]{5}\sin\frac{7\pi}{9} \end{cases}, \begin{cases} x = \sqrt[3]{5}\cos\frac{13\pi}{9} \\ y = \sqrt[3]{5}\sin\frac{13\pi}{9} \end{cases}$

Chú ý: Cách giải này rất độc đáo và nhanh hơn nhiều so với cách sử dụng tính đẳng cấp của hệ, rồi đưa về PT đa thức bậc ba.

Ví dụ 2: Từ $(x+iy)^4 = \sqrt{3} + i$, ta có:

$$\begin{aligned} x^4 + 4x^3yi + 6x^2y^2i^2 + 4xy^3i^3 + y^4i^4 &= \sqrt{3} + i \\ \Leftrightarrow (x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + 4(x^3y - y^3x)i &= \sqrt{3} + i \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 6x^2y^2 + y^4 = \sqrt{3} \\ 4(x^3y - y^3x) = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

+ Ta có bài toán : Giải HPT (II) :
$$\begin{cases} x^4 - 6x^2y^2 + y^4 = \sqrt{3} & (1) \\ x^3y - y^3x = \frac{1}{4} & (2) \end{cases}$$

+ Để giải HPT (II), ta làm như sau :

+ Xét số phức $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$.

+ Vì $z^4 = (x + yi)^4 = x^4 + 4x^3yi + 6x^2y^2i^2 + 4xy^3i^3 + y^4i^4$
 $= (x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + 4(x^3y - y^3x)i.$

+ Nên từ hệ đã cho ta có : $z^4 = \sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right).$

+ Vậy $z = x + yi$ là một căn bậc bốn của số phức $2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right).$

+ Các căn bậc bốn của số phức $2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ là :

$$\begin{aligned} &\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{24} + i\sin\frac{\pi}{24}\right), \\ &\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{24} + i\sin\frac{13\pi}{24}\right), \\ &\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{24} + i\sin\frac{25\pi}{24}\right), \\ &\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{37\pi}{24} + i\sin\frac{37\pi}{24}\right). \end{aligned} \quad \text{Hay} \quad \begin{cases} x + yi = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{24} + i\sin\frac{\pi}{24}\right) \\ x + yi = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{24} + i\sin\frac{13\pi}{24}\right) \\ x + yi = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{24} + i\sin\frac{25\pi}{24}\right) \\ x + yi = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{37\pi}{24} + i\sin\frac{37\pi}{24}\right) \end{cases}$$

+ Vậy HPT đã cho có 4 nghiệm :

$$\begin{cases} x = \sqrt[4]{2}\cos\frac{\pi}{24} \\ y = \sqrt[4]{2}\sin\frac{\pi}{24} \end{cases}; \begin{cases} x = \sqrt[4]{2}\cos\frac{13\pi}{24} \\ y = \sqrt[4]{2}\sin\frac{13\pi}{24} \end{cases}; \begin{cases} x = \sqrt[4]{2}\cos\frac{25\pi}{24} \\ y = \sqrt[4]{2}\sin\frac{25\pi}{24} \end{cases}; \begin{cases} x = \sqrt[4]{2}\cos\frac{37\pi}{24} \\ y = \sqrt[4]{2}\sin\frac{37\pi}{24} \end{cases}$$

2.2.6.13.2. Xây dựng các HPT từ hai số phức cho trước.

a) Ý tưởng và cách thức xây dựng.

Xuất phát từ hai số phức tùy ý. Theo chiều đảo của định lý Vi-et, ta có hai số phức này là nghiệm của một PT bậc hai ẩn z trên tập số phức. Biến đổi PT bậc hai vừa có đến một PT mới có sự xuất hiện đầy đủ của z, \bar{z} , gọi là PT (*).

Giả sử $z = x + yi \Rightarrow \bar{z} = x - yi$. Thay vào PT (*), biến đổi sao cho hai vế của PT thu được là hai số phức. Vận dụng định nghĩa hai số phức bằng nhau ta cũng được một HPT theo hai biến x, y trên trường số thực. Sau đây là một số ví dụ minh họa.

b) Một số ví dụ :

Ví dụ 1 : Xét hai số phức : $z_1 = 2 + i, z_2 = 1 - i$.

+ Ta có : $\begin{cases} z_1 + z_2 = 3 \\ z_1 z_2 = 3 - i \end{cases}$. Suy ra z_1, z_2 là hai nghiệm của PT $z^2 - 3z + 3 - i = 0$

$$\Leftrightarrow z - 3 + \frac{3 - i}{z} = 0 \Leftrightarrow z + \frac{3}{z} - \frac{i}{z} = 3 \Leftrightarrow z + \frac{3\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} - \frac{\bar{z}i}{z \cdot \bar{z}} = 3 \quad (1)$$

+ Giả sử $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$. Khi đó PT (1) được viết lại như sau :

$$x + yi + \frac{3x - 3yi}{x^2 + y^2} - \frac{xi + y}{x^2 + y^2} = 3$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{3x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} + \left(y - \frac{3y}{x^2 + y^2} - \frac{x}{x^2 + y^2} \right) i = 3.$$

$$+ \text{Từ đó ta có HPT : } \begin{cases} x + \frac{3x - y}{x^2 + y^2} = 3 & (2) \\ y - \frac{x + 3y}{x^2 + y^2} = 0 & (3) \end{cases}$$

+ Như vậy để giải HPT trên, ta nhân PT (3) với i , cộng với PT (2) và làm ngược lại quy trình trên, ta tìm được nghiệm của hệ là : $(2; 1), (1; -1)$.

Ví dụ 2 : Xét hai số phức : z_1, z_2 như sau: $\begin{cases} z_1 = 7 - \sqrt{5}i \\ z_2 = \sqrt{5}i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 + z_2 = 7 \\ z_1 z_2 = 7\sqrt{5}i + 5 \end{cases}$

+ Vậy z_1, z_2 là nghiệm của PT: $z^2 - 7z + 5 + 7\sqrt{5}i = 0 \Leftrightarrow z - 7 + \frac{5 + 7\sqrt{5}i}{z} = 0$

$$\Leftrightarrow z + \frac{5}{z} + \frac{7\sqrt{5}i}{z} = 7 \Leftrightarrow z + \frac{5\bar{z}}{z\bar{z}} + \frac{7\sqrt{5}i\bar{z}}{z\bar{z}} = 7.$$

+ Giả sử $z = x + yi$, với $(x, y \in \mathbb{R})$. Khi đó PT trên viết lại thành :

$$\begin{aligned}
& x + yi + \frac{5(x - yi)}{x^2 + y^2} + \frac{7\sqrt{5}(xi + y)}{x^2 + y^2} = 7 \\
& \Leftrightarrow x + yi + \frac{5x + 7\sqrt{5}y}{x^2 + y^2} + \frac{7\sqrt{5}x - 5y}{x^2 + y^2}i = 7 \\
& \Leftrightarrow x + \frac{5x + 7\sqrt{5}y}{x^2 + y^2} - 7 + \left(y + \frac{7\sqrt{5}x - 5y}{x^2 + y^2} \right)i = 0 \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{5x + 7\sqrt{5}y}{x^2 + y^2} - 7 = 0 \\ y + \frac{7\sqrt{5}x - 5y}{x^2 + y^2} = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

+Ta có bài toán sau : Giải HPT
$$\begin{cases} x + \frac{5x + 7\sqrt{5}y}{x^2 + y^2} = 7 \\ y + \frac{7\sqrt{5}x - 5y}{x^2 + y^2} = 0 \end{cases}$$

+ Hướng dẫn: Từ cách sáng tác HPT ta thấy ngay hệ có hai nghiệm:

$$\begin{cases} x = 7 \\ y = -\sqrt{5} \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt{5} \end{cases}.$$

Nhận xét: Bằng cách làm tương tự ta có thể tạo ra một loạt các HPT khác theo phương pháp này.

2.2.6.14. Xây dựng các HPT từ các HPT đã có sẵn.

a) Ý tưởng và cách thức xây dựng.

Ngoài các phương pháp đã nêu ở trên, còn có rất nhiều cách khác để xây dựng các HPT. Tuy nhiên cách đơn giản nhất để xây dựng nên một bài toán mới nói chung và xây dựng một HPT mới nói riêng là xuất phát từ bài toán gốc, sau đó "*chế biến*" lại bài toán gốc này để giảm độ khó đi hoặc tăng độ khó lên để được bài toán theo ý mình. Các bạn cần lưu ý hầu hết các bài toán hay và khó đều được tạo ra theo cách này, góp phần to lớn vào việc phát triển TDST cho HSG. Để kết thúc nội dung này, chúng tôi xin trình bày thêm một số ví dụ minh họa.

b) Một số ví dụ :

Ví dụ 1: Ta cùng nhau đi xét sự giống và khác nhau giữa hai HPT :

$$\begin{aligned}
\text{(I)} \quad & \begin{cases} (23 - 3x)\sqrt{7 - x} + (3y - 20)\sqrt{6 - y} = 0 & (1) \\ \sqrt{2x + y + 2} - \sqrt{-3x + 2y + 8} + 3x^2 - 14x - 8 = 0 & (2) \end{cases}
\end{aligned}$$

$$(II) \begin{cases} (2012-3x)\sqrt{4-x} + (6y-2009)\sqrt{3-2y} = 0 & (3) \\ 2\sqrt{7x-8y} + 3\sqrt{14x-18y} = x^2 + 6x + 13 & (4) \end{cases}$$

Nhìn vào hai hệ ta có cảm giác rằng hai hệ trên rất giống nhau, vậy chúng có giống nhau hoàn toàn? Trước khi phân tích kĩ hơn, ta cùng quan tâm tới lời giải của hai hệ trên.

$$+ \text{ Lời giải hệ (I) : Điều kiện : } \begin{cases} x \leq 7 \\ y \leq 6 \\ 2x + y + 2 \geq 0 \\ -3x + 2y + 8 \geq 0 \end{cases}$$

$$+ \text{ Ta có : PT (1)} \Leftrightarrow [3(7-x)+2]\sqrt{7-x} = [3(6-y)+2]\sqrt{6-y} \quad (5)$$

$$+ \text{ Xét hàm số } f(t) = (3t+2)\sqrt{t}, t \geq 0. \text{ Có } f'(t) = 3\sqrt{t} + \frac{3t+2}{2\sqrt{t}} > 0, \forall t > 0$$

$$+ \text{ Nên PT (5)} \Leftrightarrow f(7-x) = f(6-y) \Leftrightarrow 7-x = 6-y \Leftrightarrow y = x-1.$$

+ Thay $y = x-1$ vào PT (2) ta được:

$$\sqrt{3x+1} - \sqrt{6-x} + 3x^2 - 14x - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x+1} - 4 + 1 - \sqrt{6-x} + 3x^2 - 14x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x-15}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{x-5}{1+\sqrt{6-x}} + (x-5)(3x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-5) \left(\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{1}{1+\sqrt{6-x}} + (3x+1) \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-5=0 \\ \frac{3}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{1}{1+\sqrt{6-x}} + (3x+1) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$+ \text{ Ta có : } \frac{3}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{1}{1+\sqrt{6-x}} + (3x+1) > 0, \forall x \in \left[-\frac{1}{3}; 6\right] \text{ nên PT (6) vô nghiệm.}$$

$$+ \text{ Với } x=5 \Rightarrow y=4 \text{ (t/m)}$$

+ Kết luận: Hệ (I) có nghiệm (5;4).

+ Lời giải hệ (II) :

$$+ \text{Điều kiện : } \begin{cases} x \leq 4 \\ y \leq \frac{3}{2} \\ 7x - 8y \geq 0 \\ 14x - 18y \geq 0 \end{cases}$$

$$+ \text{Ta có : PT (3)} \Leftrightarrow [3(4-x) + 2000]\sqrt{4-x} = [3(3-2y) + 2000]\sqrt{3-2y} \quad (7)$$

$$+ \text{Xét hàm số } f(t) = (3t + 2000)\sqrt{t}, t \geq 0.$$

$$+ \text{Có : } f'(t) = 3\sqrt{t} + \frac{3t + 2000}{2\sqrt{t}} > 0, \forall t \geq 0.$$

$$+ \text{Nên PT (7)} \Leftrightarrow f(4-x) = f(3-2y) \Leftrightarrow 4-x = 3-2y \Leftrightarrow y = \frac{x-1}{2}.$$

$$+ \text{Thay } y = \frac{x-1}{2} \text{ vào PT (2) được :}$$

$$2\sqrt{7x-4(x-1)} + 3\sqrt{14x-9(x-1)} = x^2 + 6x + 13$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3x+4} + 3\sqrt{5x+9} = x^2 + 6x + 13$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3x+4} - 2(x+2) + 3\sqrt{5x+9} - 3(x+3) = x^2 + x$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x(x+1)}{\sqrt{3x+4} + (x+2)} - \frac{3x(x+1)}{\sqrt{5x+9} + (x+3)} = x(x+1)$$

$$\Leftrightarrow x(x+1) \left(\frac{2}{\sqrt{3x+4} + (x+2)} + \frac{3}{\sqrt{5x+9} + (x+3)} + 1 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow y=-\frac{1}{2} \quad (\text{TM}) \\ x=-1 \Rightarrow y=-1 \quad (\text{TM}) \\ \frac{2}{\sqrt{3x+4} + (x+2)} + \frac{3}{\sqrt{5x+9} + (x+3)} + 1 = 0 \quad (8) \end{cases}$$

$$+ \text{Với } -\frac{4}{3} \leq x \leq 4 \text{ thì } \frac{2}{\sqrt{3x+4} + (x+2)} + \frac{3}{\sqrt{5x+9} + (x+3)} + 1 > 0.$$

+ Suy ra PT (8) vô nghiệm.

+ Kết luận: Hệ (II) có hai nghiệm : $\left(0; -\frac{1}{2}\right), (-1; -1)$.

Nhận xét: Sau khi xem xét xong lời giải của hai hệ ta thấy, lời giải của chúng "na ná" nhau nhưng rõ ràng hệ (II) khó hơn hệ (I). Vậy hệ (II) phải chẳng được "chế biến" lại từ hệ (I) và sau đó được làm tăng độ khó lên? Đến đây, các bạn đã tự có câu trả lời cho mình. Chúng ta tiếp tục xét thêm một ví dụ nữa để làm sáng tỏ thêm vấn đề này.

Ví dụ 2: Giải các HPT sau :

$$(III) \begin{cases} 2xy - 2y + \sqrt{x} = 2y\sqrt{2x-1}\sqrt{x^2+x-1} & (9) \\ 2x^3y - x^2 = \sqrt{x^4+x^2} - 2x^3y\sqrt{4y^2+1} & (10) \end{cases}$$

$$(IV) \begin{cases} \left(\sqrt{x^2+1} - 4x^2y + 2\right)\left(\sqrt{4y^2+1} + 1\right) = 8x^2y^3 & (11) \\ 4y^2\sqrt{x-1} + 2y^2\sqrt{9-4x} = 26y^2 - 13y + 2 & (12) \end{cases}$$

+ Trước tiên chúng ta vẫn quan tâm tới lời giải của hai hệ.

+ Lời giải HPT (III) :

+ Điều kiện : $x \geq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

+ Ta có PT (10) tương đương : $2y + 2y\sqrt{(2y)^2+1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}$ (13)

+ Với $x > 0$ thì từ PT (13) suy ra : $y > 0$.

+ Xét hàm số $f(t) = t + t\sqrt{t^2+1}$ có $f'(t) = 1 + \sqrt{t^2+1} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}} > 0, \forall t > 0$.

+ Nên hàm số $f(t) = t + t\sqrt{t^2+1}$ đồng biến trên $[0; +\infty)$.

+ Từ PT (13), ta có : $f(2y) = f\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow 2y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2x}$

+ Thế vào PT (9), được : $x-1+x\sqrt{x} = \sqrt{2x-1}\sqrt{x^2+x-1}$ (14)

+ Đặt $\begin{cases} \vec{a} = (\sqrt{x}; \sqrt{x-1}) \\ \vec{b} = (x; \sqrt{x-1}) \end{cases}$.

+ Khi đó PT (14) tương đương: $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng

$$\Leftrightarrow x\sqrt{x-1} = \sqrt{x}\sqrt{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \text{ (KTM)} \\ x=1 \text{ (TM)} \end{cases} \Rightarrow x=1 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \text{ (TM)}$$

+ Kết luận: Hệ (III) có nghiệm: $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

+ Lời giải hệ (IV): Điều kiện: $1 \leq x \leq \frac{9}{4}$.

+ Với $y=0$ thì hệ vô nghiệm.

+ Với $y \neq 0$. PT (11) tương đương: $\frac{\sqrt{x^2+1}-4x^2y+x}{\sqrt{4y^2+1}-1} 4y^2 = 8x^2y^3$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2+1}-4x^2y+x}{\sqrt{4y^2+1}-1} = 2x^2y \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}-4x^2y+x = 2x^2y\sqrt{4y^2+1}-2x^2y$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}+x = 2x^2y(\sqrt{4y^2+1}+1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} \left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+1 \right) = 2y(\sqrt{(2y)^2+1}+1) \quad (15)$$

+ Xét hàm số : $f(t) = t(\sqrt{t^2+1}+1), t \in \mathbb{R}$.

+ Có $f'(t) = \sqrt{t^2 + 1} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 1}} + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$

+ Nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên \mathbb{R} .

+ Khi đó PT (15) $\Leftrightarrow f(2y) = f\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow 2y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2x}$

+ Thay $y = \frac{1}{2x}$ vào PT (12), ta được :

$$2\sqrt{x-1} + \sqrt{9-4x} = 4x^2 - 13x + 13$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{4x-4} - 1) + (\sqrt{9-4x} - 2) = (x-2)(4x-5)$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x-5}{\sqrt{4x-4}+1} + \frac{5-4x}{\sqrt{9-4x}+2} = (x-2)(4x-5)$$

$$\Leftrightarrow (4x-5) \left[\frac{\sqrt{9-4x}+2-\sqrt{4x-4}-1}{(\sqrt{4x-4}+1)(\sqrt{9-4x}+2)} \right] = (x-2)(4x-5)$$

$$\Leftrightarrow (4x-5) \left[\frac{(\sqrt{9-4x}-1) + (2+\sqrt{4x-4})}{(\sqrt{4x-4}+1)(\sqrt{9-4x}+2)} \right] = (x-2)(4x-5)$$

$$\Leftrightarrow (4x-5) \left[\frac{\frac{8-4x}{\sqrt{9-4x}+1} + \frac{8-4x}{2+\sqrt{4x-4}}}{(\sqrt{4x-4}+1)(\sqrt{9-4x}+2)} \right] = (x-2)(4x-5)$$

$$\Leftrightarrow (4x-5)(2-x) \left[\frac{\frac{4}{\sqrt{9-4x}+1} + \frac{4}{2+\sqrt{4x-4}}}{(\sqrt{4x-4}+1)(\sqrt{9-4x}+2)} \right] = (x-2)(4x-5)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \Rightarrow y=\frac{1}{4} \\ x=\frac{5}{4} \Rightarrow y=\frac{2}{5} \end{cases} \quad (\text{TM})$$

+ Kết luận: Hệ có hai nghiệm : $\left(2; \frac{1}{4}\right), \left(\frac{5}{4}; \frac{2}{5}\right)$.

Nhận xét:

Qua hai lời giải trên ta thấy, bản chất của PT (10) và PT (11) là giống nhau, xuất phát từ PT (10) thực hiện nhóm và nhân liên hợp ta được PT (11). Để làm tăng độ khó của HPT (IV) lên nữa, ta lại kết hợp kết quả của PT (11) là $x = \frac{1}{2y}$ với một PT vô tỉ khác (đã biết trước cách giải). Chẳng hạn PT cần kết hợp là:

$$2\sqrt{x-1} + \sqrt{9-4x} = 4x^2 - 13x + 13 \quad (16).$$

Thay $x = \frac{1}{2y}$ vào vị trí của x , chẳng hạn ta thay $x = \frac{1}{2y}$ vào PT (16) như sau:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x-1} + \sqrt{9-4x} &= 4\left(\frac{1}{2y}\right)^2 - 13\frac{1}{2y} + 13 \\ \Leftrightarrow 4y^2\sqrt{x-1} + 2y^2\sqrt{9-4x} &= 26y^2 - 13y + 2 \quad (12) \end{aligned}$$

+ Ta được PT (12).

+ Kết hợp PT (11) và PT (12) ta được HPT (IV) như đã biết.

Nhận xét: Muốn xây dựng được các HPT hay và khó, người xây dựng phải nắm thật nhuần nhuyễn các kỹ thuật sáng tạo PT vô tỉ.

Có rất, rất nhiều cách để tạo ra các HPT, tuy nhiên dù là các nào đi nữa, thì chúng ta phải tuân theo một nguyên tắc là sau khi một bài toán mới được tạo ra thì HS phải có chỗ để "vịn vào" mà tìm được lời giải, đó mới là một bài toán hay. Một bài toán được đánh giá là hay nếu như bài toán đó là bài toán cực khó, nhưng lại có rất nhiều chỗ để "vịn vào" để tìm được lời giải, nhưng những chỗ có thể "vịn vào" đó đã được tác giả giấu đi một cách khéo léo.

Để tạo ra một bài toán hay và khó, giúp HS phát triển được nhiều TDST trong quá trình học tập của mình, là điều không dễ, nó đòi hỏi người xây dựng phải dành nhiều thời gian, tâm sức và trí tuệ trong quá trình xây dựng.

PHỤ LỤC 3
GIỚI THIỆU MỘT SỐ BÀI TOÁN HPT
THI HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH THÀNH PHỐ TRONG CẢ NƯỚC
TRONG NHỮNG NĂM GẦN ĐÂY

1. ĐỀ BÀI

Bài 1: Giải HPT
$$\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{x-y-1} = 1 \\ y^2 + x + 2y\sqrt{x} - y^2x = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{Q})$$

(HSG Quảng Bình 2011)

Bài 2: Giải HPT
$$\begin{cases} 4x^2 + 4xy + y^2 + 2x + y = 2 \\ 8\sqrt{1-2x} + y^2 - 9 = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{Q})$$

(HSG Đắk Lắk 2011)

Bài 3: Giải HPT
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ 4x^2 + 3x - \frac{57}{25} = -y(3x+1) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{Q})$$

(HSG tỉnh Nghệ An 2011)

Bài 4: Giải HPT
$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 35 \\ 2x^2 + 3y^2 = 4x - 9y \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{Q})$$

(HSG tỉnh Yên Bái 2011)

Bài 5: Giải HPT
$$\begin{cases} 4x^2 + y^4 - 4xy^3 = 1 \\ 4x^2 + 2y^2 - 4xy = 2 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{Q})$$

(HSG tỉnh Lâm Đồng 2011)

Bài 6: Giải HPT
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{8xy}{x+y} = 16 \\ \frac{x^2}{8y} + \frac{2x}{3} = \sqrt{\frac{x^3}{3y} + \frac{x^2}{4}} - \frac{x}{2} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{Q})$$

(HSG tỉnh Nghệ An 2012)

Bài 7: Giải HPT
$$\begin{cases} \sqrt{4x+y} + \sqrt{2x+y} = 2 \\ \sqrt{2x+y} + x + y = 1 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{Q})$$

(HSG tỉnh Nam Định 2012)

Bài 8: Giải HPT
$$\begin{cases} \sqrt{3x+y} + \sqrt{x+y} = 2 \\ \sqrt{x+y} + x - y = 1 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{Q})$$

(HSG tỉnh Quảng Ninh 2012)

Bài 9: Giải HPT
$$\begin{cases} (2012-3x)\sqrt{4-x} + (6y-2009)\sqrt{3-2y} = 0 \\ 2\sqrt{7x-8y} + 3\sqrt{14x-18y} = x^2 + 6x + 13 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{Q})$$

(HSG Olympic 30/04/2012)

Bài 10: Giải HPT $\begin{cases} x^3 + xy^2 = y^6 + y^4 \\ \sqrt{3x+1} + \sqrt{y^2+3} = 4 \end{cases} (x, y \in \mathbb{Q})$
(HSG tỉnh Quảng Bình 2012)

Bài 11: Giải HPT $\begin{cases} 2y^3 + y + 2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x} \\ \sqrt{2y^2+1} + y = 4 + \sqrt{x+4} \end{cases} (x, y \in \mathbb{Q})$
(HSG tỉnh Vĩnh Phúc 2013)

Bài 12: Giải HPT $\begin{cases} (\sqrt{x^2+1} + x)(\sqrt{y^2+1} + y) = 1 \\ 4\sqrt{x+2} + \sqrt{22-3x} = y^2 + 8 \end{cases} (x, y \in \mathbb{Q})$
(HSG Nam Định 2013)

Bài 13: Giải HPT $\begin{cases} \left(\frac{1-x^2}{x^2}\right)^3 + xy + \frac{3}{2} = y^3 \\ (xy+2)^2 + \frac{1}{x^2} = 2y + \frac{4}{x} \end{cases} (x, y \in \mathbb{Q})$
(HSG tỉnh Hà Tĩnh 2013)

Bài 14: Giải HPT $\begin{cases} \sqrt{x+2y+3} + \sqrt{9x+10y+11} = 10 \\ \sqrt{12x+13y+14} + \sqrt{28x+29y+30} = 20 \end{cases} (x, y \in \mathbb{Q})$
(HSG Olympic 30/04/2013)

Bài 15: Giải HPT $\begin{cases} x^3(3y-2) = -8 \\ x(y^3+2) = -6 \end{cases} (x, y \in \mathbb{Q})$
(HSG Thành Phố Hà Nội 2013)

Bài 16: Giải HPT $\begin{cases} x^3 + 3x^2 - 13x - 15 = \frac{8}{y^3} - \frac{8}{y} \\ y^2 + 4 = 5y^2(x^2 + 2x + 2) \end{cases} (x, y \in \mathbb{Q})$
(HSG tỉnh Quảng Nam 2014)

Bài 17: Giải HPT $\begin{cases} (2x-1)\sqrt{x+y} = (6-x-y)\sqrt{2-x} \\ 2\sqrt[3]{12x^2+3xy-18x} = x^3 - 6x - y + 5 \end{cases} (x, y \in \mathbb{Q})$
(HSG tỉnh Bắc Ninh 2014)

Bài 18: Giải HPT $\begin{cases} x^2y + xy + 2x - 12y - 24 = 0 \\ x^3 - y^3 = 2(x^2 + y^2 + xy) + 3(x - y - 2) \end{cases} (x, y \in \mathbb{Q})$
(HSG tỉnh Đồng Nai 2014)

Bài 19: Giải HPT $\begin{cases} \sqrt{7x+y} - \sqrt{2x+y} = 4 \\ 2\sqrt{2x+y} - \sqrt{5x+8} = 2 \end{cases} (x, y \in \mathbb{Q})$
(HSG Thái Nguyên 2014)

2. LỜI GIẢI

Bài 1: Giải HPT
$$\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{x-y-1} = 1 \\ y^2 + x + 2y\sqrt{x} - y^2x = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

(HSG Quảng Bình 2011)

Lời giải:

+ Điều kiện:
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x - y - 1 \geq 0 \end{cases}.$$

+ Khi đó: $(1) \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 + \sqrt{x-y-1} \Leftrightarrow x = x - y + 2\sqrt{x-y} - 1$

$$\Leftrightarrow y = 2\sqrt{x-y-1} \Leftrightarrow y^2 = 4(x-y-1)$$

$$\Leftrightarrow (y+2)^2 = 4x \Leftrightarrow y+2 = 2\sqrt{x} \quad (3)$$

$$(2) \Leftrightarrow (y + \sqrt{x})^2 = y^2x \Leftrightarrow y + \sqrt{x} = y\sqrt{x} \quad (4)$$

+ Từ (3), (4), suy ra:
$$\begin{cases} y+2 = 2\sqrt{x} \\ y + \sqrt{x} = y\sqrt{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = \frac{y+2}{2} \\ y^2 - y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$$

+ So điều kiện được nghiệm của hệ là: $\left(\frac{1}{4}; -1\right), (4; 2).$

+ Vậy HPT có hai nghiệm: $\left(\frac{1}{4}; -1\right), (4; 2).$

Bài 2: Giải HPT
$$\begin{cases} 4x^2 + 4xy + y^2 + 2x + y = 2 & (1) \\ 8\sqrt{1-2x} + y^2 - 9 = 0 & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

(HSG Đắk Lắk 2011)

Lời giải:

+ Điều kiện: $x \leq \frac{1}{2}.$

+ Khi đó $(1) \Leftrightarrow (2x+y)^2 + (2x+y) - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow (2x+y-1)(2x+y+2) = 0 \Leftrightarrow y = 1-2x \geq 0 \vee 1-2x = y+3 \geq 0.$$

+ Với $y = 1-2x$, thì $(2) \Rightarrow 8\sqrt{y} = 9 - y^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq y \leq 3 \\ y^4 - 18y^2 + 17 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 0 \end{cases}$

+ Với $1 - 2x = y + 3$, thì $(2) \Rightarrow 8\sqrt{y+3} + (y-3)(y+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3 \\ 8 + (y-3)\sqrt{y+3} = 0 \end{cases} \quad (3)$

+ Đặt $t = \sqrt{y+3} \geq 0$ thì $(3) \Leftrightarrow 8 + (t^2 - 6)t = 0 \Leftrightarrow t^3 - 6t + 8 = 0$

+ Xét hàm số $f(t) = t^3 - 6t + 8, f'(t) = 3t^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{2}$.

+ Hàm số $f(t)$ đạt cực đại tại $(-\sqrt{2}; 8 + 4\sqrt{2})$ và đạt cực tiểu tại $(\sqrt{2}; 8 - 4\sqrt{2})$.

+ Vì $f(0) = 8 > 0, 8 - 4\sqrt{2} > 0$ nên $f(t) = 0$ không có nghiệm khi $t \geq 0$.

+ Vậy HPT có các nghiệm: $(0; 1), \left(\frac{1}{2}; -3\right)$.

Bài 3: Giải HPT $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 & (1) \\ 4x^2 + 3x - \frac{57}{25} = -y(3x+1) & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{Q})$

(HSG tỉnh Nghệ An 2011)

Lời giải:

+ Lấy PT (2) nhân với 2, rồi cộng với PT (1) ta được:

$$y^2 + 2(3x+1)y + 9x^2 + 6x - \frac{119}{25} = 0 \text{ có: } \Delta_y = \frac{144}{25}.$$

+ Suy ra: $y = -3x + \frac{7}{5} \vee y = -3x - \frac{7}{5}$.

+ Với $y = -3x + \frac{7}{5}$ thì $(2) \Leftrightarrow 10x^2 - \frac{42}{5}x + \frac{44}{25} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5} \Rightarrow y = \frac{1}{5} \\ x = \frac{11}{25} \Rightarrow y = \frac{2}{25} \end{cases}$

+ Với $y = -3x - \frac{7}{5}$ thì $(2) \Leftrightarrow 10x^2 + \frac{102}{5}x + \frac{284}{25} = 0 \quad (\text{VN})$

+ Vậy HPT có hai nghiệm: $\left(\frac{2}{5}; \frac{1}{5}\right), \left(\frac{11}{25}; \frac{2}{25}\right)$.

Bài 4: Giải HPT $\begin{cases} x^3 - y^3 = 35 \\ 2x^2 + 3y^2 = 4x - 9y \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{Q})$

(HSG tỉnh Yên Bái 2011)

Lời giải:

+ Lấy PT (2) nhân với -3 , rồi cộng với PT (1), được:

$$-6x^2 - 9y^2 + x^3 - y^3 = -12x + 27y + 35$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = y^3 + 9y^2 + 27y + 27$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^3 = (y+3)^3 \Leftrightarrow x-2 = y+3 \Leftrightarrow x = y+5.$$

+ Thế vào (2) được: $y^2 + 5y + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \Rightarrow x = 3 \\ y = -3 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$

+ Vậy HPT có 2 nghiệm: $(-2;3), (-3;2)$.

Bài 5: Giải HPT $\begin{cases} 4x^2 + y^4 - 4xy^3 = 1 & (1) \\ 4x^2 + 2y^2 - 4xy = 2 & (2) \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$

(HSG tỉnh Lâm Đồng 2011)

Lời giải:

+ Lấy (1) - (2) được: $y^4 - 2y^2 + 4xy^3 + 4xy + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (y^2 - 1)^2 - 4xy(y^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (y-1)(y+1)(y^2 - 1 - 4xy) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 1 \vee y = -1 \vee x = \frac{1-y^2}{4y}$$

+ Với $y = 1$, thế vào (1) được: $4x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$.

+ Với $y = -1$, thế vào (1) được: $4x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1$.

+ Với $x = \frac{1-y^2}{4y}$, thế vào (1) được: $(1-y^2)(8y^4 + 5y^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm 1 \\ y = \pm \frac{\sqrt{\sqrt{57}-5}}{4} \end{cases}$

+ Vậy HPT có các nghiệm: $(0;\pm 1), (1;1), (-1;-1), \left(\frac{11-\sqrt{57}}{\pm 16\sqrt{\sqrt{57}-5}}; \pm \frac{\sqrt{\sqrt{57}-5}}{4} \right)$.

Bài 6: Giải HPT $\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{8xy}{x+y} = 16 & (1) \\ \frac{x^2}{8y} + \frac{2x}{3} = \sqrt{\frac{x^3}{3y} + \frac{x^2}{4}} - \frac{x}{2} & (2) \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$

(HSG tỉnh Nghệ An 2012)

Lời giải:

+ Điều kiện: $y \neq 0, x + y \neq 0, \frac{x^3}{3y} + \frac{x^2}{4} \geq 0$.

$$\begin{aligned} + \text{PT (2)} &\Leftrightarrow \frac{x^2}{8y} + \frac{4x+3y}{6} = 2\sqrt{\frac{x^3}{12y} + \frac{x^2}{16}} \Leftrightarrow \frac{x^2}{8y} + \left(\frac{4x}{6} + \frac{3y}{6}\right) = 2\sqrt{\frac{x^2}{8y} \cdot \frac{4x}{6} + \frac{x^2}{8y} \cdot \frac{3y}{6}} \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2}{8y} + \left(\frac{4x}{6} + \frac{3y}{6}\right) = 2\sqrt{\frac{x^2}{8y} \cdot \left(\frac{4x}{6} + \frac{3y}{6}\right)} \quad (i) \end{aligned}$$

+ Đặt $a = \frac{x^2}{8y} \geq 0; b = \frac{4x}{6} + \frac{3y}{6} \geq 0$ thì (i) $\Leftrightarrow a + b = 2\sqrt{ab}$.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{x^2}{8y} + \frac{4x}{6} + \frac{3y}{6} \Leftrightarrow 3x^2 = 16xy + 12y^2 \Leftrightarrow 3\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 16\frac{x}{y} - 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x}{y} = 6 \vee \frac{x}{y} = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow x = 6y \vee x = -\frac{2}{3}y. \end{aligned}$$

+ Với $x = 6y$ thì (1) $\Rightarrow 37y^2 + \frac{48}{7}y = 16 \Leftrightarrow y = \frac{4}{7} \Rightarrow x = \frac{24}{7}$.

+ Với $3x = -2y$, thì (1) $\Rightarrow 13y^2 - 144y = 0 \Leftrightarrow y = 12 \Rightarrow x = -8$.

+ Vậy HPT có 2 nghiệm: $\left(\frac{24}{7}; \frac{4}{7}\right), (-8; 12)$.

Bài 7: Giải HPT $\begin{cases} \sqrt{4x+y} + \sqrt{2x+y} = 2 \\ \sqrt{2x+y} + x + y = 1 \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$

(HSG tỉnh Nam Định 2012)

Lời giải:

+ Đặt $a = \sqrt{4x+y}; b = \sqrt{2x+y}$. Khi đó, HPT đã cho trở thành:

$$\begin{cases} a+b=2 \\ a-\frac{1}{2}a^2+\frac{3}{2}b^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2-a \\ a^2-5a+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{5-\sqrt{5}}{2} > 0 \\ b=\frac{\sqrt{5}-1}{2} > 0 \end{cases}$$

$$+ \text{ Suy ra: } \begin{cases} 2\sqrt{4x+y} = 5-\sqrt{5} \\ 2\sqrt{2x+y} = \sqrt{5}-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-\sqrt{5} \\ y=\frac{3\sqrt{5}-9}{2} \end{cases}$$

+ Vậy HPT có một nghiệm: $\left(3 - \sqrt{5}; \frac{3\sqrt{5} - 9}{2}\right)$.

Bài 8: Giải HPT $\begin{cases} \sqrt{3x+y} + \sqrt{x+y} = 2 \\ \sqrt{x+y} + x - y = 1 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$

(HSG tỉnh Quảng Ninh 2012)

Lời giải:

+ Điều kiện: $\begin{cases} 3x + y \geq 0 \\ x + y \geq 0 \end{cases}$.

+ Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{3x+y} \geq 0 \\ b = \sqrt{x+y} \geq 0 \end{cases}$ thì HPT trở thành: $\begin{cases} a + b = 2 \\ b + a^2 - 2b^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{7 - \sqrt{21}}{2} \\ b = \frac{-3 + \sqrt{21}}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + y = \frac{35 - 7\sqrt{21}}{2} \\ x + y = \frac{15 - 3\sqrt{21}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - \sqrt{21} \\ y = \frac{5 - \sqrt{21}}{2} \end{cases} (TM)$$

+ Vậy HPT có một nghiệm: $\left(5 - \sqrt{21}; \frac{5 - \sqrt{21}}{2}\right)$.

Bài 9: Giải HPT $\begin{cases} (2012 - 3x)\sqrt{4-x} + (6y - 2009)\sqrt{3-2y} = 0 \\ 2\sqrt{7x-8y} + 3\sqrt{14x-18y} = x^2 + 6x + 13 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$

(HSG Olympic 30/04/2012)

Lời giải:

+ Điều kiện: $x \leq 4; y \leq \frac{3}{2}; 7x - 8y \geq 0; 14x - 18y \geq 0$.

$$\begin{aligned} + \text{PT (1)} &\Leftrightarrow [3(3-2y) + 2000]\sqrt{3-2y} = [3(4-x) + 2000]\sqrt{4-x} \\ &\Leftrightarrow f(\sqrt{3-2y}) = f(\sqrt{4-x}) \end{aligned}$$

+ Xét hàm số $f(t) = 3t^3 + 2000t; f'(t) = 9t^2 + 2000 > 0$.

+ Suy ra: $f(t)$ đồng biến trên \mathbb{R} . Suy ra: $\sqrt{3-2y} = \sqrt{4-x} \Leftrightarrow 2y = x + 1$.

+ PT (2) $\Leftrightarrow 2\sqrt{3x+4} + 3\sqrt{5x+9} = x^2 + 6x + 13$.

+ Nhân liên hợp, ta được: $x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1$.

+ Vậy HPT có 2 nghiệm: $\left(0; -\frac{1}{2}\right), (-1; -1)$.

Bài 10: Giải HPT
$$\begin{cases} x^3 + xy^2 = y^6 + y^4 \\ \sqrt{3x+1} + \sqrt{y^2+3} = 4 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

(HSG tỉnh Quảng Bình 2012)

Lời giải:

+ Điều kiện: $x \geq -\frac{1}{3}$.

+ Do $y = 0$ không thỏa mãn hệ, nên chia hai vế của (1) cho y^3 , ta được:

+ $\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} = y^3 + y \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f(y)$, với hàm $f(t) = t^3 + t$ tăng trên \mathbb{R} .

+ Suy ra: $\frac{x}{y} = y \Leftrightarrow x = y^2 \geq 0$ thì (2) $\Leftrightarrow \sqrt{3x+1} + \sqrt{x+3} = 4 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = \pm 1$ (TM)

+ Vậy HPT có 2 nghiệm: $(1; \pm 1)$.

Bài 11: Giải HPT
$$\begin{cases} 2y^3 + y + 2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x} \\ \sqrt{2y^2+1} + y = 4 + \sqrt{x+4} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

(HSG tỉnh Vĩnh Phúc 2013)

Lời giải:

+ Điều kiện: $-4 \leq x \leq 1$.

+ Khi đó PT (1) $\Leftrightarrow 2y^3 + y = 2(\sqrt{1-x})^3 + \sqrt{1-x} \Leftrightarrow f(y) = f(\sqrt{1-x})$

+ Với $f(t) = 2t^3 + t$ đơn điệu tăng trên \mathbb{R} .

+ Suy ra: $y = \sqrt{1-x} \Leftrightarrow y^2 = 1-x$ và (2) $\Leftrightarrow \sqrt{3-2x} + \sqrt{1-x} = 4 + \sqrt{x+4}$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x+3)}{\sqrt{3-2x}+3} + \frac{x+3}{\sqrt{1-x}+2} + \frac{x+3}{\sqrt{x+4}+1} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases} \quad (\text{TM}).$$

+ Vậy HPT có 1 nghiệm: $(-3; 2)$.

Bài 12: Giải HPT
$$\begin{cases} (\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{y^2+1}+y)=1 & (1) \\ 4\sqrt{x+2}+\sqrt{22-3x}=y^2+8 & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

(HSG Nam Định 2013)

Lời giải:

+ Điều kiện: $-2 \leq x \leq \frac{22}{3}$.

+ Do $\sqrt{1+y^2} > \sqrt{y^2} = |y| > y \Rightarrow \sqrt{1+y^2} - y > 0$.

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}+x = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}+y} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}+x = \sqrt{(-y)^2+1}+(-y) \\ &\Leftrightarrow f(x) = f(-y) \quad (3) \end{aligned}$$

+ Xét hàm số $f(t) = t + \sqrt{1+t^2}$ trên \mathbb{R} . Có $f'(t) = \frac{\sqrt{1+t^2}+t}{\sqrt{1+t^2}} \geq 0$.

+ Suy ra $f(t)$ đồng biến trên \mathbb{R} (4).

+ Từ (3) và (4), suy ra: $f(x) = f(-y) \Leftrightarrow x = -y \Leftrightarrow y = -x$.

+ Thế vào (2) được: $4\sqrt{x+2}+\sqrt{22-3x}=x^2+8$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 4\left[\sqrt{x+2}-\left(\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}\right)\right] + \left[3\sqrt{22-3x}-\left(\frac{1}{3}x+\frac{14}{3}\right)\right] = x^2-x-2 \\ &\Leftrightarrow 4\left[3\sqrt{x+2}-(x+4)\right] + \left[3\sqrt{22-3x}-(14-x)\right] = 3(x^2-x-2) \\ &\Leftrightarrow (-x^2+x+2)\left(\frac{4}{3\sqrt{x+2}+x+4} + \frac{1}{3\sqrt{22-3x}+14-x} + 3\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow -x^2+x+2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases} (TM) \end{aligned}$$

+ Vậy HPT có hai nghiệm: $(-1;1), (2;-2)$.

Bài 13: Giải HPT
$$\begin{cases} \left(\frac{1-x^2}{x^2}\right)^3 + xy + \frac{3}{2} = y^3 \\ (xy+2)^2 + \frac{1}{x^2} = 2y + \frac{4}{x} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

(HSG tỉnh Hà Tĩnh 2013)

Lời giải:

+ Điều kiện: $x \neq 0$ thì $(2) \Leftrightarrow \left(xy + 2 - \frac{1}{x}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow xy + 2 = \frac{1}{x} \Leftrightarrow y = \frac{1-2x}{x^2}$

+ PT (1) $\Leftrightarrow \left(\frac{1-x^2}{x^2}\right)^3 - \left(\frac{1-2x}{x^2}\right)^3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{x} (*)$.

+ Đặt $t = \frac{1}{x} \neq 0$.

+ Khi đó PT (*) $\Leftrightarrow 6t^5 - 15t^4 + 8t^3 + 3t^2 + t = \frac{3}{2} \Leftrightarrow (2t-1)(6t^4 - 12t^3 + 2t^2 + 4t + 3) = 0$.

+ Với $t = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = -\frac{3}{4}$ (TM)

+ Với $6t^4 - 12t^3 + 2t^2 + 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{36x^4 - 72x^3 + 12x^2 + 24x + 18}{6} = 0$

$\Leftrightarrow (6x^2 - 6x - 2)^2 + 14 = 0 (VN)$

+ Vậy HPT có 1 nghiệm: $\left(2; -\frac{3}{4}\right)$.

Bài 14: Giải HPT $\begin{cases} \sqrt{x+2y+3} + \sqrt{9x+10y+11} = 10 \\ \sqrt{12x+13y+14} + \sqrt{28x+29y+30} = 20 \end{cases} (x, y \in \mathbb{Q})$

(HSG Olympic 30/04/2013)

Lời giải:

+ Điều kiện: $\begin{cases} x+2y+3 \geq 0; 9x+10y+11 \geq 0 \\ 12x+13y+14 \geq 0; 28x+29y+30 \geq 0 \end{cases}$

+ Đặt $\begin{cases} a = x + y + 1 \\ b = y + 2 \end{cases}$.

+ Khi đó HPT trở thành: $\begin{cases} (\sqrt{a+b} + \sqrt{9a+b}) = 10 (*) \\ \sqrt{12a+b} + \sqrt{28a+b} = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(\sqrt{a+b} + \sqrt{9a+b}) = 20 \\ \sqrt{12a+b} + \sqrt{28a+b} = 20 \end{cases}$

$\Rightarrow \sqrt{12a+b} + \sqrt{28a+b} = 2(\sqrt{a+b} + \sqrt{9a+b})$.

+ Chia hai vế PT này cho \sqrt{b} ta được:

$$\sqrt{12\left(\frac{a}{b}\right)+1}+\sqrt{28\left(\frac{a}{b}\right)+1}=2\sqrt{\frac{a}{b}+1}+2\sqrt{9\left(\frac{a}{b}\right)+1}.$$

+ Đặt $t = \frac{a}{b}$ thì PT trở thành: $\sqrt{12t+1}+\sqrt{28t+1}=2\sqrt{t+1}+2\sqrt{9t+1} \Leftrightarrow t = \frac{5}{4} \Rightarrow a = \frac{5}{4}b$

+ Khi đó PT (*) tương đương với:

$$\sqrt{\frac{9}{4}b}+\sqrt{\frac{49}{4}b}=10 \Leftrightarrow 5\sqrt{b}=10 \Leftrightarrow b=4 \Rightarrow a=5 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases} \text{ (TM)}$$

+ Vậy HPT có một nghiệm: $(2;2)$.

Bài 15: Giải HPT $\begin{cases} x^3(3y-2)=-8 \\ x(y^3+2)=-6 \end{cases} (x, y \in \mathbb{Q})$

(HSG Thành Phố Hà Nội 2013)

Lời giải:

+ Do $x=0$ không thỏa mãn hệ.

+ Xét $x \neq 0$ thì HPT đã cho tương đương: $\begin{cases} 3y-2=-\frac{8}{x^3} \\ y^3+2=-\frac{6}{x} \end{cases} (*)$

+ Đặt $t = -\frac{2}{x}$ thì hệ (*) trở thành:

$$\begin{cases} 3y-2=t^3 \\ y^3+2=3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^3+2-3y=0 \\ y^3+2-3t=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow t^3 - y^3 + 3(t - y) = 0 \Leftrightarrow (t - y) \left[\left(t + \frac{y}{2} \right)^2 + \frac{3y^2}{4} + 3 \right] = 0 \Leftrightarrow t = y$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y^3 - 3y + 2 = 0 \\ y = -\frac{2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases} \text{ (TM)}$$

+ Vậy HPT có hai nghiệm: $(1;-2), (-2;1)$.

Bài 16: Giải HPT $\begin{cases} x^3 + 3x^2 - 13x - 15 = \frac{8}{y^3} - \frac{8}{y} \\ y^2 + 4 = 5y^2(x^2 + 2x + 2) \end{cases} (x, y \in \mathbb{Q})$

(HSG tỉnh Quảng Nam 2014)

Lời giải:

+ Điều kiện: $y \neq 0$.

+ Khi đó HPT đã cho tương đương:
$$\begin{cases} (x+1)^3 - 16(x+1) = \left(\frac{2}{y}\right)^3 - \left(\frac{2}{y}\right) \\ 1 + \left(\frac{2}{y}\right)^2 = 5[(x+1)^2 + 1] \quad (*) \end{cases}$$

+ Đặt
$$\begin{cases} a = x+1 \\ b = \frac{2}{y} \neq 0 \end{cases}$$

+ Khi đó HPT trên trở thành:
$$\begin{cases} a^3 - 16a = b^3 - 4b \\ 1 + b^2 = 5(a^2 + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - b^3 = 4(4a - b) \\ 4 = b^2 - 5a \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^3 - b^3 = (b^2 - 5a^2)(4a - b) \Leftrightarrow 21a^3 - 4ab^2 - 5a^2b = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 7a = 4b \\ b = -3a \end{cases}$$

+ Với $a = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = \pm 1$ (TM)

+ Với $7a = 4b \Rightarrow x+1 = \frac{8}{7y}$ thì (*) $\Leftrightarrow \frac{124}{49y^2} + 4 = 0$ (VN)

+ Với $b = -3a \Rightarrow x+1 = -\frac{2}{3y}$ thì (*) $\Leftrightarrow y^2 = \frac{4}{5} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = \frac{2}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases}$ (TM)

+ Vậy HPT đã cho có 4 nghiệm: $(-1; \pm 1), \left(-2; \frac{2}{3}\right), \left(0; -\frac{2}{3}\right)$.

Bài 17: Giải HPT
$$\begin{cases} (2x-1)\sqrt{x+y} = (6-x-y)\sqrt{2-x} & (1) \\ 2\sqrt[3]{12x^2 + 3xy - 18x} = x^3 - 6x - y + 5 & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

(HSG tỉnh Bắc Ninh 2014)

Lời giải:

+ Điều kiện:
$$\begin{cases} a = \sqrt{x+y} \geq 0 \\ b = \sqrt{2-x} \geq 0 \end{cases} \text{ thì } (1) \Leftrightarrow (3-2b^2)a = (6-a^2)b$$

$$\Leftrightarrow (a-2b)(3+ab) = 0 \Leftrightarrow a = 2b \text{ (TM)} \vee 3+ab = 0 \text{ (L) do } (a, b \geq 0).$$

+ Với $a = 2b \Leftrightarrow \sqrt{x+y} = 2\sqrt{2-x} \Leftrightarrow y = 8-5x$ thế vào (2) được:

$$(2) \Leftrightarrow 2\sqrt[3]{6x-3x^2} = x^3 - x - 3 \Leftrightarrow 6x - 3x^2 + 2\sqrt[3]{6x-3x^2} = (x-1)^3 + 2(x-1)$$

$$\Leftrightarrow f\left(\sqrt[3]{6x-3x^2}\right) = f(x-1).$$

+ Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t, f'(t) = 3t^2 + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

+ Suy ra $f(t)$ đồng biến trên \mathbb{R} .

+ Khi đó $\Leftrightarrow f\left(\sqrt[3]{6x-3x^2}\right) = f(x-1) \Leftrightarrow \sqrt[3]{6x-3x^2} = x-1 \Leftrightarrow x^3 - 3x - 1 = 0$ (*)

+ Đặt $x = 2\cos t, t \in (0; \pi)$, thì lúc đó: (*) $\Leftrightarrow 8\cos^3 t - 6\cos t - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 t - 3\cos t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 3t = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \pm \frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \\ k \in \mathbb{Z}, t \in (0; \pi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\cos \frac{\pi}{9} \\ y = 8 - 10\cos \frac{\pi}{9} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2\cos \frac{5\pi}{9} \\ y = 8 - 10\cos \frac{5\pi}{9} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2\cos \frac{7\pi}{9} \\ y = 8 - 10\cos \frac{7\pi}{9} \end{cases} \quad (\text{TM})$$

+ Vậy HPT có 3 nghiệm:

$$\left(2\cos \frac{\pi}{9}; 8 - 10\cos \frac{\pi}{9}\right), \left(2\cos \frac{5\pi}{9}; 8 - 10\cos \frac{5\pi}{9}\right), \left(2\cos \frac{7\pi}{9}; 8 - 10\cos \frac{7\pi}{9}\right).$$

Bài 18: Giải HPT
$$\begin{cases} x^2y + xy + 2x - 12y - 24 = 0 & (1) \\ x^3 - y^3 = 2(x^2 + y^2 + xy) + 3(x - y - 2) & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

(HSG tỉnh Đồng Nai 2014)

Lời giải:

+ Đặt $\begin{cases} a = x^2 + y^2 + xy \\ b = x - y \end{cases} \Rightarrow ab = x^3 - y^3$ thì (2) trở thành:

$$\Leftrightarrow ab = 2a + 3(b - 2) \Leftrightarrow (b - 2)(a - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 3 \\ y = x - 2 \end{cases}$$

+ Với $y = x - 2$, thì (1) $\Leftrightarrow x^3 - x^2 = 12x \Rightarrow (x; y) \in \{(0; -2), (4; 2), (-3; -5)\}$.

+ Với $x^2 + y^2 + xy = 3$, ta có HPT:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ x^2y + xy + 2x - 12y - 24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + yx + x^2 = 3 = 0 & (a) \\ y^2 + (y + 2)x - 12y - 24 = 0 & (b) \end{cases}$$

+ Ta có:
$$\begin{cases} \Delta_{x(a)} = 12 - 3y^2 \geq 0 \Rightarrow y \in [-2; 2] \\ \Delta_{x(b)} = 49y^2 + 100y + 4 \geq 0 \Rightarrow y \in (-\infty; -2] \cup \left[-\frac{2}{49}; +\infty\right) \end{cases}$$

+ Do đó để hệ có nghiệm thì $y = -2 \vee y \in \left[-\frac{2}{49}; 2\right]$.

+ Khi $y = -2$ thì $(a) \Leftrightarrow x = 1$. Thử lại thấy hệ không thỏa mãn nên loại $y = -2$.

+ Khi $y \in \left[-\frac{2}{49}; 2\right]$ và từ (2) $\Rightarrow y = \frac{-2x+24}{x^2+x-12} \Rightarrow -\frac{2}{49} \leq \frac{-2x+24}{x^2+x-12} \leq 2$.

$\Rightarrow x \in (-\infty; -6] \cup (4; +\infty)$. Mà $(a) \Leftrightarrow y^2 + xy + x^2 - 3 = 0$ có

$\Delta_y = 12 - 3x^2 \Rightarrow x \in [-2; 2]$ nên không tồn tại x để $y \in \left[-\frac{2}{49}; 2\right]$.

+ Suy ra hệ vô nghiệm khi $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$

+ Vậy HPT có các nghiệm là: $(0; -2), (4; 2), (-3; -5)$.

Bài 19: Giải HPT
$$\begin{cases} \sqrt{7x+y} - \sqrt{2x+y} = 4 \\ 2\sqrt{2x+y} - \sqrt{5x+8} = 2 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{Q})$$

(HSG Thái Nguyên 2014)

Lời giải:

+ Điều kiện: $7x+y \geq 0; 2x+y \geq 0; 5x+8 \geq 0$.

+ Khi đó:

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{7x+y} = 4\sqrt{2x+y} \Leftrightarrow 2\sqrt{2x+y} = \frac{5x}{4} - 4$.

$(2) \Rightarrow \sqrt{5x+8} = \frac{5x}{8} - 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{24}{5} \\ 25x^2 - 320x + 448 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{56}{5} \Rightarrow y = \frac{13}{5}$.

+ Vậy HPT có nghiệm duy nhất: $\left(\frac{56}{5}; \frac{13}{5}\right)$.